наличия спектральной теоремы мы можем определить "квадрат" элемента $a=\int \lambda p(d\lambda)$ по формуле $a^{(2)} \equiv \int \lambda^2 p(d\lambda)$. В нашем примере произведение элементов a и b, задаваемое формулой $a \circ b \equiv \frac{1}{2}((a+b)^{(2)} - a^{(2)} - b^{(2)})$, однако не обладает свойством билинейности.

Л и т е р а т у р а

I. A b b a t i M., M a n i à A. A spectral theory for order unit spaces // Ann. Inst. H.Poincarě. I98I. V.35. No.4. P.259-285.

2. A l f s e n E., S h u l t z F. Non commutative spectral theory for affine functions spaces on convex sets // Mem. Amer.Math. Soc. I976. V.I72.

3. B o n n e t P. Une théorie spectrale dans certains espaces du type A(K) // C.R. Acad. Sci. Paris. I976. T.282. Sěr. A.P.207-2I0.

Ф.Ф.Султанбеков

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ НОРМ

§ I. Законы композиции в пространстве распределений

Пусть $\mathbb{B}$ – множество всех невозрастающих непрерывных слева функций $\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$ таких, что $\xi(x)=1$ при $x \leqslant 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi(x)=0$ (такие функции называются вероятностными, так как $1-\xi$ есть функция распределения некоторой неотрицательной случайной величины). Относительно естественного порядка $\xi \leqslant \eta \Longleftrightarrow \xi(x) \leqslant \eta(x) \, (x \in \mathbb{R})$ множество $\mathbb{B}$ имеет наименьший элемент Δ, $\Delta(x)=0$ $(x>0)$. В множестве $\mathbb{B}$ будем рассматривать топологию слабой сходимости, порожденную метрикой П.Леви

$$\ell(\xi,\eta) = \inf\left\{\varepsilon>0 : \xi(x+\varepsilon)-\varepsilon \leqslant \eta(x) \leqslant \xi(x-\varepsilon)+\varepsilon \ (x\in\mathbb{R})\right\}.$$

Полезно привести еще одну формулу для метрики ℓ. Обозначим через $\bar{\xi}$ непрерывную кривую на плоскости, полученную из ξ после дополнения ее разрывов вертикальными отрезками. Пусть $P(\xi,a)$ – точка пересечения $\bar{\xi}$ с прямой $y=x+a$ $(a\in\mathbb{R})$. Тогда

$$\ell(\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\max\{|P(\xi,a)P(\eta,a)| : a\in\mathbb{R}\},$$

где $|P(\xi,a)P(\eta,a)|$ – длина отрезка, соединяющего точки плоскости $P(\xi,a)$ и $P(\eta,a)$. Отметим также, что метрическое пространство $(\mathbb{B},\ell)$ сепарабельно и полно.

Определение I [I]. Закон композиции μ, задающий в $\mathbb{B}$ структуру коммутативной упорядоченной полугруппы, называется функцией треугольника (фт), если Δ – нейтральный элемент этого закона.

Аналогичный непрерывный сверху закон композиции на множестве неотрицательных чисел $\mathbb{R}_+$ (соответственно на отрезке $[0,1]$) называется S-функцией (соответственно t-функцией), если 0 – нейтральный элемент этого закона.

Определение 2 [3],[4]. Закон композиции π, задающий в $\mathbb{B}$ структуру коммутативной упорядоченной полугруппы с нейтральным элементом, называется мультипликативным законом (мз), если $\pi(\Delta,\xi)=\Delta$ для любой функции $\xi\in\mathbb{B}$.

Также в соответствии с определением 2 на $\mathbb{R}_+$ определяется p-функция. Приведем примеры таких функций:

$$S_p(x,y)=(x^{1/p}+y^{1/p})^p \ (p>0);\ S_0(x,y)=\max(x,y)\ \ (x,y\in\mathbb{R}_+),$$

$$T_p(a,b)=\min(S_p(a,b),1)\ ;\ T_*(a,b)=a+b-ab\ \ (a,b\in[0,1]),$$

$$\Pi_p(x,y)=\exp[(\ln x)^{1/p}+(\ln y)^{1/p}]^p\ \ (p>0)\ \ (x,y\in\mathbb{R}_+)$$

(предполагается, что степенная функция x^α нечетным образом продолжена на отрицательные значения x).

Теорема I. Пусть S – s-функция, T – t-функция, Π – p-функция с нейтральным элементом α. Тогда формулы

$$\mu_S^T(\xi,\eta)(x)=\inf_{S(x',x'')<x} T(\xi(x'),\eta(x'')),\ \pi_\Pi^T(\xi,\eta)(x)=\inf_{\Pi(x',x'')<x} T(\xi(x'),\eta(x''))\,(x>0)$$

определяют фт и соответственно мз с нейтральным элементом

$$\Delta_\alpha(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant\alpha,\\ 0, & x>\alpha.\end{cases}$$

Доказательство. Утверждение для фт было установлено в [6], для мз доказательство получается аналогично.

Замечание. Некоторые законы приведенной выше конструкции носят специальные обозначения

$$\mu_0 \equiv \mu_{S_1}^{T_0}, \ \mu_p \equiv \mu_{S_p}^{T_p} \ (p>0) \ ; \ \pi^{T} \equiv \pi_{\Pi_1}^{T}, \ \pi_p \equiv \pi^{T_p} \ (p \geqslant 0).$$

Приведем также два интегральных закона композиции

$$\mu_*(\xi,\eta)(x) = \eta(x) - \int_0^x \xi(x-y)\,d\eta(y) \quad (\xi,\eta \in \mathbb{B}),$$

$$\pi_*(\xi,\eta)(x) \equiv -\int_0^{+\infty} \xi\left(\frac{x}{y}\right) d\eta(y) \quad (\xi,\eta \in \mathbb{B}).$$

Основным для данной работы является понятие полудистрибутивности.

Определение 3 [8]. Мз π назовем полудистрибутивным относительно фт μ, если

$$\mu(\pi(\xi,\eta), \ \pi(\xi,\zeta)) \leqslant \pi(\xi,\mu(\eta,\zeta))$$

для любых $\xi,\eta,\zeta \in \mathbb{B}$. Аналогично s-функция S называется полудистрибутивной, если $S(\lambda x,\lambda y) \leqslant \lambda S(x,y)$ для любых $\lambda, x, y \in \mathbb{R}_+$.

Примером полудистрибутивной (даже дистрибутивной) S-функции является S_p $(p \geqslant 0)$.

Теорема 2. Справедливы утверждения:

$i)$ π^T полудистрибутивен относительно $\mu_S^{\tilde{T}}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{T} = T_0$ и S полудистрибутивна.

$ii)$ Если π_* полудистрибутивен относительно μ_S^T, то $T = T_0$ и S полудистрибутивна.

$iii)$ Мз π_* и π^T не являются полудистрибутивными относительно μ_*, какую бы ни выбрать t-функцию T.

Для доказательства нам понадобится операция умножения неотрицательных чисел на вероятностные функции $(\lambda \circ \xi)(x) \equiv \xi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, если $\lambda > 0$ и $0 \circ \xi \equiv \Delta$. Для любых двух конечных упорядоченных наборов чисел $1 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k > 0$, $0 = x_0 < x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k$ определим функцию

$$\Delta_{x_1 \ldots x_k}^{a_1 \ldots a_k}(z) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } z \leqslant 0, \\ a_i, & \text{если } x_{i-1} < z \leqslant x_i \ (i = 1, \ldots, k), \\ 0, & \text{если } z > x_k. \end{cases}$$

Тогда нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма. Для любых чисел $x, y \in \mathbb{R}_+$, $a, b \in [0,1]$ имеют место равенства

$$\mathcal{T}^T(\Delta_x^a, \Delta_y^b) = \Delta_{xy}^{\min(a,b)}, \quad \mathcal{T}_*(\Delta_x^a, \Delta_y^b) = \Delta_{xy}^{ab},$$

$$\mu_S^T(\Delta_x^a, \Delta_y^b) = \Delta_{\min(x,y)}^{T(a,b)} \quad \begin{matrix} c \\ \max(x,y) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \min(a,b) \\ S(x,y) \end{matrix},$$

где $c = \begin{cases} a, & \text{если } \max(x,y) = x, \\ b, & \text{если } \max(x,y) = y. \end{cases}$

Установим теперь критерий сравнимости произвольной фт с $\mu_S^{T_0}$.

Критерий сравнимости. Пусть S полудистрибутивна. Тогда

$$\mu \leq \mu_S^{T_0} \iff \forall \xi \in \mathbb{B},\ \lambda, \theta \in \mathbb{R}_+ \ (\mu(\lambda \circ \xi, \theta \circ \xi) \leq S(\lambda, \theta) \circ \xi).$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varkappa(\xi)(t) \equiv \equiv \inf\{x : \xi(x) < t\}$, $t \in (0,1]$, $\xi \in \mathbb{B}$. Это отображение инъективно, сохраняет неравенства, произведение (т.е. $\varkappa(\lambda \circ \xi) = \lambda \varkappa(\xi)$) и

$$\varkappa(\mu_S^T(\xi, \eta))(t) = \inf_{T(t', t'') < t} S(\varkappa(\xi)(t'), \varkappa(\eta)(t''))$$

(см. [6], [7]). Поэтому из условия $\mu \leq \mu_S^{T_0}$ имеем $\varkappa(\mu(\lambda \circ \xi, \theta \circ \xi))(t) \leq$

$$\leq \varkappa(\mu_S^{T_0}(\lambda \circ \xi, \theta \circ \xi))(t) = S(\varkappa(\lambda \circ \xi)(t), \varkappa(\theta \circ \xi)(t)) \leq \varkappa(\xi)(t)\, S(\lambda, \theta).$$

Следовательно, $\mu(\lambda \circ \xi, \theta \circ \xi) \leq S(\lambda, \theta) \circ \xi$.

Обратно, пусть фт μ такова, что $\mu(\lambda \circ \xi, \theta \circ \xi) \leq S(\lambda, \theta) \circ \xi$ для любых $\xi \in \mathbb{B}, \lambda, \theta \in \mathbb{R}_+$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует пара чисел x', x'' такая, что $S(x', x'') < x$ и $\max(\xi(x'), \eta(x'')) < \mu_S^{T_0}(\xi, \eta)(x) + \varepsilon$. Положим $\zeta(x) \equiv \max\{\xi(x), (\frac{x'}{x''} \circ \eta)(x)\}$. Тогда $\zeta \geq \xi$, $\zeta \geq \frac{x'}{x''} \circ \eta$. Поэтому

$$\mu(\xi, \eta)(x) \leq \mu(\zeta, \frac{x''}{x'} \circ \zeta)(x) \leq \left[S(1, \frac{x''}{x'}) \circ \zeta\right](x) = \zeta\left(\frac{x}{S(1, \frac{x''}{x'})}\right) \leq$$

$$\leq \zeta\left(\frac{x x'}{S(x', x'')}\right) \leq \zeta(x') = \max(\xi(x'), \eta(x'')) < \mu_S^{T_0}(\xi, \eta)(x) + \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 2. i) Пусть $\mathfrak{F}^T$ полудистрибутивна относительно $\mu_S^{\tilde T}$. Тогда, учитывая, что $\mathfrak{F}^T(\xi, \Delta_\lambda) = \lambda \circ \xi$, и используя лемму, имеем $\mu_S^{\tilde T}(\lambda \circ \xi, \theta \circ \xi) = \mu_S^{\tilde T}(\mathfrak{F}^T(\xi, \Delta_\lambda), \mathfrak{F}^T(\xi, \Delta_\theta)) \leqslant \mathfrak{F}^T(\xi, \mu_S^{\tilde T}(\Delta_\lambda, \Delta_\theta)) = \mathfrak{F}^T(\xi, \Delta_{S(\lambda,\theta)}) = S(\lambda,\theta) \circ \xi$. Полагая в этом неравенстве $\xi = \Delta_x$ и применяя лемму, получим $\Delta_{S(\lambda x, \theta x)} = \mu_S^{\tilde T}(\Delta_{\lambda x}, \Delta_{\theta x}) = \mu_S^{\tilde T}(\lambda \circ \Delta_x, \theta \circ \Delta_x) \leqslant S(\lambda,\theta) \circ \Delta_x = \Delta_{x S(\lambda,\theta)}$. Значит, $S(\lambda x, \theta x) \leqslant x S(\lambda,\theta)$ и S является полудистрибутивной. Но тогда по критерию сравнимости получим $\mu_S^{\tilde T} \leqslant \mu_S^{T_0}$. Но это возможно лишь при $\tilde T = T_0$.

Обратно, установим, что $\mathfrak{F}^T$ полудистрибутивен относительно $\mu_S^{T_0}$. Снова обратимся к отображению $\varkappa$. Для мз вида $\mathfrak{F}_\Pi^T$ справедливо равенство

$$\varkappa(\mathfrak{F}_\Pi^T(\xi, \eta))(t) = \inf_{T(t',t'')<t} \Pi(\varkappa(\xi)(t'), \varkappa(\eta)(t'')) \quad (t \in (0,1]).$$

(Доказательство его аналогично доказательству соответствующего равенства для фт μ_S^T.)

Имеем

$$\varkappa(\mathfrak{F}^T(\xi, \mu_S^{T_0}(\eta,\zeta)))(t) = \inf_{T(t',t'')<t} \varkappa(\xi)(t')\, S(\varkappa(\eta)(t''), \varkappa(\zeta)(t'')) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{T(t',t'')<t} S(\varkappa(\xi)(t')\varkappa(\eta)(t''), \varkappa(\xi)(t')\varkappa(\zeta)(t'')) \geqslant S\Big(\inf_{T(t',t'')<t} \varkappa(\xi)(t') \cdot$$

$$\cdot \varkappa(\eta)(t''), \inf_{T(t',t'')<t} \varkappa(\xi)(t')\varkappa(\zeta)(t'')\Big) = S(\varkappa(\mathfrak{F}^T(\xi,\eta))(t),$$

$$\varkappa(\mathfrak{F}^T(\xi,\zeta))(t)) = \varkappa(\mu_S^{T_0}(\mathfrak{F}^T(\xi,\eta), \mathfrak{F}^T(\xi,\zeta)))(t)$$

(в первом неравенстве использовалась полудистрибутивность S, во втором – монотонность S). Отсюда следует требуемое неравенство полудистрибутивности $\mathfrak{F}^T$.

ii) Заметим, что $\mathfrak{F}_*(\xi, \Delta_\lambda) = \lambda \circ \xi$. Поэтому доказательство такое же, как в пункте i).

iii) Допустим, что мз $\mathfrak{F}^T$ полудистрибутивен относительно фт

μ_*. Тогда, учитывая, что $\mu_*(\Delta_\lambda, \Delta_\theta) = \Delta_{\lambda+\theta}$, получим $\mu_*(\lambda\circ\xi, \theta\circ\xi) =$
$= \mu_*(\mathcal{T}^T(\xi, \Delta_\lambda), \mathcal{T}^T(\xi, \Delta_\theta)) \leqslant \mathcal{T}^T(\xi, \mu_*(\Delta_\lambda, \Delta_\theta)) = \mathcal{T}^T(\xi, \Delta_{\lambda+\theta}) =$
$= (\lambda+\theta)\circ\xi$ для любых $\lambda,\theta \in \mathbb{R}_+$, $\xi \in \mathbb{B}$. По критерию сравнимости должно быть $\mu_* \leqslant \mu_{S_1}^{T_0}$. Но для вероятностной функции $\xi(x) \equiv e^{-x}$ $(x \geqslant 0)$ имеем $\mu_*(\xi,\xi)(x) = (1+x)e^{-x}$ $(x \geqslant 0)$, $\mu_{S_1}^{T_0}(\xi,\xi)(x) = (2\circ\xi)(x) = e^{-x/2}$ $(x \geqslant 0)$. Сопоставляя эти функции, легко обнаружить их несравнимость. Доказательство для мз $\hat{\mathcal{T}}_*$ аналогично.

§ 2. Об ограниченных операторах в случайном нормированном пространстве

Напомним нужные нам определения. Пусть $\mathcal{X}$ — векторное пространство, $\mathcal{N}$ — кольцо над полем Λ комплексных или вещественных чисел, μ — фт, $\mathcal{T}$ — мз.

<u>Определение 4</u> [2]. Пара $(\mathcal{X}, \mu)$ называется <u>случайным нормированным пространством</u> (СНП), если задано отображение (называемое случайной нормой) $\|\cdot\| : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{B}$, удовлетворяющее аксиомам СН1 $\|\varphi\| = \Delta \Longleftrightarrow \varphi = 0$, СН2 $\|\lambda\varphi\| = |\lambda| \circ \|\varphi\|$ СН3 $\|\varphi+\psi\| \leqslant \mu(\|\varphi\|, \|\psi\|)$ $(\varphi,\psi \in \mathcal{X}, \lambda \in \Lambda)$.

<u>Определение 5</u> [4]. Тройка $(\mathcal{N}, \mu, \mathcal{T})$ называется <u>случайным нормированным кольцом</u> (СНК), если определено отображение $\|\cdot\| : \mathcal{N} \to \mathbb{B}$, удовлетворяющее требованиям: а) $(\mathcal{N}, \|\cdot\|, \mu)$ — СНП; б) $\|\varphi\psi\| \leqslant \mathcal{T}(\|\varphi\|, \|\psi\|)$ $(\varphi,\psi \in \mathcal{N})$; в) если в $\mathcal{N}$ есть единица e, то $\|e\|$ нейтральный относительно $\mathcal{T}$ элемент.

Примером СНК с законами композиции μ_1 и $\mathcal{T}_1$ является пространство всех случайных величин $S(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ со случайной нормой $\|\varphi\|(x) = P\{\omega \in \Omega : |\varphi(\omega)| \geqslant x\}$.

<u>Определение 6</u> [3]. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}'$ — два СНП. Линейное отображение $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ называется <u>ограниченным относительно мз</u> $\mathcal{T}$ (или $\mathcal{T}$-ограниченным), если существует вероятностная функция ξ такая, что

$$\|A\varphi\| \leqslant \mathcal{T}(\xi, \|\varphi\|) \qquad (*)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{X}$.

Скажем, что случайная норма пространства $\mathcal{X}$ <u>плотна слева от</u>

$\xi \in \mathbb{B}$, если для любой $\eta \in \mathbb{B}, \eta < \xi$ существует элемент $\varphi \in \mathcal{X}$ такой, что $\eta < \|\varphi\| \leqslant \xi$. Ясно, что это выполняется, если значения случайной нормы покрывают $\mathbb{B}$. Так обстоит дело, например, в СНП всех случайных величин на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега.

Теорема 3. Пусть $(\mathcal{X}, \mu)$ – СНП, случайная норма которого плотна слева от Δ_1 и мз π^T полудистрибутивен относительно μ. Тогда множество $B(\mathcal{X}, \pi^T)$ всех π^T -ограниченных линейных операторов $A: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ можно наделить структурой СНК с законами композиции μ и π^T.

Доказательство. Для π^T -ограниченного оператора $A: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ обозначим через $\mathbb{B}(A)$ множество всех $\xi \in \mathbb{B}$, удовлетворяющих условию $(*)$. Положим $\|A\|(x) = \inf\limits_{y<x} \inf\limits_{\xi \in \mathbb{B}(A)} \xi(y)$.

Используя непрерывность сверху t -функции T нетрудно показать, что операцию $\inf$ можно вносить к аргументам T. Поэтому получим

$$\|A\varphi\|(x) \leqslant \inf_{y<x} \inf_{\xi \in \mathbb{B}(A)} \inf_{0<t<+\infty} T\left(\xi\left(\frac{y}{t}\right), \|\varphi\|(t)\right) = \inf_{0<t<+\infty} T\Big(\inf_{y<x} \inf_{\xi \in \mathbb{B}(A)} \xi\left(\frac{y}{t}\right), \|\varphi\|(t)\Big) = \inf_{0<t<+\infty} T\left(\|A\|\left(\frac{x}{t}\right), \|\varphi\|(t)\right) = \pi^T(\|A\|, \|\varphi\|)(x).$$

Отсюда следует аксиома СН1. Далее в силу линейности оператора A

$$\|\lambda A\varphi\| = \|A(\lambda\varphi)\| \leqslant \pi^T(\|A\|, \|\lambda\varphi\|) = \pi^T(\|A\|, \pi^T(\Delta_{|\lambda|}, \|\varphi\|)) =$$

$$= \pi^T(\pi^T(\Delta_{|\lambda|}, \|A\|), \|\varphi\|) = \pi^T(|\lambda| \circ \|A\|, \|\varphi\|).$$ Значит, верно неравенство $\|\lambda A\| \leqslant |\lambda| \circ \|A\|$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Но тогда $\|A\| = \|\frac{1}{\lambda} \lambda A\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \circ \|\lambda A\|$, т.е. $\|\lambda A\| \geqslant |\lambda| \circ \|A\|$. Это значит, что выполнена аксиома СН2. В силу полудистрибутивности π^T имеем

$$\|(A+B)\varphi\| \leqslant \mu(\|A\varphi\|, \|B\varphi\|) \leqslant \mu(\pi^T(\|A\|, \|\varphi\|), \pi^T(\|B\|, \|\varphi\|)) \leqslant$$

$$\leqslant \pi^T(\mu(\|A\|, \|B\|), \|\varphi\|).$$ Отсюда следует $\|A+B\| \leqslant \mu(\|A\|, \|B\|)$, т.е. справедлива аксиома СН3. Мультипликативное неравенство вытекает из монотонности π^T: $\|AB\varphi\| \leqslant \pi^T(\|A\|, \|B\varphi\|) \leqslant \pi^T(\|A\|, \pi^T(\|B\|, \|\varphi\|)) = \pi^T(\pi^T(\|A\|, \|B\|), \|\varphi\|)$.

Наконец покажем, что для тождественного оператора I будет $\|I\| = \Delta_1$ (тем самым будет выполнено требование в) определения 5). В

В самом деле, так как Δ_1 – нейтральный элемент мз $\mathcal{T}^T$, то $\|I\varphi\| = \|\varphi\| = \mathcal{T}^T(\Delta_1, \|\varphi\|)$ влечет неравенство $\|I\| \leqslant \Delta_1$. Если $\|I\| < \Delta_1$, то в силу плотности слева случайной нормы в Δ_1 существует $\varphi \in \mathcal{X}$ такой, что $\|I\| < \|\varphi\| \leqslant \Delta_1$. Но тогда $\|I\| < \|\varphi\| \leqslant \mathcal{T}^T(\|I\|, \|\varphi\|) \leqslant \mathcal{T}^T(\|I\|, \Delta_1) = \|I\|$. Противоречие. Теорема доказана.

Пусть $(\mathcal{X}, \mu)$ – СНП. Тогда если фт μ непрерывна в Δ, то семейство множеств $U_\varepsilon \equiv \{\varphi \in \mathcal{X} : \ell(\|\varphi\|, \Delta) < \varepsilon\} = \{\varphi \in \mathcal{X} : \|\varphi\|(\varepsilon) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ определяет базис фильтра окрестностей нуля в $\mathcal{X}$ [5]. Эту топологию обозначим $\tau(\mathcal{X})$; она порождает структуру топологического векторного пространства в $\mathcal{X}$. Нам понадобится более сильное условие на фт μ : $\ell(\xi_n, \Delta) \to 0$ влечет $\sup\limits_{\eta \in \mathbb{B}} \ell(\mu(\xi_n, \eta), \eta) \to 0$ (равностепенная непрерывность μ в Δ).

<u>Теорема 4.</u> Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда каждый $\mathcal{T}^T$ – ограниченный оператор непрерывен в топологии $\tau(\mathcal{X})$. Если μ равностепенно непрерывна в Δ и $\mathcal{X}$ полно в топологии $\tau(\mathcal{X})$, то СНК $B(\mathcal{X}, \mathcal{T}^T)$ полно в топологии $\tau(B(\mathcal{X}, \mathcal{T}^T))$.

Доказательство. Прежде всего убедимся, что условие полудистрибутивности мз $\mathcal{T}^T$ относительно μ влечет непрерывность μ в Δ. Действительно, имеем $\mu(\xi, \xi) = \mu(\mathcal{T}^T(\xi, \Delta_1), \mathcal{T}^T(\xi, \Delta_1)) \leqslant \mathcal{T}^T(\xi, \mu(\Delta_1, \Delta_1))$. Так как мз $\mathcal{T}^T$ непрерывен сверху, то $\xi_n \to \Delta$ влечет $\mu(\xi_n, \xi_n) \to \Delta$. Но тогда из $\mu(\xi_n, \eta_n) \leqslant \mu(max(\xi_n, \eta_n), max(\xi_n, \eta_n))$ следует, что $\mu(\xi_n, \eta_n) \to \Delta$ при $\xi_n \to \Delta, \eta_n \to \Delta$. Итак, топология $\tau(\mathcal{X})$ определена.

Пусть $\varphi_n \to \varphi$ в топологии $\tau(\mathcal{X})$. Снова в силу непрерывности $\mathcal{T}^T$ сверху неравенство $\|A\varphi_n - A\varphi\| \leqslant \mathcal{T}^T(\|A\|, \|\varphi_n - \varphi\|)$ влечет $A\varphi_n \to A\varphi$ в топологии $\tau(\mathcal{X})$.

Пусть A_n – фундаментальная последовательность в топологии $\tau(B(\mathcal{X}, \mathcal{T}^T))$. Тогда последовательность $\{A_n\varphi : n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна в $\tau(\mathcal{X})$: $\|A_n\varphi - A_m\varphi\| \leqslant \mathcal{T}^T(\|A_n - A_m\|, \|\varphi\|)$. Обозначим ее предел в $\mathcal{X}$ через $A\varphi \equiv \lim\limits_n A_n\varphi$. Равностепенная непрерывность μ в Δ обеспечивает сходимость норм $\|A\varphi\| = \lim\limits_n \|A_n\varphi\|$, а также сходимость в $\mathbb{B}$ последовательности $\{\|A_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Действительно, используя геометрические свойства метрики Леви, можем написать неравенства

$$\ell(\|A_n\|,\|A_m\|) \leq \max\Big\{\ell(\|A_n\|,\ \mu(\|A_n-A_m\|,\|A_n\|)),$$

$$\ell(\|A_m\|,\ \mu(\|A_n-A_m\|,\|A_m\|))\Big\} \leq \sup_{\eta\in\mathbb{B}} \ell(\eta,\ \mu(\|A_n-A_m\|,\eta)).$$

Отсюда следует, что последовательность случайных норм $\{\|A_n\| : n\in\mathbb{N}\}$ фундаментальна в $\mathbb{B}$. Но $\mathbb{B}$ полно, значит $\|A_n\|$ сходится. Непрерывность сверху мз $\mathcal{T}^{T}$ и неравенство $\|A_n\varphi\| \leq \mathcal{T}^{T}(\|A_n\|,\|\varphi\|)$ влекут $\|A\varphi\| \leq \mathcal{T}^{T}(\lim\limits_{n}\|A_n\|,\|\varphi\|)$. Итак, оператор $A\in B(\mathcal{X},\mathcal{T}^{T})$.

Так как $\|A_n\|$ сходится, то в силу неравенства $\|A_n-A_m\| \leq \mu(\|A_n\|,\|A_m\|)$ множество случайных норм $\{\|A_n-A_m\| : n,m\in\mathbb{N}\}$ ограничено в $\mathbb{B}$. Пусть $\zeta\in\mathbb{B}$ такая, что $\|A_n-A_m\| \leq \zeta$ для всех $n,m\in\mathbb{N}$. Для любого $1>\varepsilon>0$ положим

$$\zeta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x\leq\varepsilon, \\ \varepsilon, & \text{если } \varepsilon < x \leq \varkappa(\zeta)(\varepsilon), \\ \zeta(x), & \text{если } x > \varkappa(\zeta)(\varepsilon). \end{cases}$$

Пусть теперь N такое, что $\|A_n-A_m\|(\varepsilon) < \varepsilon$ для всех $n,m > N$. Тогда для этих же n, m справедлива оценка $\|A_n-A_m\| \leq \zeta_\varepsilon$. Следовательно, $\|A_n\varphi - A_m\varphi\| \leq \mathcal{T}^{T}(\zeta_\varepsilon,\|\varphi\|)$ $(n,m>N)$. Перейдя к пределу в последнем неравенстве при $m\to+\infty$, получим $\|A_n\varphi - A\varphi\| \leq \mathcal{T}^{T}(\zeta_\varepsilon,\|\varphi\|)$. Это означает, что $\|A_n-A\| \leq \zeta_\varepsilon$, или $A_n\to A$ в топологии $\tau(B(\mathcal{X},\mathcal{T}^{T}))$. Теорема доказана.

Литература

1. Шерстнев А.Н. О вероятностном обобщении метрических пространств // Учен.зап. Казан. ун-та. 1964. Вып.124. № 2. С.3 - 11.

2. Шерстнев А.Н. О понятии случайного нормированного пространства // ДАН СССР. 1963. Т.149. № 2. С.280 - 283.

3. Матвейчук М.С. О законе умножения случайных норм // Исследования по прикладной математике. Казань, 1980. Вып.8. С.78 - 84.

4. Матвейчук М.С. О кольцах со случайной нормой // Вероятностные методы и кибернетика. Казань, 1974. № 10. С.43 - 50.

5. М у ш т а р и Д.Х., Ш е р с т н е в А.Н. О способах введения топологии в случайных метрических пространствах // Изв.вузов. Матем. 1966. № 6. С.99 – 108.

6. С у л т а н б е к о в Ф.Ф. Об одном классе функций треугольника в системе аксиом случайных метрических пространств // Изв. вузов. Матем. 1981. № 3. С.60 – 66.

7. С у л т а н б е к о в Ф.Ф. Случайные метрические пространства / Казан. ун-т. – Казань, 1986. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 21.08. 1986, № 5964-В86.

8. С у л т а н б е к о в Ф.Ф. Линейные пространства со случайной нормой / Казан. ун-т. – Казань, 1986. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.08.1986, № 6057-В86.

О.Е.Тихонов

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ПРОСТРАНСТВОМ СОСТОЯНИЙ, И ФУНКЦИЯ ИНФОРМАЦИИ

Введение

Данная работа выполнена в рамках подхода, при котором состояния квантовой системы описываются как элементы некоторого выпуклого множества (см., напр., [9]).

В § 1 вводится банахово пространство V с конусом V^+, базой которого служит множество состояний K. Отметим, что аналогичные конструкции рассматривались в работах многих авторов и большинство результатов этого параграфа являются в той или иной степени известными [13] – [15].

В § 2 для каждого состояния ρ из K мы вводим пространство $\mathcal{L}_\rho$ того же типа, как и рассмотренное в § 1. Заметим, что если в качестве K взять множество нормальных состояний на алгебре Неймана, то базу в пространстве $\mathcal{L}_\rho$ образуют состояния, почти доминируемые [11] состоянием ρ, что показывает существенность отсутствия в § 1 требования замкнутости конуса V^+.

Центральное место в работе занимает § 3. В нем для произволь –