



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Ишханов, Об одном случае задачи погружения с разрешимым ядром,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1981, том 106, 76–81

<https://www.mathnet.ru/zns13406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

13 мая 2025 г., 06:41:38



ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ ПОГРУЖЕНИЯ С РАЗРЕШИМЫМ ЯДРОМ

Пусть k - поле алгебраических чисел, K/k - конечное нормальное расширение с группой Галуа F , G - расширение конечной разрешимой группы A с помощью F . Целью предлагаемой статьи является задача погружения $(K/k, G, A)$; точную ее постановку см. [1, 2].

ТЕОРЕМА. Если порядки групп A и F взаимно просты, то в качестве решения задачи $(K/k, G, A)$ можно выбрать поле.

Случай, когда A - нильпотентная группа, был рассмотрен в работах [1, 2]. Предлагаемое доказательство использует теоретико-групповые рассуждения и существование решения для нильпотентной группы.

Пусть A - конечная разрешимая группа с образующими A_1, \dots, A_m ; $N = (n_1, \dots, n_c)$ - набор натуральных чисел. Рассмотрим убывающий ряд подгрупп группы A

$$A_1 = A, A_2 = A_1^{n_1}(A_1, A_1), \dots, A_{i+1} = A_i^{n_i}(A_i, A_i), \dots,$$

где скобки обозначают коммутант соответствующей группы. Если $A_c \neq 1$, а $A_{c+1} = 1$, то будем говорить, что A - группа класса c относительно N .

Пусть $n_i = p_i^{b_{i1}} \dots p_{it}^{b_{it}}$ - разложение числа n_i на множители, p - некоторое простое число и q_i - максимальная степень p , входящая в разложение n_i . Для произвольного натурального j , не превосходящего c , обозначим через $N_{j,p}$ набор чисел $(n_1, \dots, n_{j-1}, q_j, \dots, q_c)$. Для произвольной группы можно рассматривать ряд подгрупп, соответствующий $N_{j,p}$. Члены этого ряда для группы A будем обозначать через $A_{j,p,i}$. Рассмотрим еще один убывающий ряд подгрупп произвольной группы A , определенный для N и натурального j , не превосходящего c , следующим образом:

$$A_{j,i} = \bigcap_p A_{j,p,i}$$

Будем говорить, что группа A является группой класса c относительно N_j , если $A_{j,c} \neq 1$, а $A_{j,c+1} = 1$.

Пусть U - свободная группа с образующими $u_{f,b}$, где $f = 1, \dots, m$; b пробегает все элементы группы F . U становится F -операторной группой, если положить

$$U_{f,\sigma}^\tau = U_{f,\sigma\tau} \quad \text{при } \sigma \in F.$$

Для группы U можно построить ряды подгрупп относительно N , $N_{j,p}$ и N_j . Фактор-группы U/U_{C+1} , $U/U_{j,p,C+1}$ и $U/U_{j,C+1}$ будем обозначать соответственно через V , $V_{j,p}$ и V_j . Это — конечные группы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. F -операторная группа A класса c относительно N с m образующими является операторно-гомоморфным образом группы V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм φ группы U на группу A , положив

$$\varphi(U_{f,\sigma}) = a_f^\sigma.$$

Достаточно показать, что ядро R_{C+1} отображения φ содержит подгруппу U_{C+1} . Доказательство проведем индукцией по C . При $C=1$ утверждение тривиально. Пусть оно доказано при $C=i$ и R_{i+1} , R_{i+2} — ядра отображений группы U соответственно на группы A/A_{i+1} и A/A_{i+2} . По предположению группа U_{i+1} содержится в группе R_{i+1} . Так как A_{i+1}/A_{i+2} — абелева группа периода, делящего n_{i+1} , то

$$R_{i+1}^{n_{i+1}}(R_{i+1}, R_{i+1}) \subset R_{i+2},$$

следовательно,

$$U_{i+2} = U_{i+1}^{n_{i+1}}(U_{i+1}, U_{i+1}) \subset R_{i+2}.$$

Напомним определение одной теоретико-групповой конструкции.

Пусть $\{G_i\}$ — семейство групп и для каждого i существует гомоморфизм φ_i группы G_i на фиксированную группу H . Прямым произведением групп G_i с объединенной фактор-группой H называется подгруппа прямого произведения $\prod G_i$, состоящая из всех элементов $\prod q_i$ со свойством $\varphi_i q_i = h$ для всех i , где $q_i \in G_i$ и $h \in H$.

ЛЕММА I. Группа V_j изоморфна группе \bar{V}_j — прямому произведению групп $V_{j,p}$ с объединенной фактор-группой U/U_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассматривать простые числа p , делящие хотя бы одно из чисел n_1, \dots, n_c , так как в противном случае группа $V_{j,p}$ изоморфна группе U/U_j . Рассмотрим отображение ψ группы V_j в группу $\prod_p V_{j,p}$, опреде-

ленное следующим образом:

$$\Psi(u \bmod \prod_p U_{j,p,c+1}) = \prod_p u \bmod U_{j,p,c+1}.$$

Проверяется, что Ψ - мономорфизм и его образ содержится в подгруппе \bar{B}_j . Заметим, что при различных p порядки групп $U_{j,p,j}/U_{j,p,c+1}$ взаимно просты. Кроме того, при любом p Ψ индуцирует эпиморфизм группы $U_{j,j}/U_{j,c+1}$ на группу $U_{j,p,j}/U_{j,p,c+1}$, следовательно, Ψ отображает группу $U_{j,j}/U_{j,c+1}$ на группу $\prod_p U_{j,p,j}/U_{j,p,c+1}$.

ЛЕММА 2. Ядро естественного гомоморфизма группы B_{j+1} на группу B_j является нильпотентной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое ядро содержится в ядре естественного отображения группы B_{j+1} на группу U/U_{j+1} , которое в силу леммы 1 является прямым произведением групп $U_{j+1}/U_{j+1,p,c+1}$.

Отметим два утверждения, которые легко проверяются.

ЛЕММА 3. Если A - группа класса C относительно $\mathcal{N}(N_j, N_{j,p})$, то класс ее подгрупп и фактор-групп относительно $\mathcal{N}(N_j, N_{j,p})$ не превосходит C .

ЛЕММА 4. Пусть

$$1 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \xrightarrow{\Psi} F_3 \rightarrow 1 -$$

расширение конечных групп и F_4 - подгруппа группы F_2 , причем $\Psi F_4 = F_3$, тогда если расширение

$$1 \rightarrow F_1 \cap F_4 \rightarrow F_4 \xrightarrow{\Psi} F_3 \rightarrow 1$$

полупрямое, то исходное расширение также полупрямое.

ЛЕММА 5. Группа $B_{j,p}$ обладает свойством максимальности среди групп класса C относительно $\mathcal{N}_{j,p}$, точнее, пусть

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Psi_1} & X \\ & \searrow \Psi_3 & \downarrow \Psi_2 \\ & & B_{j,p} \end{array}$$

коммутативный треугольник, где Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 - эпиморфизмы, а X - группа класса C относительно $\mathcal{N}_{j,p}$, тогда Ψ_2 - изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по C . При $C=1$ утверждение тривиально. Пусть оно верно при $C=l$; тогда группы $X/X_{j,p,l+1}$ и $U/U_{j,p,l+1}$ изоморфны. Из коммутативного треугольника

$$\begin{array}{ccc}
 U_{j,p,i+1} & \xrightarrow{\Psi_4} & X_{j,p,i+1}/X_{j,p,i+2} \\
 & \searrow \Psi_6 & \downarrow \Psi_5 \\
 & & U_{j,p,i+1}/U_{j,p,i+2}
 \end{array}$$

следует, что Ψ_5 - изоморфизм, что доказывает утверждение для $i+1$.

ЛЕММА 6. Пусть \bar{V} - группа класса C относительно \mathcal{N}_{j+1} и \bar{V} является расширением группы C с помощью V_j , тогда \bar{V} - полупрямое расширение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по порядку группы C . Пусть C_0 - абелева подгруппа группы C , являющаяся нормальным делителем в группе \bar{V} . V_j - группа класса C относительно \mathcal{N}_{j+1} . Следовательно, по лемме 3 \bar{V}/C_0 - группа класса C относительно \mathcal{N}_{j+1} . По индукционному предположению группа \bar{V}/C_0 - полупрямое расширение группы C/C_0 с помощью группы V_j . Пусть \bar{V}_0 - полный прообраз подгруппы V_j в группе \bar{V} относительно отображения \bar{V} на группу \bar{V}/C_0 . Имеем групповое расширение

$$1 \rightarrow C_0 \rightarrow \bar{V}_0 \rightarrow V_j \rightarrow 1.$$

По лемме 3 \bar{V}_0 - группа класса C относительно \mathcal{N}_{j+1} . Можно считать, что C_0 - минимальный нормальный делитель группы \bar{V}_0 , так как в противном случае этого можно добиться, как это было сделано выше. Пусть C_0 - элементарная абелева p -группа и E - ядро естественного отображения группы V_j на группу $V_{j,p}$. Заметим, что порядок группы E взаимно прост с p . Можно говорить о действии операторов из группы E на модуль C_0 . Если $C_0^E = 1$, то, так как $H^1(E, C_0) = 0$, из точной последовательности Хохшильда - Серра

$$0 = H^2(V_{j,p}, C_0^E) \rightarrow H^2(V_j, C_0) \rightarrow H^2(E, C_0) = 0$$

следует, что $H^2(V_j, C_0) = 0$, т.е. \bar{V}_0 - полупрямое расширение. Так как C_0 - минимальный нормальный делитель, то остается случай $C_0^E = C_0$. Тогда группа E - нормальный делитель в группе \bar{V}_0 . Заметим, что \bar{V}_0/E - группа класса C относительно $\mathcal{N}_{j,p}$. Пусть $\{b_{f,b}\}$ - образующие группы $V_{j,p}$, где $f = 1, \dots, m$; $b \in F$, и $\{\bar{b}_{f,b}\}$ - прообразы элементов $b_{f,b}$ в группе \bar{V}_0/E . Рассмотрим подгруппу $\bar{V}_{j,p}$ группы

\bar{V}_0/E , порожденную элементами $\bar{v}_{j,\beta}$. По лемме 3 $\bar{V}_{j,p}$ - группа класса C относительно $N_{j,p}$. Кроме того, группа $V_{j,p}$ - гомоморфный образ группы $\bar{V}_{j,p}$. Из леммы 5 следует, что группы $\bar{V}_{j,p}$ и $V_{j,p}$ изоморфны, т.е. \bar{V}_0/E - полупрямое расширение. Из рассмотрения последовательности Хохшильда - Серра следует, что гомоморфизм подъема

$$H^2(V_{j,p}, C_0) \rightarrow H^2(V_j, C_0)$$

является изоморфизмом, следовательно, и \bar{V}_0 - полупрямое расширение, так как по лемме 2 [2] расширение \bar{V}_0 соответствует подъему класса когомологий, соответствующего расширению \bar{V}_0/E . Из леммы 4 следует, что \bar{V} - также полупрямое расширение.

Обозначим полупрямое расширение группы V_j с помощью F через G_j . Существует естественный эпиморфизм группы G_{j+1} на группу G_j . По лемме 2 ядро D этого отображения является нильпотентной группой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Группа G_{j+1} - полупрямое расширение группы D с помощью G_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \bar{D} - произвольная подгруппа группы D , являющаяся нормальным делителем в G_{j+1} . Обозначим через C и S соответственно фактор-группы D/\bar{D} и G_{j+1}/\bar{D} . Достаточно доказать индукцией по порядку группы C , что расширение

$$1 \rightarrow C \rightarrow S \rightarrow G_j \rightarrow 1$$

является полупрямым. Пусть \bar{C} - абелева подгруппа группы C , являющаяся нормальным делителем в S . Тогда по предположению расширение

$$1 \rightarrow C/\bar{C} \rightarrow S/\bar{C} \rightarrow G_j \rightarrow 1$$

является полупрямым. Пусть \bar{G}_j - подгруппа в группе S/\bar{C} , изоморфная G_j , и \bar{S} - полный прообраз \bar{G}_j в группе S относительно отображения S на S/\bar{C} . Имеем групповое расширение

$$1 \rightarrow \bar{C} \rightarrow \bar{S} \rightarrow G_j \rightarrow 1.$$

Пусть T - ядро естественного отображения группы \bar{S} на группу F . T - подгруппа группы V_j/\bar{D} , следовательно, по лемме 3 T - группа класса c относительно N_{j+1} . Расширению \bar{S} соответствует некоторый элемент q из группы $H^2(G_j, \bar{C})$. Заметим, что ограничение q на подгруппу V_j соответствует группе T . По лемме 6 T - полупрямое расширение группы \bar{C}

с помощью V_j . Так как порядки групп F и G взаимно просты, то $g=0$, т.е. S - полупрямое расширение. Из леммы 4 следует, что и S - полупрямое расширение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Так как G - полупрямое расширение группы A с помощью F , то можно считать, что A - F -операторная группа. Пусть A имеет класс разрешимости C . Рассмотрим убывающий ряд подгрупп группы A $A_1=A, A_2=(A_1, A_1), \dots,$

$A_{i+1}=(A_i, A_i), \dots, A_{C+1}=1$. Если n_i - показатели групп A_i/A_{i+1} , то A - группа класса C относительно $N=(n_1, \dots, n_C)$. Из предложения 1 следует, что достаточно решить задачу $(K/k, B \cdot F, F)$ с соответствующей группой B . Действительно, пусть L - решение последней задачи и H - ядро гомоморфизма группы B на A , тогда подполе L^H является решением исходной задачи.

Рассмотрим последовательность групп и гомоморфизмов, индуцированных тождественным отображением свободной группы U ,

$$V_C = B \longrightarrow V_{C-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow V_1.$$

Из леммы 1 следует, что V_1 - нильпотентная группа. Из леммы 2 следует, что ядра D_{j+1} отображений V_{j+1} на V_j - нильпотентные группы. Рассмотрим для каждого j , не превосходящего C , задачу погружения $(K/k, G_j, V_j)$ и докажем индукцией по j , что она имеет решение. При $j=1$ задача погружения имеет нильпотентное ядро, поэтому в качестве решения можно выбрать поле L_1 . Пусть L_j - поле, являющееся решением задачи $(K/k, G_j, V_j)$. Рассмотрим задачу погружения

$(L_j/k, G_{j+1}, D_{j+1})$. Из предложения 2 следует, что последняя задача является полупрямой с нильпотентным ядром. Следовательно, существует поле L_{j+1} , которое является решением этой задачи.

Литература

1. Шафаревич И.Р. Задача погружения для распадающихся расширений. - Докл.АН СССР, 1958, т.120, № 6, с.1217-1219.
2. Ишханов В.В. О полупрямой задаче погружения с нильпотентным ядром. - Изв.АН СССР. Сер.матем., 1976, т.40, № 1, с.3-25.