Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. Dorichenko, Избранные задачи LXXII Московской математической олимпиады, *Kvant*, 2009, Number 4, 50–52

https://www.mathnet.ru/eng/kvant2675

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.83
December 10, 2025, 11:14:50

тате исходный треугольник разделился на 5 меньших треугольников. Рассмотрим те три из них, которые примыкают к стороне $AC$. Докажите, что площадь среднего треугольника равна сумме площадей крайних треугольников.

*В.Произволов*

**7** (9). См. задачу М2136 «Задачника «Кванта».

### *10–11 классы*

**1** (4). Прямоугольник разбили на несколько меньших прямоугольников. Могло ли оказаться, что для каждой пары полученных прямоугольников отрезок, соединяющий их центры, пересекает еще какой-нибудь прямоугольник?

*М.Мурашкин*

**2** (4). См. задачу 4 для 8–9 классов.

**3** (6). На каждой клетке доски $10\times10$ стоит фишка. Разрешается выбрать диагональ, на которой стоит четное число фишек, и снять с нее любую фишку. Какое наибольшее число фишек можно убрать с доски такими операциями?

*М.Мурашкин*

**4** (6). См. задачу М2134 «Задачника «Кванта».

**5** (8). См. задачу М2136 «Задачника «Кванта».

**6** (9). Дано целое число $n > 1$. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый – красным цветом, второй – синим. Когда отмечено по $n$ точек каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше – тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков – ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл противник?

*А.Шаповалов*

**7** (9). См. задачу М2138 «Задачника «Кванта».

### УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

**1.** На доске написаны числа 1, 2, …, 100. Разрешается стереть два числа и написать вместо них их сумму или их произведение. Какое наибольшее число может остаться на доске после 99 таких операций?

*И.Богданов*

**2.** Хромая ладья обошла часть шахматной доски, начав свой путь на клетке $d4$ (рис. 2). Известно, что ни на какой клетке она не была дважды, посетила все четыре угла доски, причем на клетку $a1$ она попала с клетки $a2$, на клетку $a8$ она попала с клетки $a7$ и на клетку $h8$ она попала с клетки $h7$. С какой клетки она попала на клетку $h1$? (Хромая ладья ходит по вертикали и горизонтали на 1 клетку).

*А.Толпыго*

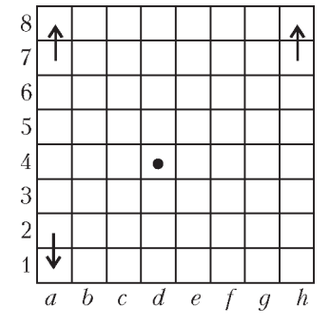

Рис. 2

**3.** Даны $n$ цветов с номерами от 1 до $n$. Для каждого $k$ от 1 до $n$ пусть $f_k(n)$ обозначает количество способов окрасить натуральные числа от 1 до $n$ в первые $k$ цветов (каждый из этих цветов должен присутствовать). Докажите, что

$$\left|f_1(n) - f_2(n) + f_3(n) - f_4(n) + f_5(n) - f_6(n) + \ldots\right| = 1 .$$

(Раскраски, отличающиеся перестановкой цветов, считаются разными. Например, $f_1(2) = 1$ и $f_2(2) = 2$ .)

*М.Берштейн, Г.Мерзон*

**4.** Сфера касается всех ребер тетраэдра $ABCD$, кроме ребра $CD$. Докажите, что существует сфера, которая касается всех ребер этого тетраэдра, кроме ребра $AB$.

*В.Произволов*

**5.** Дан многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами. Известно, что для каждого натурального $n$ найдется такое натуральное $k$, что $P\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{k}$. Докажите, что найдутся такие числа $c$ и $m$, что $P(x) = cx^m$ .

*С.Спиридонов*

**6.** Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда $1\times1\times2$ м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравей знает, сколько он прополз.)

*А.Шаповалов*

*Публикацию подготовил С.Дориченко*

# Избранные задачи LXXII Московской математической олимпиады

**1.** У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырехзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова? (6)

*И.Раскина*

**2.** Разрежьте фигуру на рисунке 1 на 8 одинаковых частей. (6)

*Фольклор*

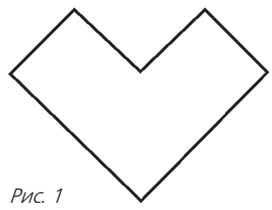
Рис. 1

**3.** В парке росли липы и клены. Кленов среди них было 60%. Весной в парке посадили липы, после чего кленов стало 20%. А осенью посадили клены, и кле-

*В скобках после текста каждой задачи указан класс, в котором она предлагалась.*

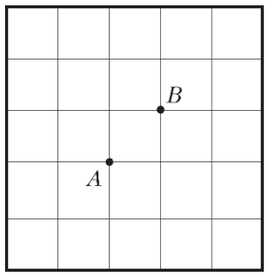

Рис. 2

нов стало снова 60%. Во сколько раз увеличилось количество деревьев в парке за год? (6)

*Д.Шноль*

**4.** Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка $A$ на плане; рис.2) до своего отеля (точка $B$). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрестке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет. (6)

*И.Ященко*

**5.** Петя и Вася живут в соседних домах (см. план на рис. 3). Вася живет в четвертом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путем (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живет Петя. (7)

*А.Хачатурян*

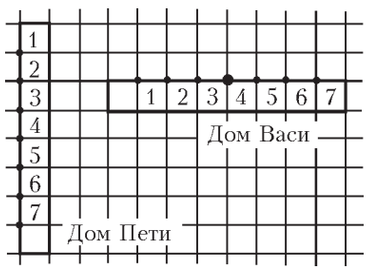

Рис. 3

**6.** У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зеленый: «Вместе у нас 27 ног», желтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног? (7)

*Д.Шноль*

**7.** Скупой рыцарь хранит золотые монеты в 77 сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну по этим двум сундукам. Потом он заметил, что если открыть любые 3, или любые 4, …, или любые 76 сундуков, то тоже можно так переложить лежащие в них монеты, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга не успел проверить, можно ли разложить все монеты поровну по всем 77 сундукам. Можно ли, не заглядывая в сундуки, дать точный ответ на этот вопрос? (7)

*И.Раскина*

**8.** Начертите два четырехугольника с вершинами в узлах сетки, из которых можно сложить а) как треугольник, так и пятиугольник; б) и треугольник, и четырехугольник, и пятиугольник. Покажите, как это можно сделать. (7)

*Д.Шноль*

**9.** На доске написано:

*В этом предложении …% цифр делятся на 2, …% цифр делятся на 3, а …% цифр делятся и на 2, и на 3.*

Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным. (8)

*А.Шаповалов*

**10.** На гипотенузе $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ выбрана точка $K$, для которой $CK = BC$. Отрезок $CK$ пересекает биссектрису $AL$ в ее середине. Найдите углы треугольника $ABC$. (8)

*И.Богданов*

**11.** Известно, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ ($a$, $b$ и $c$ – отличные от нуля числа) имеют общий корень. Найдите его. (8)

*В.Клепцын*

**12.** Две точки на плоскости несложно соединить тремя ломаными так, чтобы получилось два равных многоугольника (например, как на рис.4). Соедините две точки четырьмя ломаными так, чтобы все три получившихся многоугольника были равны. (Ломаные несамопересекающиеся и не имеют общих точек, кроме концов.) (8)

*С.Маркелов*

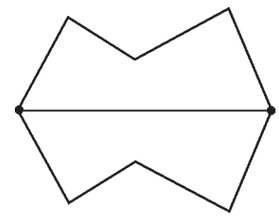
Рис. 4

**13.** Двое играющих по очереди пишут – каждый на своей половине доски – по одному натуральному числу (повторения разрешаются) так, чтобы сумма всех чисел на доске не превосходила 10000. После того, как сумма всех *чисел* на доске становится равной 10000, игра заканчивается подсчетом суммы всех *цифр* на каждой половине. Выигрывает тот, на чьей половине сумма цифр меньше (при равных суммах – ничья). Может ли кто-нибудь из игроков выиграть, как бы ни играл противник? (8)

*А.Шаповалов*

**14.** После урока на доске остался график функции $y = \frac{k}{x}$ и пять прямых, параллельных прямой $y = kx$ ($k \neq 0$). Найдите произведение абсцисс всех десяти точек пересечения. (9)

*А.Блинков*

**15.** На кольцо свободно нанизано 2009 бусинок. За один ход любую бусинку можно передвинуть так, чтобы она оказалась ровно посередине между двумя соседними. Существуют ли такие изначальная расстановка бусинок и последовательность ходов, при которых какая-то бусинка пройдет хотя бы один полный круг? (10)

*И.Шанин*

**16.** Стороны $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$ касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках $A_1$, $B_1$. Пусть $A_2$, $B_2$ – ортоцентры треугольников $CAA_1$ и $CBB_1$. Докажите, что прямая $A_2B_2$ перпендикулярна биссектрисе угла $C$. (10)

*А.Заславский*

**17.** На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции

$$y = \sin x, \quad x \in (0; \alpha).$$

Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если:

а) $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; б) $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$? (11)

*А.Галочкин*

**18.** Через каждую вершину четырехугольника проведена прямая, проходящая через центр вписанной в него окружности. Три из этих прямых обладают тем свойством, что каждая из них делит площадь четырехугольника на две равновеликие части.

а) Докажите, что и четвертая прямая обладает тем же свойством.

б) Какие значения могут принимать углы этого четырехугольника, если один из них равен 72°? (11)

*А.Канунников*

**19.** Для каждого простого $p$ найдите наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$. (11)

*А.Канунников*

**20.** Докажите, что при любом разбиении ста «двузначных» чисел 00, 01, …, 99 на две группы некоторые числа хотя бы одной группы можно записать в ряд так, чтобы любые два соседних числа этого ряда отличались друг от друга на 1, 10 или 11, и хотя бы в одном из двух разрядов (единиц или десятков) встречались все 10 различных цифр. (11)

*О.Косухин*

*Публикацию подготовил С.Дориченко*

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

## ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

### *7 класс*

**1.** Два друга Егор и Петя устроили гонки на велосипедах вокруг квартала в дачном поселке (рис.1). Стартовав одновременно из точки $B$ в разные стороны, Егор вдоль улицы $BA$, Петя вдоль улиц $BC$ и $CA$, друзья встретились через 4 минуты в точке $A$ и продолжили гонки с постоянными по модулю скоростями, объезжая квартал раз за разом в противоположных направлениях. Через какое минимальное время после первой встречи они снова окажутся вместе в точке $A$?

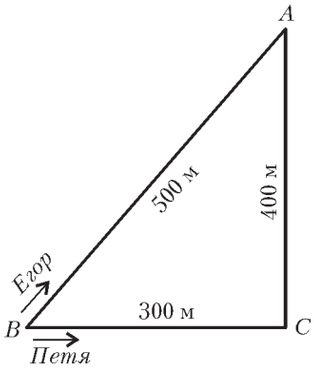

Рис. 1

*М.Семенов*

**2.** В системе, изображенной на рисунке 2, масса самого правого груза равна $m_4 = 1$ кг, а массы всех блоков одинаковы и равны $m_0 = 300$ г. Система уравновешена и неподвижна. Найдите массы грузов $m_1$, $m_2$ и $m_3$. Массой троса и трением в блоках пренебречь.

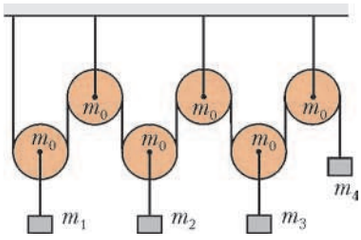

Рис. 2

*М.Ромашка*

**3.** Пятидесятиметровый бассейн шириной 20 м имеет профиль дна, показанный на рисунке 3: через каждые 12,5 м глубина бассейна увеличивается на 1 м. Пустой бассейн начинают заполнять водой, наливая ее со скоростью 1000 литров в минуту. Постройте график зависимости высоты $h$ уровня воды над самой глубокой частью дна бассейна от времени $t$ и определите, через какое время бассейн заполнится водой доверху.

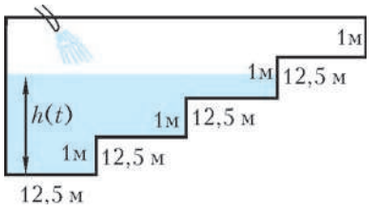

Рис. 3

*М.Семенов*

**4.** У школьника Андрея есть стеклянная пробирка массой $M = 80$ г и вместимостью $V = 60$ мл. Он опустил пробирку в цилиндрический сосуд с водой и постепенно насыпал на дно пробирки песок до тех пор, пока она не погрузилась в воду по горлышко (рис.4). Затем Андрей измерил массу песка, находившегося в пробирке в этот момент, и она оказалась равной $m = 12$ г. Внутренний радиус сосуда, в который опущена пробирка, равен $R = 5$ см. Плотность воды $\rho_в = 1$ г/см$^3$. Определите по этим данным плотность стекла пробирки и вычислите, на сколько поднялся уровень воды в сосуде в результате погружения пробирки в воду.

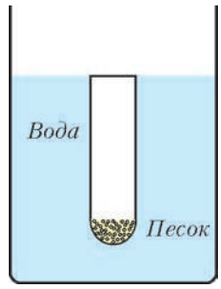

Рис. 4

*М.Ромашка*

### *8 класс*

**1.** Так называемый «китайский ворот» представляет собой два цилиндрических вала радиусами $r$ и $R$, насаженных на общую ось, закрепленную горизонтально (рис.5; вид сбоку). На валы в противоположных направлениях намотана веревка, на которой висит подвижный блок такого радиуса, что свободные участки веревки практически вертикальны. К оси блока прикреплен груз массой $m$. Ворот снабжен ручкой, конец которой находится на расстоянии $2R$ от оси ворота. 1) Ворот вращают за ручку так, что он делает $n$ оборотов в секунду. С какой скоростью при этом движется груз, если веревка нигде не проскальзывает? 2) Какую силу необходимо прикладывать к концу ручки ворота для

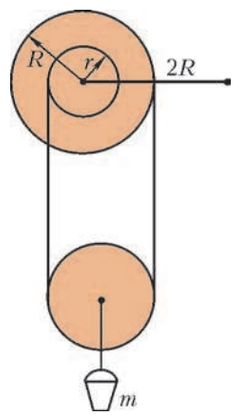

Рис. 5