Ю. Л. Ершов, Разрешимость элементарных теорий некоторых классов абелевых групп, *Алгебра и логика. Семинар*, 1963, том 1, номер 6, 37–41

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

том I
выпуск 6 Руководитель А.И. Мальцев 1963 г.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Ю.Л. Ершов

В настоящей заметке показывается разрешимость элементарных теорий некоторых классов абелевых групп, в том числе и разрешимость элементарной теории конечных абелевых групп.

Пусть K — класс моделей некоторой фиксированной сигнатуры.

Положим
$$[K] \overset{df}{=} \bigcap_{\substack{M \supseteq K \\ M \in AC}} M .$$

ТЕОРЕМА I. Пусть $K=\{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_n, \dots\}$, $n=1,2,\dots$ и пусть для каждого $n=1,2,\dots$ модель $\mathfrak{M}_n$ имеет разрешимую теорию, с разрешающим алгоритмом $g_n(x)$ (т.е. $g_n(x)$ — характеристическая функция номеров истинных формул). Если $[K]$ рекурсивно аксиоматизируем и функция $g(n,x) \overset{df}{=} g_n(x)$ рекурсивна, то элементарная теория класса K разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рекурсивной аксиоматизируемости следует рекурсивная перечислимость истинных формул теории класса K. Из рекурсивности функции $g(n,x)$ следует рекурсивная перечислимость множества формул, опровержимых на моделях класса K, так как совокупность их номеров есть все решения уравнения
$$\exists n (g(n,x)=0).$$

СЛЕДСТВИЕ. Если сигнатура класса K конечна, все модели $\mathfrak{M} \in K$ конечны и совокупность их диаграмм рекурсивно перечислима, то из рекурсивной аксиоматизируемости $[K]$ следует разрешимость теории класса K.

Пусть A — класс всех абелевых групп. В дальнейшем K всегда будет обозначать класс абелевых групп, т.е. $K \subseteq A$. Введём обозначения:

$$\sum_f K \overset{df}{=} \{ \sum_{1 \le i \le n} \mathfrak{M}_i \mid \mathfrak{M}_i \in K,\ n = 1, 2, \dots \},$$

$$\sum K \overset{df}{=} \{ \sum_{i \in I} \mathfrak{M}_i \mid \mathfrak{M}_i \in K,\ I \text{ - произвольное множество} \},$$

где $\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{M}_i$ – прямая сумма групп $\mathfrak{M}_i$. Нижеследующая теорема является частным случаем теорем 6.9, 7.9 работы [3].

ТЕОРЕМА A. Если K имеет разрешимую теорию, то $\sum_f K$ и $\sum K$ также имеют разрешимые теории.

Везде ниже p и q будут обозначать простые числа, n – натуральные.

ТЕОРЕМА 2. Теория класса K_p циклических p-групп разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию к теореме I для доказательства достаточно указать рекурсивную систему аксиом для $[K_p]$. Укажем такую систему аксиом. (При записи аксиом будут использоваться понятные сокращения).

0. $\mathfrak{A}_0$ – Аксиома абелевых групп.

I. $\mathfrak{A}^1_q \overset{df}{\Longleftrightarrow} \forall x\, (x \neq 0 \to qx \neq 0)$ для $q \neq p$.

2. $\mathfrak{A}^2_p \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists x_1 x_2 \dots x_{p-1} \Big[\mathop{\&}\limits_{i=1}^{p-1} (x_i \neq 0 \,\&\, px_i = 0) \,\&\, \forall y\, (y \neq 0 \,\&\, py = 0 \to \bigvee\limits_{i=1}^{p-1} y = x_i) \Big]$.

3. $\mathfrak{A}^3_{p,n} \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists x_1 x_2 \dots x_{p^n} (\mathop{\&}\limits_{i \neq j} x_i \neq x_j) \to \exists y\, (p^{n-1} y \neq 0 \,\&\, p^n y = 0)$

для всех n.

4. $\mathfrak{A}^4_q \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \exists y\, (x = qy)$ для $q \neq p$.

5. $\mathfrak{A}^5_p \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists x_1 \dots x_{p-1} \Big\{ \Big[\mathop{\&}\limits_{i=1}^{p-1} \forall y (x_i \neq py) \Big] \,\&\, \Big[\forall z (\forall u (z \neq pu) \to$
$\to \bigvee\limits_{i=1}^{p-1} \exists v\, (x_i + z = pv)) \Big] \Big\}$.

Покажем, что эта система аксиом является системой аксиом для $[K_p]$. Очевидно, что все эти аксиомы справедливы для любой модели из K_p.

Рассмотрим произвольную абелеву группу G, удовлетворяющую данной системе аксиом. Возможны два случая:

а) G – конечная группа. По аксиомам $\mathfrak{A}^1_q$ G является p-группой, т.е. имеет порядок p^n, для некоторого n. Тогда по аксиоме $\mathfrak{A}^3_{p,n}$ она содержит элемент порядка p^n, следовательно, G – циклическая p-группа, т.е. $G \in K_p \subset [K_p]$.

б) G – бесконечная группа. По аксиомам $\mathfrak{A}^1_q$, $\mathfrak{A}^2_p$ и $\mathfrak{A}^3_{p,n}$ G содержит единственную подгруппу P типа p^∞, которая является максимальной периодической подгруппой G. Имеем $G = P + G'$, где G' – группа без кручения. По аксиомам $\mathfrak{A}^4_q$, $\mathfrak{A}^5_p$ и, учитывая то, что G' без кручения и является прямым слагаемым G, видим, что (см.[I]) $\rho(p^n, G') = 1$ для всех n, $r(p^n, G') = s(p^n, G') = 0$ для всех n. Отсюда (см.[I]) следует, что любые две бесконечные группы G и $\widetilde{G}$, удовлетворяющие указанной системе аксиом, арифметически эквивалентны. Так как $[K_p]$ содержит бесконечные модели, то утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 3. Теория класса K_π примарных циклических групп разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, достаточно указать рекурсивную систему аксиом для $[K_\pi]$.

Пусть $\mathcal{L}_p \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists x\, (x \neq 0 \;\&\; px = 0)$.

Тогда системой аксиом для $[K_p]$ будет:

0. $\mathfrak{A}_0$,

1. $\mathcal{L}_p \to \mathfrak{A}^1_q$ для всех p и q таких, что $p \neq q$,

2. $\mathcal{L}_p \to \mathfrak{A}^2_p$ для всех p,

3. $\mathcal{L}_p \to \mathfrak{A}^3_{p,n}$ для всех p и n,

4. $\mathcal{L}_p \to \mathfrak{A}^4_q$ для всех p и q таких, что $p \neq q$,

5. $\mathcal{L}_p \to \mathfrak{A}^5_p$ для всех p,

6. $\mathcal{L}_p \overset{df}{\Longleftrightarrow} \forall x (x \neq 0 \to px \neq 0) \to \forall x \exists y (x = py)$ для всех p.

Понятно, что все эти аксиомы выполняются на всех моделях из K_π. Покажем, что они являются системой аксиом для $[K_\pi]$.

Пусть G - абелева группа, удовлетворяющая всем аксиомам. Возможны два случая:

а) G - конечна. Тогда для некоторого p, $\mathcal{L}_p$ будет истинна на G, тогда на G будет истинна система аксиом, указанная в теореме 2. Следовательно, G - циклическая p -группа.

б) G - бесконечна. Тогда, если для некоторого p $\mathcal{L}_p$ истинна на G, то, как в теореме 2, $G \in [K_p] \subset [K_n]$. Если же все $\mathcal{L}_p$ ложны на G, то G - группа без кручения. Кроме того, она будет полной, по аксиомам $\mathcal{L}_p$. Легко показать (см., например,[4]), что полные группы без кручения принадлежат $[K_\pi]$. Утверждение доказано.

Из теоремы A и теорем 2,3 следует

ТЕОРЕМА 4. Элементарные теории класса конечных p -групп $\sum_f K_p$ и класса всех конечных абелевых групп $\sum_f K_\pi$ разрешимы.

Используя критерий арифметической эквивалентности двух абелевых групп [1,2], можно показать, что любая редуцированная p -группа арифметически эквивалентна некоторой прямой сумме (конечной или бесконечной) циклических p -групп. Тогда из теоремы A, теорем 2,3 следует

ТЕОРЕМА 5. Элементарные теории класса редуцированных p - групп R_p и класса р е д у ц и р о в а н н ы х п е р и о д и ч е с к и х г р у п п R р а з р е ш и м ы.

Действительно, $[\sum K_p]=[R_p]$ и $[\sum K_\pi]=[R]$.

ТЕОРЕМА 6. Э л е м е н т а р н а я т е о р и я к в а з и ц и к л и ч е с к о й p -г р у п п ы P р а з р е ш и м а.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем рекурсивную систему аксиом для элементарной теории группы P. Тогда из полноты этой теории и будет следовать ее разрешимость.

Система аксиом:

0. $\mathfrak{A}_0$,
1. $\mathfrak{A}_q^1$ для всех $q \neq p$,
2. $\mathfrak{A}_p^2$,
3. $\forall x \exists y (x = ny)$ для всех n.

Все эти аксиомы выполняются на P. Кроме того, эта система аксиом полна, так как любые две модели, на которых выполняются все аксиомы этой системы, имеющие одинаковую несчетную мощность, изоморфны. Действительно, любая такая модель G будет полной группой, которая разлагается в прямую сумму $G=P+G'$, где G' - полная группа без кручения, а любые две несчетные полные группы без кручения одинаковой мощности изоморфны.

ТЕОРЕМА 7. Э л е м е н т а р н а я т е о р и я к л а с с а к в а з и ц и к л и ч е с к и х г р у п п K_K р а з р е ш и м а.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $K_K=\{P_1,P_2,\dots\}$, где P_i -квазициклическая p_i -группа, где $p_1=2, p_2=3, \dots, p_i$ - i ое -простое число. Нетрудно видеть, что к классу K_K можно применять теорему I, потому что существует эффективный метод вычисления функции $g(n,x)$.

Укажем теперь систему аксиом для класса $[K_K]$:

0. $\mathfrak{A}_0$,
1. $\mathfrak{L}_p \to \mathfrak{A}_q^1$ для всех p и q таких, что $p \neq q$,
2. $\mathfrak{L}_p \to \mathfrak{A}_p^2$ для всех p,
3. $\forall x \exists y (x = ny)$ для всех n.

Все аксиомы выполняются на моделях класса K_K. Пусть G удовлетворяет всем указанным аксиомам, тогда G -полная группа. Возможны два случая:

а) G - с кручением, тогда существует такое p_i, что $\mathfrak{L}_{p_i}$ истинна на G; тогда на G выполняется система аксиом, указанная в теореме 6, и, следовательно, G арифметически эквивалентна P_i, отсюда $G \in [K_K]$.

б) G - без кручения. Известно, что все полные абелевы группы без кручения арифметически эквивалентны между собой. Так как $[K_\kappa]$ аксиоматизируемый класс, то он замкнут относительно ультрапроизведений моделей из $[K_\kappa]$ (см. 4). Пусть $\omega=\{1,2,\ldots\}$, D - некоторый **неглавный** ультрафильтр на ω . Возьмем $\widetilde{P}=\prod_{i\in\omega} P_i/D\in[K_\kappa]$, рассуждениями, аналогичными рассуждениям в [4], показывается,что $\widetilde{P}$ -полная группа без кручения, отсюда следует, что $G\in[K_\kappa]$. Доказательство теоремы закончено.

Из теоремы A , теорем 6,7 следует

ТЕОРЕМА 8. Элементарные теории класса полных p -групп $\sum\{P\}$ и класса полных групп $\sum[K_\kappa]$ разрешимы.

Если классы моделей K и L одинаковой сигнатуры имеют **разрешимые теории, то и** класс $K\cup L$ **также имеет** разрешимую теорию. **Следовательно, классы** $K_p\cup\{P\}$ и $K_\pi\cup K_\kappa$ имеют разрешимые **теории. Из теоремы** A следует

ТЕОРЕМА 9. Элементарные теории класса периодических p -групп $\overline{K}_p$ и класса всех периодических групп Π разрешимы.

Действительно, $[\sum(K_p\cup\{P\})]=[\sum(\sum K_p\cup\sum\{P\})]=$

$$=[\sum([\sum K_p]\cup\sum\{P\})]=[\sum([R_p]\cup\sum\{P\})]=$$

$$=[\sum(R_p\cup\sum\{P\})]$$ и, аналогично, $$[\sum(K_\pi\cup K_\kappa)]=$$

$$=[\sum(R\cup\sum K_\kappa)].$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть из соответствующих доказательств,что, если M -рекурсивное подмножество множества всех простых чисел и если называть периодическую абелеву группу M -группой, в том случае, когда порядок любого элемента этой группы не имеет простого делителя, не входящего в M , то в формулировках теорем 3,4, 5,7,8,9 можно заменить утверждения о группах **утверждениями** о M -группах с сохранением истинности этих теорем.

Автор благодарен М.И.Каргаполову за указание на ряд неточностей в первоначальном изложении.

Поступила в редакцию
25.XII.1962г.

Литература

I. Каргаполов М.И. Об элементарной теории абелевых групп. Алгебра и логика. 1963. I. № 6.

2. Szmielew W. Elementary properties of abelian groups,- Fund.Math,1955,41,203-271.

3. Feferman,Vought.The first order properties of products of algebraic systems,-Fund.Math,1959,47,57-103.

4. Kochen S. Ultraproducts in the theory of models.- Annals of Math.1961,74,2,221-261.