АЛГОРИТМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕ-СГЛАЖИВАЮЩИХ НЕРЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША-АДАМАРА

И.И. Исмагилов, А.П. Ефремов

При решении ряда задач цифровой обработки сигналов (ЦОС) эффективное применение находят дифференцирующе-сглаживающие цифровые фильтры (ДСЦФ). Среди таких задач отметим следующие – дифференцирование, экстраполяция и выделение признаков для целей классификации и распознавания. Обычно они реализуются в виде нерекурсивных фильтров с использованием классического алгоритма дискретной свёртки. Имеются также алгоритмы реализации ДСЦФ на основе дискретных преобразований Уолша, которые характеризуются низкой мультипликативной сложностью и эффективно реализуются аппаратным способом [1].

В практике обработки сигналов часто используются ДСЦФ первого порядка (ДСЦФ-1). Одним из эффективных применений ДСЦФ-1 является вычисление преобразования скользящих аппроксимаций (ПСА), которое находит применение при решении некоторых задач ЦОС, например, в задачах обработки временных рядов [2]. ПСА цифрового сигнала (ЦС) – это последовательность угловых коэффициентов (локальных трендов) линейных аппроксимаций сигнала в скользящем окне длины N. Анализ показывает, что в сущности ПСА представляет результат фильтрации исходного ЦС банком ДСЦФ-1, где фильтры различаются размерностью импульсных характеристик.

Реализация банка ДСЦФ-1 для ПСА при использовании классического алгоритма вычисления дискретной свёртки требует значительных вычислительных затрат. В связи с этим в работе предлагаются алгоритмы вычисления ПСА с использованием усечённого дискретного преобразования Уолша-Адамара в режиме скользящего окна.

Применение преобразования Уолша-Адамара при реализации ДСЦФ-1 становится целесообразным благодаря тому, что базисные функции принимают только значения ± 1 и для вычисления спектра в данном базисе существуют быстрые алгоритмы, в которых отсутствуют операции умножения [1]. В этом случае вычисление ненормированных отсчётов ДСЦФ-1 проводится с помощью уравнения спектральной свёртки следующего вида:

$$a_i = \sum_{\mu=0}^{n-1} F_{2^\mu}(i) 2^\mu, \quad i = \overline{0, M-N},$$

где $F_{2^\mu}(i)$ – 2^μ-й спектральный коэффициент i-го подвектора ЦС, формируемого при соответствующем положении скользящего окна:

$$F_{2^\mu}(i) = \sum_{j=0}^{N-1} f_{(i+j)} had_N(2^\mu, j),$$

$\mathbf{f}_i = \{f_{(i+j)}\}_{j=0}^{N-1}$ – i-й подвектор ЦС; $had_N(k, j)$ – k-я дискретная функция Уолша-Адамара размерности $N = 2^n$.

Из представленного уравнения спектральной свёртки видно, что оно включает лишь группу спектральных коэффициентов первого дифференциального порядка [3]. Поэтому целесообразно провести их нумерацию в пределах соответствующей группы спектральных коэффициентов. С учётом этого уравнение спектральной свёртки можно записать так:

$$a_i = \sum_{\mu=0}^{n-1} C_{\mu+1}(i) 2^\mu, \quad i = \overline{0, M-N},$$

где $C_{\mu+1}(i) = F_{2^\mu}(i)$.

В соответствии с терминологией, введённой в [3], величина a_i – это спектрально-свёрточный представитель (ССП) Уолша-Адамара первого дифференциального порядка размерности N. Отметим, что дифференциальный порядок дискретной функции Уолша-Адамара равен его рангу [1].

Алгоритмы ДСЦФ-1 характеризуются следующими вычислительными затратами:

– классический алгоритм (А1): $Ad = N - 1$, $Mu = N$;

– спектральный алгоритм (А2 – быстрое вычисление спектра Уолша-Адамара не выше первого ранга): $Ad = 3(N-1) - n$, $Sh_2 = n - 1$.

Следует отметить, что резкого снижения затрат на вычисление спектра Уолша-Адамара можно достичь за счёт использования быстрых алгоритмов вычисления скользящего спектра. Так как при сдвиге выборки на один шаг основной объём данных сохраняется, это обстоятельство позволяет эффективно использовать скользящие быстрые преобразования Уолша-Адамара (БПУА) при анализе спектра в ДСЦФ. Для вычисления отсчётов ДСЦФ на основе скользящего полноразмерного БПУА при предельной глубине прореживания потребуется $2(N-1)$ операций сложения, $n-1$ операций двоичного сдвига, а требуемый для хранения объём данных составит $(n-1)N/2$ [1].

При реализации ДСЦФ-1 требуется вычисление только спектральных составляющих не более первого ранга, поэтому сигнальные графы скользящих БПУА для ДСЦФ-1 будут иметь более усечённый характер по сравнению с графами полных скользящих БПУА. За счёт этого получается дополнительная экономия объёма вычислительных операций при анализе спектра Уолша, которая тем больше, чем больше N. В этом случае алгоритм характеризуется следующими вычислительными затратами: $Ad=(n+3)n/2-1$, $Sh_2=n-1$. При этом объём необходимых для хранения данных составит $(n+1)n/2$. Количество необходимых операций сложения при скользящем и усечённом скользящем БПУА приведены в табл. 1.

Таблица 1

Алгоритм	Количество отсчётов					
	4	8	16	32	64	128
	Add	Add	Add	Add	Add	Add
Скользящее БПУ (полноразмерное)	7	16	33	66	131	260
Усечённое скользящее БПУ (не выше первого ранга)	5	10	16	23	31	40

Из полученных результатов видно, что использование ПСА, рассчитываемого с помощью уравнения ДСЦФ первого порядка, реализованного с использованием усечённого БПУА в режиме скользящего окна, позволяет не только устранить ресурсоёмкие операции умножения, но значительно сократить количество операций сложения.

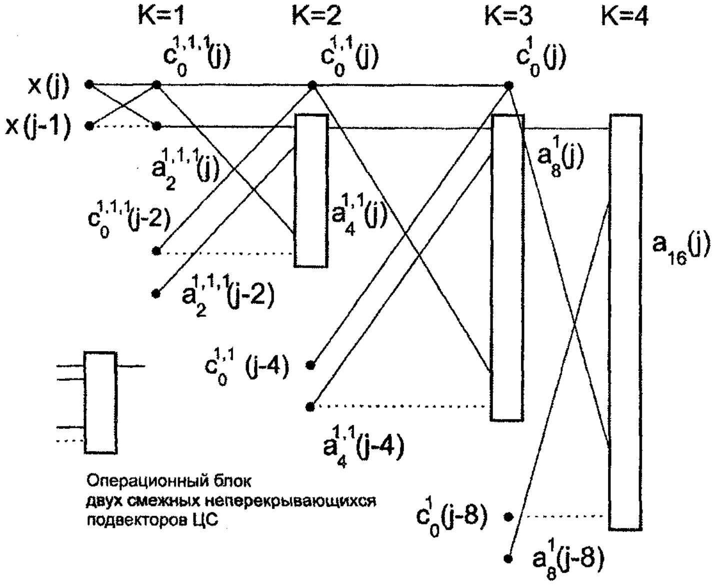

Рис. 1. Граф вычисления ССП

Дополнительная возможность в сокращении вычислительных операций может быть получена, если обратить внимание на то, что искомый ССП j-го шага может быть вычислен через ССП предыдущего шага. В этом случае граф вычисления искомого ССП в режиме усечённого скользящего окна при $N = 16$ представлен на рис. 1.

Структура операционного блока k-го шага вычисления ССП представлена на рис. 2.

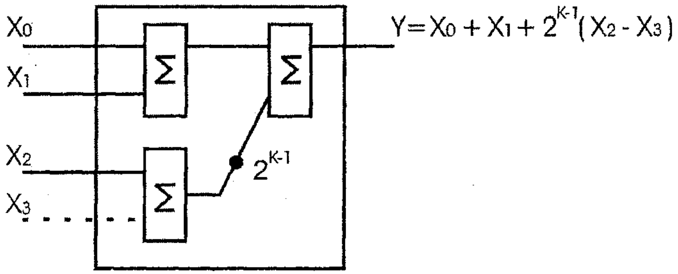

Рис. 2. Структура операционного блока

Аналитически выявленная зависимость выражается следующим образом. Связь промежуточных спектров двух непересекающихся подвекторов ЦС с искомым спектром выражается уравнениями:

$$C_k(j) = C_k^1(j) + C_k^2(j), \ \ k = \overline{1, n-1},$$
$$C_n(j) = C_0^1(j) - C_0^2(j).$$

Распишем уравнение расчёта ССП через связь искомого спектра с промежуточными спектрами:

$$a_{2^k}(j) = C_1^1(j) + C_1^2(j) + 2C_2^1(j) + 2C_2^2(j) + \ldots$$
$$+ 2^{k-2}C_{k-1}^1(j) + 2^{k-2}C_{k-1}^2(j) + 2^{k-1}(C_0^1(j) - C_0^2(j)).$$

Если сгруппировать соответствующие члены и учесть особенности скользящего режима, то получаем

$$a_{2^k}(j) = a_{2^{k-1}}(j) + a_{2^{k-1}}(j - \frac{N}{2}) + 2^{k-1}(C_0(j) - C_0(j - \frac{N}{2})).$$

Организация вычислений по полученной формуле (алгоритм А3) приводит к уменьшению количества операций сложения, а также к сокращению объёма памяти, необходимой для хранения промежуточных результатов. Действительно, если в усечённом графе в режиме скользящего окна размерности $L = 2^l$, $l = \overline{1, l_{\max}}$, на каждом шаге вычислительные затраты составляли $Ad = l - 1$, $Sh_2 = l - 1$, то предлагаемый алгоритм характеризуется следующими вычислительными затратами: $Ad = 4$, $Sh_2 = 1$.

Немаловажное преимущество данный алгоритм имеет непосредственно при анализе свойств ЦС через ПСА, так как позволяет вычислить угловые коэффициенты ЦС за один проход при выборе длин скользящих окон из множества $\{2,4,8,...,2^k\}$, где k – натуральное число, определяющее максимальную длину окна. В предлагаемом алгоритме количество операций сложения сокращается до $4(k-1)+1$, количество операций двоичного сдвига до $k-1$, а объём необходимых для хранения данных составит $2(k-1)+1$.

В табл. 2 для сравнения приводятся вычислительные затраты для алгоритмов A1, A2, A3 при различном количестве отсчётов ЦС в окне. При этом учтено, что операция двоичного сдвига эквивалентна сложению.

Таблица 2

Алгоритм	Количество отсчётов											
	4		8		16		32		64		128	
	Add	Mu	Add	Mu	Add	Mu	Add	Mu	Add	Mu	Add	Mu
A1	3	4	7	8	15	16	31	32	63	64	127	128
A2	8		20		44		92		188		380	
A3	6		11		16		21		26		31	

Анализ данных табл. 2 показывает, что предлагаемый алгоритм характеризуется высокой вычислительной эффективностью. Отметим также, что алгоритм имеет регулярную структуру, что позволяет значительно упростить его аппаратную реализацию.

Полученные результаты позволяют рекомендовать предложенный алгоритм вычисления ПСА для программной реализации в относительно недорогих специализированных вычислительных устройствах обработки сигналов с невысокой вычислительной производительностью процессорных блоков.

Литература

1. Проектирование специализированных информационно-вычислительных систем / Смирнов Ю.М., Воробьев Г.Н., Потапов Е.С.,Сюзев В.В.: Под. ред. Ю.М.Смирнова. – М.: Высшая школа, 1984.

2. Батыршин И.З., Шереметов Л.Б., Панова А.М., Климова А.С.. Преобразование скользящих аппроксимаций и ассоциативные сети в сравнительном анализе статистических рядов динамики // Исследования по информатике. Вып.11. – Казань: Отечество, 2007. – С.35-48.

3. Исмагилов И.И. Дискретные преобразования в базисах уолше-подобных функций: Основы теории и применения в цифровой обработке сигналов. – Казань: Отечество, 2003.