Доклады Академии наук СССР
1957. Том 114, № 5

ФИЗИКА

А. Г. КУЛИКОВСКИЙ

К ВОПРОСУ О ПУЛЬСАЦИИ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 22 I 1957)

Задача о пульсации плазменного шнура поставлена в связи с экспериментальными исследованиями искры большой силы тока в газе ([1]). Приближенное решение этой задачи дано М. А. Леонтовичем и С. М. Осовцом ([2]). Здесь предлагается некоторый класс точных решений уравнений магнитной гидродинамики, содержащий, в частности, периодические решения.

Рассмотрим одномерные осесимметрические движения безграничного газа с бесконечной проводимостью. Известные уравнения магнитной гидродинамики в лагранжевых координатах записываются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial H^2}{\partial r} + \frac{1}{4\pi}\frac{H^2}{r}\right);$$

$$\rho = \rho_0 \frac{r_0}{r}\frac{\partial r_0}{\partial r}; \quad p = p_0 \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma}; \quad H = H_0 \frac{\partial r_0}{\partial r}. \tag{1}$$

Здесь r — текущая координата частицы; r_0, ρ_0, p_0, H_0 — соответственно, координата, плотность, давление и магнитная напряженность частицы, при $t = 0$, причем магнитные силовые линии предполагаются замкнутыми концентрическими окружностями.

Первое уравнение выражает ускорение частицы, второе, третье и четвертое представляют законы сохранения массы, энтропии и магнитного потока. В работе найдены все решения с однородной деформацией, т. е. такие, что

$$\frac{r}{r_0} = \mu(t), \tag{2}$$

где μ не зависит от r_0. При этом

$$v = \frac{\partial r}{\partial t} = r_0\mu'(t) = r\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}, \tag{3}$$

т. е. скорость линейно зависит от радиуса. Эти решения аналогичны решению, полученному Л. И. Седовым ([3], [4]) при отсутствии магнитных сил, которое содержит, так же как и предлагаемое решение, одну произвольную функцию.

Решение дается формулами:

$$\rho = \rho_0\mu^{-2}; \tag{4}$$

$$p = p_0\mu^{-2\gamma}; \tag{5}$$

$$H^2 = H_0^2\mu^{-2}, \tag{6}$$

где ρ_0 — произвольная функция r_0;

$$p_0 = A \int_0^{r_0} \rho_0 r_0 dr_0 + N; \tag{7}$$

$$H_0^2 = \frac{8\pi B}{r_0^2} \int_0^{r_0} \rho_0 r_0^3 dr_0 + \frac{M}{r_0^2}. \tag{8}$$

Здесь A, B, N и M — произвольные постоянные. Полагая $r_0 = 0$, получим, что $N \geqslant 0$ и $M \geqslant 0$. Знак A совпадает со знаком dp_0/dr_0. Знак B совпадает со знаком первого слагаемого формулы (8). Из уравнения Максвелла

$$\frac{4\pi}{c} j = \operatorname{rot} H \tag{9}$$

находим, что при $t = 0$ по оси симметрии течет концентрированный ток $i_0 = \pm \frac{c}{2} \sqrt{M}$, и, кроме того, во всех остальных точках пространства имеется распределенный ток с плотностью

$$j_0 = \pm \frac{c}{8\pi} \frac{B\varphi'(r_0)}{\sqrt{M + B\varphi(r_0)}}, \quad \text{где } \varphi(r_0) = 8\pi \int_0^{r_0} \rho_0 r_0^3 dr_0.$$

Таким образом, если $B > 0$, то распределенный ток совпадает по направлению с концентрированным током по оси симметрии; если $B < 0$, то эти токи противоположны. Если же $M = 0$, т. е. концентрированного тока нет, то B должно быть обязательно положительным.

Для $\mu(t)$ получается дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = \frac{A}{\gamma - 1} \mu^{2-2\gamma} - 2B \ln \mu + C = f(\mu) \tag{10}$$

(C — произвольная постоянная), откуда

$$t = \pm \int \frac{d\mu}{\sqrt{f(\mu)}}.$$

Возможны следующие случаи:

1) $A > 0$, $B > 0$. Если $d\mu/dt < 0$ при $t = 0$, то μ становится равной нулю через конечное время, происходит схлопывание, сжатие газа в точку. Если же $d\mu/dt > 0$, то μ сначала достигает своего максимального значения, а затем происходит точно такое же схлопывание. Можно считать, что в момент схлопывания скорость меняется скачком и снова происходит расширение.

2) $A < 0$, $B < 0$. Если $d\mu/dt > 0$ при $t = 0$, то происходит разлет: μ возрастает до бесконечности при $t \to \infty$. При этом скорость $d\mu/dt \to \infty$. Если же $d\mu/dt < 0$ при $t = 0$, то μ сначала достигает своего минимального значения, а затем уже происходит разлет.

3) $A > 0$, $B < 0$. Возможны следующие подслучаи:

а) $f(\mu)$ не имеет корней. Тогда, если $d\mu/dt > 0$ при $t = 0$, то происходит разлет, а если $d\mu/dt < 0$ при $t = 0$, то происходит схлопывание.

б) $f(\mu)$ имеет один двойной корень μ_0. Тогда возможны лимитационные движения $\mu \to \mu_0$ при $t \to \infty$. В противном случае будет разлет или схлопывание, в зависимости от знака $\mu_0 - 1$. Если же $\mu_0 = 1$, то это положение неустойчивого равновесия.

в) $f(\mu)$ имеет два корня, причем 1 не может лежать между ними. Если $1 \leqslant \mu_1 < \mu_2$, то движение получается качественно такое же, как в случае 1). Если же $\mu_1 < \mu_2 \leqslant 1$, то движение происходит аналогично случаю 2).

4) $A < 0$, $B > 0$. При этом существуют либо два корня $\mu_1 < 1 < \mu_2$ либо один двойной корень $\mu_1 = \mu_2 = 1$. В случае двойного корня $\mu = 1$ является положением устойчивого равновесия. При $\mu_1 < 1 < \mu_2$ происходят периодические колебания с периодом, зависящим от постоянных A, B и C.

5) $A = 0$ — давление постоянно. Если $B > 0$, то движение происходит аналогично случаю 1). Если $B < 0$, то движение происходит аналогично случаю 2).

6) $B = 0$ — магнитные силы уравновешиваются. Пусть $A > 0$. Если у $f(\mu)$ существует корень, то движение происходит аналогично случаю 1). Если же корня нет, то при $d\mu/dt > 0$ происходит разлет со скоростью $d\mu/dt \to \sqrt{C}$, а при $d\mu/dt < 0$ происходит схлопывание. Если $A < 0$, то движение происходит аналогично случаю 2), но $d\mu/dt \to \sqrt{C}$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим теперь цилиндр конечной длины и конечного радиуса $r_0 = R$. Для того чтобы явление внутри цилиндра описывалось полученным решением, достаточно с торцов поставить проводящие стенки, а к боковой его поверхности приложить давление, равное полному давлению изнутри

$$p^*(R, t) = p_0(R)\mu^{-2\gamma} + \frac{1}{8\pi} H_0^2(R)\mu^{-2}.$$

Это давление можно создать поршнем, но можно также создать его внешним электромагнитным полем. Давление электромагнитного поля на поверхность цилиндра можно считать равным $\frac{1}{8\pi} H_в^2$ ($H_в$ — напряженность внешнего поля). Согласно уравнению (9) суммарная сила тока, текущего вдоль цилиндра, должна быть при этом равна

$$I(t) = \frac{c}{2} R\mu H_в = \frac{c}{2} R \sqrt{8\pi p_0(R)\mu^{2-2\gamma} + H_0^2(R)}.$$

В частности, при $p_0(R) = 0$ суммарная сила тока получается постоянной во времени.

Таким образом, для того чтобы явление внутри цилиндра описывалось полученным решением, необходимо к концам цилиндра приложить такое напряжение, чтобы суммарный ток был равен $I(t)$. Такое напряжение всегда можно приложить, и оно легко может быть вычислено. При этом ток, который течет внутри цилиндра, не зависит от приложенного напряжения, а находится из уравнений магнитной гидродинамики. Приложенное же напряжение влияет только на величину поверхностного тока.

Рассмотрим теперь баланс энергии. Работа внешних сил

$$2\pi R^2 p^*(\mu)\mu\, d\mu = 2\pi R^2 \Big(\mu^{1-2\gamma} A \int_0^R \rho_0 r_0 dr_0 + \mu^{1-2\gamma} N +$$

$$+ \mu^{-1} \frac{B}{R^2} \int_0^R \rho_0 r_0^3 dr_0 + \mu^{-1} \frac{8\pi M}{R^2}\Big) d\mu \qquad (11)$$

расходуется на увеличение внутренней энергии и на создание кинетической энергии. Последнее слагаемое в этой формуле не зависит от R, т. е. происходит перекачка энергии к оси симметрии, где при $M \neq 0$ энергия бесконечна. Первые три слагаемых стремятся к нулю при $R \to 0$, следова-

тельно, энергия, соответствующая этим слагаемым, втекающая через границу, распределяется по всей массе жидкости. Из формулы (6) видно, что магнитная энергия, содержащаяся в частице, остается постоянной. Поэтому можно считать, что третье слагаемое идет целиком на увеличение кинетической энергии, второе — целиком на увеличение внутренней энергии газа, а первое идет частично на увеличение кинетической энергии и частично — на увеличение внутренней энергии газа. При схлопывании внешние силы производят над цилиндром бесконечную работу, причем каждое слагаемое формулы (11) бесконечно. При разлете магнитные силы (два последних слагаемых) совершают также бесконечную работу, которая производится за счет бесконечной энергии в центре. В случае колебаний работа, совершаемая поверхностью цилиндра, конечна.

Решение, которое получено в этой работе, легко обобщается на случай, когда магнитные силовые линии являются винтовыми линиями. В этом случае в правую часть равенства (1) добавится член $-\frac{1}{8\pi\rho}\frac{\partial H_z^2}{\partial r}$, где H_z — компонента магнитного поля, параллельная оси симметрии, H в этом уравнении будет означать компоненту магнитного поля, перпендикулярную оси симметрии. При этом к формулам (4), (5), (6), (7), (8) добавятся формулы

$$H_z^2 = H_{z0}^2\mu^{-4}, \tag{6'}$$

$$H_{z0} = 8\pi D\int_0^{r_0}\rho_0 r_0 dr_0 + L \tag{8'}$$

(D и L — произвольные постоянные), а вместо уравнения (10) получим:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)^2 = \frac{A}{\gamma-1}\mu^{2-2\gamma} - 2B\ln\mu - D\mu^{-2} + C. \tag{10'}$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 I 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, Н. В. Филипов, Атомная энергия, № 3 (1956). [2] М. А. Леонтович, С. М. Осовец, Атомная энергия, № 3 (1956). [3] Л. И. Седов, ДАН, 90, № 5, 735 (1953). [4] Л. И. Седов, Методы размерности и подобия в механике, М., 1954, стр. 237.