А. Ф. Вакуленко, Один признак отсутствия сингулярного непрерывного спектра в модели Фридрихса, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 127, 3–6

А.Ф.Вакуленко

ОДИН ПРИЗНАК ОТСУТСТВИЯ СИНГУЛЯРНОГО НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА В МОДЕЛИ ФРИДРИХСА. II

В этой работе мы продолжим исследование спектра модели Фридрихса, начатое в [I]. Введем следующие обозначения. Пусть $\theta > 1$, $0 < \mu < 1$. Обозначим через $B_{\theta,\mu}(R^n)$ пространство функций, для которых имеются следующие оценки

$$|f(p)| \leq c(1+|p|)^{-\theta},$$

$$|f(p+k) - f(p)| \leq c(1+|p|)^{-\theta}|k|^{\mu}, \quad |k| \leq 1 .$$

Через $B_{\theta,\mu}$ обозначим класс матричных интегральных операторов в $L_2(R,C^2)$, ядра которых лежат в $\mathcal{B}_{\theta,\mu}(R^2)$. Зафиксируем вещественное число $\varkappa \neq 0$. Определим в $L_2(R,C^2)$ самосопряженный оператор h_0 – умножение на функцию

$$p \longmapsto \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \varkappa p \end{pmatrix} . \qquad (I)$$

Пусть V – симметричный оператор из $B_{\theta,\mu}$. Положим $h = h_0 + V$ Если возмущение V достаточно гладкое ($\mu > \frac{1}{2}$), то спектр h состоит из абсолютно-непрерывной части и конечного числа собственных значений конечной кратности. Если $\mu < \frac{1}{2}$, то это, вообще говоря, не так. Пусть G_τ – группа сдвигов. Потребуем, чтобы отображение $R \longrightarrow B_{\theta,\mu}$

$$\tau \longmapsto G_\tau V G_\tau^{-1} \qquad (2)$$

удовлетворяло условию Гельдера с показателем $\alpha > \frac{1}{2}$.

ТЕОРЕМА I. Спектр оператора h состоит из абсолютно-непрерывной части и конечного числа собственных значений конечной кратности.

В случае, когда параметр $\varkappa$ в (I) положителен, теорема I доказана в [I]. Там же обсуждалась связь нашего подхода с методом *analytic dilation* 2,3. Теперь нам стали известны работы Мурра [4,5], метод которого позволяет доказать теорему I при условии дифференцируемости отображения (2). Если $\varkappa < 0$, то указанные методы непосредственно не применимы, даже в аналитическом случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Будем считать, что $\varkappa = -1$, а отображение (2) аналитично. Переход к общему случаю совершается так же как в [I]. Пусть сначала возмущение V мало. Тогда h и h_0

унитарно эквивалентны, причем унитарную эквивалентность осуществляет, например, волновой оператор. Мы однако будем использовать иные сплетающие операторы: $U^{\uparrow}$ и $U^{\downarrow}$. Их основное свойство состоит в следующем: отображение

$$\tau \longmapsto G_\tau U^{\uparrow(\downarrow)} G_\tau^{-1}$$

аналитически продолжимо в некоторую окрестность вещественной оси в верхней (нижней) комплексной полуплоскости. Эти операторы обратимы, но не унитарны. Их следует считать аналогами сплетающих операторов в версии обратной задачи, основанной на уравнении Марченко. Справедливо следующее равенство

$$U^{\uparrow} S = U^{\downarrow}$$

где S – оператор коммутирующий с h_0. Он имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} I + S_{11} & S_{12} Q \\ S_{21} Q & I + S_{22} \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Здесь Q – оператор отражения, $S_{k\ell}$ – оператор умножения на функцию $s_{k\ell}$ из $\mathfrak{B}_{\theta,\mu}(R)$, норма которой мала. Используя это обстоятельство, оператор S можно факторизовать следующим образом

$$S S^{\downarrow} = S^{\uparrow}$$

Операторы $S^{\uparrow}$ и $S^{\downarrow}$ имеют структуру (3), соответствующие им функции $s_{k\ell}^{\uparrow(\downarrow)}$ аналитически продолжимы в верхнюю (нижнюю) полуплоскость. Определим оператор U следующим образом

$$U = U^{\uparrow} S^{\uparrow} = U^{\downarrow} S^{\downarrow}$$

Непосредственно видно, что U переводит множество аналитических в окрестности вещественной оси функций в себя. Этот оператор следует считать аналогом сплетающего оператора в версии Гельфанда-Левитана обратной задачи. На существование подобного сплетающего оператора для трехмерного оператора Шредингера указано в работе [6]. Далее можно подобрать положительный оператор P вида (3) такой, что оператор $W = UP$ будет унитарным. Проведенное построение используем следующим образом. Пусть V произвольно. Представим его в виде $V_1 + V_2$, где V_1 мало, а V_2 – оператор конечного ранга, ядро которого построено из аналитических в окрестности вещественной оси функций φ. Для $h_0 + V_1$ существует сплетающий оператор W. Совершим унитарное преобразование

$$W^* h W = h_0 + W^* V_2 W .$$

Таким образом мы получим модель Фридрихса с возмущением конечного ранга. Ядро возмущения построено из функций $\psi = W^*\varphi$, принадлежащих только $\mathcal{B}_{\theta,\mu}(R)$, т.е. обладающих малой гладкостью. Заметим однако, что $\psi = P^{-1}\tilde{\varphi}$, где $\tilde{\varphi} = U^{-1}\varphi$ аналитична. Перейдем в спектральное представление для h_0. Это достигается отражением во второй компоненте векторов из $L_2(R, C^2)$. Оператор P^{-1} станет умножением на положительную функцию. Так, что если в этом представлении ψ обращается в нуль, в точке λ_0, то $\tilde{\varphi}(\lambda_0) = 0$. Но φ аналитична, поэтому имеем оценку

$$|\psi(\lambda)| \leq c|\lambda - \lambda_0| \ .$$

Из этой оценки вытекает, что определитель возмущения имеет изолированные нули. Теорема доказана.

Мы хотим сопоставить приведенные соображения с методами работ [2 - 5] в следующем контексте. Пусть имеется самосопряженный оператор H и однопараметрическая группа унитарных операторов G_τ такие, что оператор $H^\tau = G_\tau H G_\tau^{-1}$ аналитичен по τ. Можно ли сделать какие-нибудь заключения о спектре оператора H. В цитированных работах в качестве H расматривается оператор Шредингера системы нескольких квантовых частиц, в качестве G_τ - группа растяжений. Доказано, что H не имеет сингулярного непрерывного спектра (в [4 - 5] вместо аналитичности требуется дифференцируемость). Требование аналитичности или дифференцируемости накладывает ограничения только на взаимодействия в системе, поскольку оператор кинетической энергии аналитичен относительно растяжений. Однако в этой ситуации принципиальную роль играет следующее обстоятельство: при $\mathrm{Im}\,\tau \neq 0$ существенный спектр H^τ сдвигается (по крайней мере локально) в верхнюю или нижнюю полуплоскость. В других случаях существенный спектр H^τ может вести себя иначе, и указанные методы непосредственно не применимы. Именно так дело обстоит в нашем примере: при $\mathrm{Im}\,\tau \neq 0$ спектр H^τ расщепляется на две прямые, одна из которых сползает в нижнюю полуплоскость, другая - в верхнюю.

В обратной задаче рассеяния (см. [7]) для дифференциального оператора H фундаментальную роль принадлежит естественной группе G_τ. Для обыкновенного дифференциального оператора это группа умножений на $e^{i\tau x}$. В заключение мы укажем случаи, когда действуют методы работ [2 - 5]. Пусть $H = P(i\frac{d}{dx}) + Q(x, i\frac{d}{dx})$, где P - вещественный полином, Q - дифференциальный оператор с убывающими коэффициентами, порядок которого меньше чем степень P. Тогда, если $P' \geqslant 0$, то у H нет сингулярного непрерывного спектра, а собственные значения могут накапливаться только к нулям P'. Если дополнительно $Q(x, i\frac{d}{dx}) \equiv v(x)$, то собственных значений нет вообще. Это видно из следующего тождества (см. [5]). Если ψ – собственная функция H, то

$$0 = (i[H, x]\psi, \psi) = (P'(i\tfrac{d}{dx})\psi, \psi) > 0 .$$

Литература

1. В а к у л е н к о А.Ф. Один признак отсутствия сингулярного непрерывного спектра в модели Фридрихса. – Зап.науч.семин. ЛОМИ, 1982, т.115, с.61–71.
2. A g u i l a r F., C o m b e s I.M. On a class of analytic perturbations of one-body Schrödinger operator. – Comm. Math.Phys., 1971, v.22, p.269–279.
3. B a l s l e v E., C o m b e s I.M. Spectral properties of many-body Schrödinger operator with dilation-analytic interactions. – Comm.Math.Phys., 1971, v.22, p.280–294.
4. M o u r r e E. Principe d'absorbtion limité dans le probleme à trois corps en mecanique quantique. – Preprint, Centre de Ph.Th., CNRS, France, 1978, p.1–26.
5. M o u r r e E. Absence of Singular Continuous Spectrum for Certain Self-Adjoint Operators. – Comm.Math.Phys., 1981, v.78, p.391–408.
6. N e w t o n R. Inverse scattering. II. Three dimensions. – Journal of Math.Phys., 1980, v.21, p.1698–1715.
7. Ф а д д е е в Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния.II. – Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. 1974, т.3, с.93–180.

Vakulenko A.F. On a condition of the absence of a singular continuous spectrum for the Friedrichs model.

An extension of the analytic dilation or the Mourre commutators methods is proposed. We consider two self-adjoints operators $H = H_0 + V$ and A. Assuming some smoothness properties of V and $[V, A]$ we prove the absence of singular continuous spectrum of H. No positivity of $[H_0, V]$ is required.