А. И. Рубан, Коэффициенты чувствительности для нелинейных дискретных динамических систем с распределенными и чистыми запаздываниями,
Автомат. и телемех., 1997, выпуск 3, 144–152

Автоматика и телемеханика, № 3, 1997

Дискретные системы

УДК 62.505

© 1997 г. **А. И. РУБАН, д-р техн. наук**
(Красноярский государственный технический университет)

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ И ЧИСТЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ[1]

На основе вариационного подхода построена схема расчета коэффициентов чувствительности (составляющих градиента от функции качества) к переменным и постоянным параметрам для многомерных нелинейных динамических систем, описываемых системами разностных уравнений с запаздывающими аргументами.

1. Введение

При оптимизации динамических систем используют коэффициенты, функции и операторы чувствительности [1–6] первого порядка, хотя существуют (но используются реже) меры чувствительности второго и выше порядков. В дальнейшем мы будем рассматривать только коэффициенты чувствительности (КЧ) первого порядка.

Рассматриваем выход динамической модели объекта $y(t) = y(t, \alpha)$, зависящий неявно от искомых параметров α, и функционал I, построенный на $y(t)$. КЧ к постоянным α и переменным $\alpha(t)$ параметрам называют градиент от I по α: $(dI/d\alpha)^T$, $(dI/d\alpha(t))^T$. При постоянных параметрах α расчет КЧ на основе использования сопряженных уравнений [1–4, 6] требует меньших вычислительных затрат, чем на основе решения уравнений чувствительности для функций чувствительности с последующим пересчетом на основе их искомых КЧ [3–6]. При переменных параметрах $\alpha(t)$ метод сопряженных уравнений остается пока единственно возможным эффективным аналитическим методом получения КЧ.

Существуют два пути получения итоговых результатов расчета КЧ.

Один из них развит в [1, 3] для непрерывных динамических систем, второй – в [2] для дискретных систем. В предлагаемой статье за основу взят вариационный способ [2], ибо он ориентирован на дискретно-временные динамические системы, логически прост, позволяет получать результаты для более сложных (по сравнению с рассмотренными в [2] обыкновенными разностными уравнениями) динамических систем. Способ [1, 3] менее совершенен. Он разработан применительно к непрерывным динамическим моделям в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Распространение его на более сложные классы динамических систем даже с постоянными искомыми параметрами (например, на разрывные и гладкие системы с распределенными и чистыми запаздываниями) не тривиально и требует самостоятельных исследований.

Сущность вариационного метода расчета КЧ заключается в следующем [2]. В функцию качества I с помощью множителей Лагранжа вводятся динамические уравнения (ограничения-равенства) рассматриваемой системы, выписывается первая вариация полученной функции и составляются динамические уравнения (сопряженные

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (5F0038).

уравнения) для множителей Лагранжа из условий обращения в ноль коэффициентов перед вариациями выходных координат динамической системы. Коэффициенты перед вариациями параметров в вышеуказанной первой вариации представляют собой искомые КЧ.

Для удобства изложения материала и ориентируясь на обработку информации средствами цифровой вычислительной техники, рассматриваем только дискретные модели.

В предлагаемой работе вариационный метод расчета КЧ применен к более общим (по сравнению с рассмотренными в литературе [2, 4–6]) дискретным моделям, выходные координаты которых в каждый текущий момент времени зависят от всех предшествующих значений фазовых координат с момента начала работы системы (т.е., к моделям с распределенным запаздыванием) и от фазовых координат с чистыми запаздываниями. Эти модели включают в себя обыкновенные разностные уравнения [2], дискретные аналоги интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, в том числе с чистыми запаздываниями, дифференциально-разностных уравнений с запаздываниями [4, 6].

2. Постановка задачи

Выходная векторная переменная дискретной динамической модели $y(t)$, $t=\overline{0,N}$, зависящая неявно от вектора переменных параметров $\alpha(t)$, $t=\overline{0,N}$ подвержена известному векторному дифференцируемому преобразованию

$$\eta(t)=\eta(t,y(t),\alpha(t)),\quad t=0,\dots,N. \tag{1}$$

Индекс t в правой части $\eta(t,\cdot)$ этого уравнения означает, что для каждого t используются различные вектор-функции различной размерности. Это замечание относится ко всем рассматриваемым в данной работе моделям. Векторные параметры $\alpha(t)$ могут иметь различную размерность при различных t.

По значениям $\eta(t)$, $t=\overline{0,N}$ строится дифференцируемая функция качества

$$I\big(\eta(N),\dots,\eta(1),\ \eta(0)\big)\equiv I(\cdot). \tag{2}$$

Она может зависеть от части переменных (1). Тогда в последующих формулах производные от $I(\cdot)$ по отсутствующим переменным будут нулевыми.

Необходимо найти составляющие градиента $dI/d\alpha(i)$, $i=\overline{0,N}$.

Рассмотрим теперь динамические модели с запаздываниями, исследуемые в данной работе. Первая из них (с распределенным запаздыванием) имеет вид:

$$\begin{aligned}&y(t+1)=K(t,y(t),\dots,y(1),\ y(0),\ \alpha(t),\dots,\alpha(0))=K(t),\\&t=0,1,\dots,N-1,\ y(0)=y_0(\alpha_0).\end{aligned} \tag{3}$$

Фазовые координаты y в момент времени $t+1$ зависят от фазовых координат во все предшествующие моменты времени, начиная с момента начала работы системы.

В модель (3) могут входить дополнительные фазовые координаты с чистыми запаздываниями

$$\begin{aligned}&y(t+1)=K(t,y(t),\dots,y(1),y(0),y(t-\tau),\dots\\&\dots,y(1-\tau),y(-\tau),\alpha(t),\dots,\alpha(0))\equiv K(t),t=\overline{0,N-1},\tau>0,y(0)=\\&=y_0(\alpha_0),y(-1)=y_{-1}(\alpha_{-1}),\dots,y(-\tau)=y_{-\tau}(\alpha_{-\tau}).\end{aligned} \tag{4}$$

Модель (3) включает в себя дискретный аналог векторного интегрального уравнения типа Вольтерра

$$(5)\qquad y(t+1)=\sum_{s=0}^{t}K(t,s,y(s),\alpha(s))\equiv\sum_{s=0}^{t}K(t,s),$$
$$t=0,1,\dots,N-1,\quad y(0)=y_0(\alpha_0)$$

и обыкновенное векторное разностное уравнение (если в (5) $K(t,s)=0$ при $t\neq s$)

$$(6)\qquad y(t+1)=K(t,y(t),\alpha(t))\equiv K(t),\quad t=0,1,\dots,N-1,\quad y(0)=y_0(\alpha).$$

Модель (5) эквивалентна разностному аналогу векторного интегро-дифференциального уравнения (типа Вольтерра)

$$(7)\qquad x(t+1)=f(t,x(t),z(t),\alpha(t))\equiv f(t),\quad x(0)=x_0(\alpha_0),$$
$$z(t+1)=\sum_{s=0}^{t}F(t,s,x(s),z(s),\alpha(s))\equiv\sum_{s=0}^{t}F(t,s),\quad z(0)=z_0(\alpha_0),$$
$$t=0,1,\dots,N-1.$$

Переобозначением переменных

$$y(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ z(t)\end{pmatrix},\ K(t,t)=\begin{pmatrix}f(t)\\ F(t,t)\end{pmatrix};\ K(t,s)=\begin{pmatrix}0\\ F(t,s)\end{pmatrix},\ 0\leqslant s<t$$

система (7) преобразуется к модели (5). Вышеуказанные преобразования позволят в дальнейшем результаты расчета КЧ для модели (3) трансформировать в результаты для моделей (5)–(7).

По аналогии с вышеуказанным модель (4) включает более простые ее варианты, например, разностный аналог интегрального уравнения типа Вольтерра с чистым запаздыванием

$$(8)\qquad y(t+1)=\sum_{s=0}^{t}K(t,s,y(s),y(s-\tau),\alpha(s))\equiv\sum_{s=0}^{t}K(t,s),$$
$$\tau>0,\quad t=\overline{0,N-1},$$
$$y(0)=y_0(\alpha_0),\ y(-1)=y_{-1}(\alpha_{-1}),\dots,y(-\tau)=y_{-\tau}(\alpha_{-\tau}),$$

а также хорошо известные разностные уравнения (аналоги дифференциально-разностных уравнений) с одним

$$(9)\qquad y(t+1)=f(t,y(t),y(t-\tau),\alpha(t))\equiv f(t),\quad t=\overline{0,N-1},\quad \tau>0,$$
$$y(0)=y_0(\alpha_0),\quad y(-1)=y_{-1}(\alpha_{-1}),\dots,y(-\tau)=y_{-\tau}(\alpha_{-\tau})$$

или несколькими

$$(10)\qquad y(t+1)=f(t,y(t),y(t-\tau_1),\dots,y(t-\tau_k),\alpha(t))\equiv f(t),$$
$$t=\overline{0,N-1},\quad 0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_k,$$
$$y(0)=y_0(\alpha_0),\ y(-1)=y_{-1}(\alpha_{-1}),\dots,y(-\tau_k)=y_{-\tau_k}(\alpha_{-\tau_k})$$

чистыми запаздываниями.

Модель (1) (модель измерительного устройства) может иметь свои параметры $\beta(t)$, не связанные с параметрами $\alpha(t)$ уравнения объекта. Тогда за счет расширения вектора α и включения в него параметров β приходим к вышеуказанным моделям.

3. Коэффициенты чувствительности для модели (3)

Вводим в функцию качества (2) ограничения-равенства (3) с помощью множителей Лагранжа и получаем функцию

$$(11)\qquad I = I(\cdot) + \sum_{t=0}^{N-1} \lambda^T(t+1)(K(t) - y(t+1)) + \lambda^T(0)(y_0(\alpha_0) - y(0)) =$$
$$= I(\cdot) - \lambda^T(N)y(N) + \sum_{t=0}^{N-1} \left(\lambda^T(t+1)K(t) - \lambda^T(t)y(t)\right) + \lambda^T(0)y_0(\alpha_0).$$

При выполнении ограничений (3) функция I тождественно равна рассматриваемой функции качества $I(\cdot)$. Тогда КЧ от функции I совпадают с КЧ от функции качества $I(\cdot)$.

Находим первую вариацию функции (11)

$$(12)\qquad \delta I = \left(\frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(N)}\frac{\partial \eta(N)}{\partial y(N)} - \lambda^T(N)\right)\delta y(N) + \sum_{t=0}^{N-1}\left(\frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)} +\right.$$
$$\left. + \sum_{i=t}^{N-1} \lambda^T(i+1)\frac{\partial K(i)}{\partial y(t)} - \lambda^T(t)\right)\delta y(t) + \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(N)}\frac{\partial \eta(N)}{\partial \alpha(N)}\delta\alpha(N) +$$
$$+ \sum_{t=0}^{N-1}\left(\frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial \alpha(t)} + \sum_{i=t}^{N-1}\lambda^T(i+1)\frac{\partial K(i)}{\partial \alpha(t)}\right)\delta\alpha(t) + \lambda^T(0)\frac{dy_0(\alpha_0)}{d\alpha_0}\delta\alpha_0$$

и, приравнивая к нулю коэффициенты перед вариациями δy, получаем сопряженные уравнения для множителей Лагранжа

$$\lambda^T(N) = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(N)}\frac{\partial \eta(N)}{\partial y(N)},$$
$$(13)\qquad \lambda^T(t) = \sum_{i=t}^{N-1} \lambda^T(i+1)\frac{\partial K(i)}{\partial y(t)} + \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)}, \qquad t = N-1, \ldots, 0.$$

Сопряженные уравнения решаются, начиная с конечного момента времени N. По значениям получаемых множителей Лагранжа вычисляются КЧ, формулы для которых следуют из (12). КЧ стоят в (12) перед вариациями соответствующих параметров:

$$(14)\qquad \frac{\partial I}{\partial \alpha(N)} = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(N)}\frac{\partial \eta(N)}{\partial \alpha(N)}, \qquad \frac{\partial I}{\partial \alpha(t)} = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(t)}\frac{\partial \eta(t)}{\partial \alpha(t)} + \sum_{i=t}^{N-1}\lambda^T(i+1)\frac{\partial K(i)}{\partial \alpha(t)},$$
$$t = N-1, \ldots, 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial \alpha_0} = \lambda^T(0)\frac{dy_0(\alpha_0)}{d\alpha_0}.$$

Для модели (5) формулы (13), (14) сохраняют свою структуру. В них следует заменить (в соответствующих суммах) $K(i)$ на $K(i,t) \equiv K(i,t,y(t),\alpha(t))$.

Для обыкновенного разностного уравнения (6) производные $\partial K(i)/\partial y(t)$, $\partial K(i)/\partial \alpha(t)$ равны нулю при $t < i < N$, и тогда в (13), (14) соответствующие суммы по i содержат только одно слагаемое при $i = t$. Этот результат хорошо известен в литературе [2, 6].

Для модели (7) – разностного аналога интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра – получаем следующие сопряженные уравнения

$$
\begin{aligned}
&\lambda_x^T(N) = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(N)} \frac{\partial \eta(N)}{\partial x(N)}, \quad \lambda_z^T(N) = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(N)} \frac{\partial \eta(N)}{\partial z(N)}, \\
&\lambda_x^T(t) = \lambda_x^T(t+1)\frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \sum_{i=t}^{N-1} \lambda_z^T(i+1)\frac{\partial F(i,t)}{\partial x(t)} + \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial x(t)}, \\
&\lambda_z^T(t) = \lambda_x^T(t+1)\frac{\partial f(t)}{\partial z(t)} + \sum_{i=t}^{N-1} \lambda_z^T(i+1)\frac{\partial F(i,t)}{\partial z(t)} + \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial z(t)}, \\
&t = N-1, \ldots, 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

и КЧ

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial I}{\partial \alpha(N)} = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(N)} \frac{\partial \eta(N)}{\partial \alpha(N)}, \\
&\frac{\partial I}{\partial \alpha(t)} = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \alpha(t)} + \lambda_x^T(t+1)\frac{\partial f(t)}{\partial z(t)} + \sum_{i=t}^{N-1} \lambda_z^T(i+1)\frac{\partial F(i,t)}{\partial \alpha(t)}, \\
&t = N-1, \ldots, 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha_0} = \lambda_x^T(0)\frac{dx_0(\alpha_0)}{d\alpha_0} + \lambda_z^T(0)\frac{dz_0(\alpha_0)}{d\alpha_0}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Если в модели векторный параметр постоянен в некоторые моменты времени

$$\alpha(j+1) = \alpha(j), \quad j = p,\ p+1, \ldots, q-1,$$

тогда в первой вариации (12) необходимо учесть равенство вариаций параметров

$$\delta\alpha(j+1) = \delta\alpha(j), \quad j = p,\ p+1, \ldots, q-1$$

и объединить слагаемые с одинаковыми вариациями. В результате КЧ к постоянному параметру (который обозначим через $\overline{\alpha}(p)$) равен сумме ранее приведенных КЧ для переменных параметров

$$\frac{\partial I}{\partial \overline{\alpha}(p)} = \sum_{t=p}^{q} \frac{\partial I}{\partial \alpha(t)}.$$

4. Коэффициенты чувствительности для модели (4)

Для использования вышеприведенных результатов, полученных на основе вариационного метода для модели (3), перейдем от уравнения с чистым запаздыванием (4) к уравнению вида (3) введением новых координат

$$
\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z_1(t) \\ \vdots \\ z_\tau(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-1) \\ \vdots \\ y(t-\tau) \end{pmatrix},
$$

$$
\overline{K}(t) = \begin{pmatrix} K(t, y(t), \ldots, y(0),\ z_\tau(t),\ z_\tau(t-1), \ldots, z_\tau(0),\ \alpha(t), \ldots, \alpha(0)) \\ y(t) \\ z_1(t) \\ \vdots \\ z_{\tau-1}(t) \end{pmatrix},
$$

$$\overline{y}_0\,(\overline{\alpha}_0)=\begin{pmatrix} y_0(\alpha_0)\\ y_{-1}(\alpha_{-1})\\ \vdots\\ y_{-\tau}(\alpha_{-\tau})\end{pmatrix},\quad \overline{\alpha}_0=\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_{-1}\\ \vdots\\ \alpha_{-\tau}\end{pmatrix}.$$

Затем используем формулы (13), (14), исключаем промежуточные переменные $z_i(t)$ и соответствующие им множители Лагранжа и получаем сопряженные уравнения

$$\lambda^T(t)=0,\quad t=N+\tau,\quad N+\tau-1,\dots,N+1,\quad \lambda^T(N)=\frac{\partial\, I(\cdot)}{\partial\,\eta(N)}\frac{\partial\,\eta(N)}{\partial\, y(N)},$$

$$\lambda^T(t)=\sum_{i=t}^{N-1}\lambda^T(i+1)\frac{\partial\, K(i)}{\partial\, y(t)}+\sum_{i=t+\tau}^{N-1}\lambda^T(i+1)\frac{\partial\, K(i)}{\partial\, y(t)}+\frac{\partial\, I(\cdot)}{\partial\,\eta(t)}\frac{\partial\,\eta_i(t)}{\partial\, y(t)}, \tag{17}$$

$$t=N-1,\dots,0$$

и коэффициенты чувствительности

$$\frac{\partial\, I}{\partial\,\alpha(N)}=\frac{\partial\, I(\cdot)}{\partial\,\eta(N)}\frac{\partial\,\eta(N)}{\partial\,\alpha(N)},$$

$$\frac{\partial\, I}{\partial\,\alpha(t)}=\frac{\partial\, I(\cdot)}{\partial\,\eta(t)}\frac{\partial\,\eta(t)}{\partial\,\alpha(t)}+\sum_{i=t}^{N-1}\lambda^T(i+1)\frac{\partial\, K(i)}{\partial\,\alpha(t)},\quad t=N-1,\dots,0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial\, I}{\partial\,\alpha_0}=\lambda^T(0)\frac{dy_0(\alpha_0)}{d\alpha_0},\quad \frac{\partial\, I}{\partial\,\alpha_{-i}}=\lambda^T_{z_i}(0)\frac{dy_{-i}(\alpha_{-i})}{d\alpha_{-i}},\quad i=\overline{1,\tau},$$

где

$$\lambda^T_{z_i}(0)=\sum_{j=0}^{N-1}\lambda^T(j+1)\frac{\partial\, K(j)}{\partial\, y(-i)},\quad i=\overline{1,\tau}. \tag{19}$$

При рассмотрении разностного аналога интегрального уравнения с чистым запаздыванием (8) в сопряженных уравнениях (17) в первой сумме (от t до $N-1$) необходимо заменить $K(i)$ на $K(i,t)$, а во второй сумме (от $t+\tau$ до $N-1$) – $K(i)$ на $K(i,t+\tau)$:

$$\lambda^T(t)=0,\quad t=N+\tau,\quad N+\tau-1,\dots,N+1,\quad \lambda^T(N)=\frac{\partial\, I(\cdot)}{\partial\,\eta(N)}\frac{\partial\,\eta(N)}{\partial\, y(N)},$$

$$\lambda^T(t)=\sum_{i=t}^{N-1}\lambda^T(i+1)\frac{\partial\, K(i,t)}{\partial\, y(t)}+\sum_{i=t+\tau}^{N-1}\lambda^T(i+1)\frac{\partial\, K(i,t+\tau)}{\partial\, y(t)}+\frac{\partial\, I(\cdot)}{\partial\,\eta(t)}\frac{\partial\,\eta(t)}{\partial\, y(t)}, \tag{20}$$

$$t=N-1,\ N-2,\dots,0.$$

КЧ вычисляются по формулам, аналогичным (18), (19):

$$\frac{\partial\, I}{\partial\,\alpha(N)}=\frac{\partial\, I(\cdot)}{\partial\,\eta(N)}\frac{\partial\,\eta(N)}{\partial\,\alpha(N)},\quad \frac{\partial\, I}{\partial\,\alpha(t)}=\frac{\partial\, I(\cdot)}{\partial\,\eta(t)}\frac{\partial\,\eta(t)}{\partial\,\alpha(t)}+$$

$$+\sum_{i=t}^{N-1}\lambda^T(t+1)\frac{\partial\, K(i,t)}{\partial\,\alpha(t)},\quad t=N-1,\dots,0,$$

$$\frac{\partial\, I}{\partial\,\alpha_0}=\lambda^T(0)\frac{dy_0(\alpha_0)}{d\alpha_0},\quad \frac{\partial\, I}{\partial\,\alpha_{-i}}=\lambda^T_{z_i}(0)\frac{dy_{-i}(\alpha_{-i})}{d\alpha_{-i}},\quad i=\overline{1,\tau}, \tag{21}$$

$$\lambda^T_{z_i}(0)=\sum_{j=\tau-i}^{N-1}\lambda^T(j+1)\frac{\partial\, K(j,\tau-i)}{\partial\, y(-i)},\quad i=\overline{1,\tau}.$$

Для модели (9) (разностного уравнения с одним запаздыванием) получаем следующие сопряженные уравнения

$$
\begin{aligned}
& \lambda^T(t) = 0, \quad t = N+\tau, \quad N+\tau-1, \ldots, N+1, \quad \lambda^T(N) = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(N)} \frac{\partial \eta(N)}{\partial y(N)}, \\
(22) \qquad & \lambda^T(t) = \lambda^T(t+1)\frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + \lambda^T(t+1+\tau)\frac{\partial f(t+\tau)}{\partial y(t)} + \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)}, \\
& t = N-1, \ldots, 0
\end{aligned}
$$

и КЧ

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial I}{\partial \alpha(N)} = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(N)} \frac{\partial \eta(N)}{\partial \alpha(N)}, \\
(23) \qquad & \frac{\partial I}{\partial \alpha(t)} = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \alpha(t)} + \lambda^T(t+1)\frac{\partial f(t)}{\partial \alpha(t)}, \quad t = N-1, \ldots, 0, \\
& \frac{\partial I}{\partial \alpha_0} = \lambda^T(0)\frac{dy_0(\alpha_0)}{d\alpha_0}, \\
& \frac{\partial I}{\partial \alpha_{-i}} = \lambda^T(\tau+1-i)\frac{\partial f(\tau-i)}{\partial y(-i)} \frac{dy_{-i}(\alpha_{-i})}{d\alpha_{-i}}, \quad i = \overline{1,\tau}.
\end{aligned}
$$

При наличии нескольких запаздываний (модель (10)) имеем следующие сопряженные уравнения

$$
\begin{aligned}
& \lambda^T(t) = 0, \quad t = N+\tau_k, \quad N+\tau_k-1, \ldots, N+1, \\
(24) \qquad & \lambda^T(N) = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(N)} \frac{\partial \eta(N)}{\partial y(N)}, \quad \lambda^T(t) = \lambda^T(t+1)\frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + \\
& + \sum_{j=1}^{k} \lambda^T(t+1+\tau_j)\frac{\partial f(t+\tau_j)}{\partial y(t)} + \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial y(t)}, \quad t = N-1, \ldots, 0
\end{aligned}
$$

и КЧ

$$
\begin{aligned}
(25) \qquad & \frac{\partial I}{\partial \alpha(N)} = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(N)} \frac{\partial \eta(N)}{\partial \alpha(N)}, \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha(t)} = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial \eta(t)} \frac{\partial \eta(t)}{\partial \alpha(t)} + \\
& + \lambda^T(t+1)\frac{\partial f(t)}{\partial \alpha(t)}, \quad t = N-1, \ldots, 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \alpha_0} = \lambda^T(0)\frac{dy_0(\alpha_0)}{d\alpha_0}, \\
& \frac{\partial I}{\partial \alpha_{-i}} = \sum_{j=1}^{k} \lambda^T(\tau_j+1-i)\frac{\partial f(\tau_j-i)}{\partial y(-i)} 1\,(\tau_j - i)\frac{dy_{-i}(\alpha_{-i})}{d\alpha_{-i}}, \quad i = \overline{1,\tau_k}, \\
& 1\,(z) = \begin{cases} 1, & z \geqslant 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

5. Нейроподобные вычислительные сети

Функционирование во времени t полносвязной нейроподобной вычислительной сети [7] описывается системой разностных уравнений

$$
\begin{aligned}
(26) \qquad & y_i(t+1) = F_i(s_i(t), \alpha_{i,n+1}(t)) \equiv F_i(t), \quad s_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}(t) y_j(t), \quad i = \overline{1,n}, \\
& t = 0, 1, \ldots, N-1, \quad y_i(0) = y_i^0, \quad i = \overline{1,n}.
\end{aligned}
$$

Здесь: $\alpha_{i,j}$ – веса синаптических связей между "нейронами", $y_i(t+1)$ – выходной сигнал i-го нейроподобного элемента на $(i+1)$-ом такте вычислений, $F_i(\cdot)$ – функция, описывающая нелинейную характеристику элемента, $\alpha_{i,n+1}$ – параметр этой функции. Система (26) является частным вариантом системы обыкновенных разностных уравнений (7). Система (7) описывает также другие полносвязные вычислительные сети.

Экстремальная функция качества, характеризующая поведение сети за N тактов ее работы, строится на выходных координатах сети

$$I(\cdot) = I(y(0),\ y(1), \ldots, y(N)). \tag{27}$$

С учетом специфики функции качества (27) и модели (26) (см. п. 3) получаем динамические сопряженные (по отношению к (26)) уравнения

$$\begin{aligned} &\lambda_i(N) = \frac{\partial I(\cdot)}{\partial y_i(N)}, \quad i=\overline{1,n}, \\ &\lambda_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t+1)\frac{\partial F_j(t)}{\partial s_j(t)}\alpha_{ji}(t) + \frac{\partial I(\cdot)}{\partial y_i(t)}, \quad i=\overline{1,n}, \quad t = N-1,\ldots,0 \end{aligned} \tag{28}$$

и КЧ к параметрам $\{\alpha_{ij}\}$, $\{y_i^0\}$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial I}{\partial \alpha_{ij}(t)} = \lambda_i(t+1)\frac{\partial F_i(t)}{\partial s_i(t)}y_j(t), \quad i,j=\overline{1,n}, \\ &\frac{\partial I}{\partial \alpha_{i,n+1}(t)} = \lambda_i(t+1)\frac{\partial F_i(t)}{\partial \alpha_{i,n+1}(t)}, \quad i=\overline{1,n}; \quad t=\overline{0,N-1}; \\ &\frac{\partial I}{\partial y_i^0} = \lambda_i(0), \quad i=\overline{1,n}. \end{aligned} \tag{29}$$

Заметим, что для общности (в отличие от [7]) все подстраиваемые параметры α взяты переменными. Как было отмечено в п. 3, для получения КЧ к постоянным параметрам α достаточно полученные (см. (29)) КЧ к переменным параметрам просуммировать по всем рассматриваемым моментам времени $t = 0, 1, \ldots, N-1$. Дополнительно также могут подстраиваться начальные значения y_i^0 фазовых координат (по отношению к ним тоже вычислены КЧ – см. (29)), что расширяет возможности сети (26).

Если динамика нейросети имеет память на два такта назад, то в каждом уравнении модели (26) добавляются параметры, характеризующие степень учета предыстории каждого нейроподобного элемента:

$$\begin{aligned} &y_i(1) = F_i\left(s_i^{(1)}(0), \alpha_{i,n+1}^{(1)}(0)\right) \equiv F_i(0), \\ &y_i(t+1) = F_i\left(s_i^{(1)}(t), s_i^{(2)}(t-1), \alpha_{i,n+1}^{(1)}(t),\ \alpha_{i,n+1}^{(2)}(t)\right) \equiv F_i(t), \\ &s_i^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{(1)}(t) y_j(t), \quad s_i^{(2)}(t-1) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{(2)}(t) y_j(t-1), \\ &i=\overline{1,n}, \quad t=\overline{1,N-1}; \quad y_i(0) = y_i^0, \quad i=\overline{1,n}. \end{aligned} \tag{30}$$

Для этой модели напрямую применимы результаты п. 3.

6. Заключение

Вышеприведенная схема расчета КЧ для сложных динамических дискретных систем допускает обобщение на различные классы дискретных моделей, объединенных в единую группу, названную дискретно-аргументными системами [8, 9]. Дискретно-аргументными моделями описываются процессы цифровой обработки многомерных массивов информации и цифрового управления сосредоточенными и распределенными объектами, процессоры для цифровой фильтрации изображений и других пространственных и пространственно-временных случайных полей, системы автоматического параллельного программирования, искусственные биологические комплексы, конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений и др.

Результаты допускают распространение на гладкие и разрывные непрерывные по времени модели с распределенными и чистыми запаздываниями. При этом надо обосновать универсальный вариационный метод расчета КЧ к постоянным и переменным параметрам и на базе него исследовать основные классы гладких и разрывных динамических систем с запаздываниями [4–6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Островский Г. М., Волин Ю. М.* Методы оптимизации химических реакторов. М.: Химия, 1967.
2. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
3. *Спиди К., Браун Р., Гудвин Дж.* Теория управления: идентификация и оптимальное управление. М.: Мир, 1973.
4. *Рубан А. И.* Идентификация нелинейных динамических объектов на основе алгоритма чувствительности. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1975.
5. *Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.* Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981.
6. *Рубан А. И.* Идентификация и чувствительность сложных систем. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.
7. *Горбань А. Н.* Обучение нейронных сетей. М.: СП Параграф, 1990.
8. *Блюмин С. Л.* Соотношение типа Кэли–Гамильтона в теории дискретно-аргументных систем // АиТ. 1981. № 9. С. 133–142.
9. *Блюмин С. Л., Корнеев А. М.* Дискретно-аргументное моделирование систем обработки информации и управления: учебное пособие. Липецк: Липецкий политехнич. ин-т, 1993.

Поступила в редакцию 27.04.95