T. Weidl, Estimates for operators of type $b(x)a(D)$ in nonpower ideals,
Algebra i Analiz, 1993, Volume 5, Issue 5, 47–67

Алгебра и анализ
Том 5 (1993), вып. 5

ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТИПА $b(x)a(D)$ В НЕСТЕПЕННЫХ ИДЕАЛАХ

Т. Вайдль

Обсуждается применение нестепенных интерполяционных функторов к функциональным пространствам и к идеалам компактных операторов. Уточняются условия ограниченности и компактности операторов типа $b(x)a(D)$, дается «нестепенная» оценка поведения их сингулярных чисел.

§0. Введение

Пусть $(\mathcal{X},\rho)$ и $(\mathcal{Y},\sigma)$ два сепарабельные пространства с (σ-конечной) мерой. Рассмотрим линейный оператор T, отображающий пространство $L_1(\mathcal{X},\rho)+L_2(\mathcal{X},\rho)$ в пространство измеримых на $(\mathcal{Y},\sigma)$ функций. Назовем T *оператором типа* $\mathcal{E}$, если

$$
\begin{aligned}
T\colon L_1(\mathcal{X},\rho) &\to L_\infty(\mathcal{Y},\sigma) &&(\text{с операторной нормой } \mu_1=\mu_1(T)),\\
T: L_2(\mathcal{X},\rho) &\to L_2(\mathcal{Y},\sigma) &&(\text{с операторной нормой } \mu_2=\mu_2(T)).
\end{aligned}
$$

Интересующие нас объекты — операторы вида $T_{ab}=bTa$, где a, b обозначают операторы умножения на функцию a, b соответственно.

Подробному исследованию этих объектов посвящена работа [БКС], где решаются вопросы об ограниченности и компактности операторов T_{ab} в зависимости от свойств a, b. Там же даются оценки c-чисел в случае компактности. Здесь приводятся дальнейшие результаты в этом направлении.

Введем на пространстве с мерой $(\mathcal{Z},\zeta)$ *функциональные классы Лоренца* (ср. [БЛ, Т]). Рассмотрим для заданной ζ-измеримой функции $g\colon\mathcal{Z}\to\mathbb{C}$ ее функцию распределения

$$m(\tau,g)=\zeta(\{\,z\in\mathcal{Z}:|g(z)|>\tau\,\})$$

и ее невозрастающую перестановку

$$g^*(t):=\inf\{\,\tau:m(\tau,g)\leqslant t\,\}. \tag{0.1}$$

По определению функция g принадлежит *классу* $L_{p,\infty}(\mathcal{Z},\zeta)$ (слабому L_p-классу), если квазинорма

$$|g|_{p,\infty}:=\sup_{t>0}t^{1/p}g^*(t),\qquad 0<p\leqslant\infty,$$

Ключевые слова: сингулярные числа, интегральные операторы, нестепенные идеалы, интерполяционные функторы.

конечна. Пусть, далее, $L^0_{p,\infty}(\mathcal{Z},\zeta)$ — множество функций из $L_{p,\infty}$, для которых $g^*(t) = o(t^{1/p})$ при $t \to 0$ и $t \to \infty$.

Классы $L_{p,\infty}$ являются граничным случаем общей шкалы *пространств Лоренца*, которые вводятся соотношением

$$L_{p,q}(\mathcal{Z},\zeta) := \left\{ |g|_{p,q} := \left(\int\limits_0^\infty (t^{1/p} g^*(t))^q \, dt/t \right)^{1/q} < \infty \right\}, \tag{0.2}$$

где $0 < q < \infty$, $0 < p < \infty$. В дальнейшем иногда опускаем в обозначениях область определения, если это не приводит к недоразумениям или если конкретная реализация не важна для данного утверждения.

Исходным для настоящей работы является следующее предложение [БКС, теорема 4.2].

Предложение 0.1. *Пусть T — оператор типа $\mathcal{E}$, и пусть $a \in L_{p,\infty}(\mathcal{X},\rho)$, $b \in L_{p,\infty}(\mathcal{Y},\sigma)$, $p > 2$. Тогда*

$$T_{ab} \colon L_2(\mathcal{X},\rho) \to L_2(\mathcal{Y},\sigma),$$

и

$$\|T_{ab}\|_{L_2\to L_2} \leqslant C|a|_{p,\infty}|b|_{p,\infty}\mu_2^{1-\theta}\mu_1^\theta, \qquad p\theta = 2, \quad C = C(p).$$

Если, кроме того, выполнено хотя бы одно из условий $a \in L^0_{p,\infty}(\mathcal{X},\rho)$ $b \in L^0_{p,\infty}(\mathcal{Y},\sigma)$, то оператор T_{ab} компактен.

Приведенный признак ограниченности или компактности операторов типа T_{ab} довольно точен. Возникают, однако, следующие вопросы.

1. При некотором усилении предположений на одну из функций a, b, (скажем, $a^*(t) = o(t^{1/p})$ при $t \to 0$), свойство L_2-ограниченности оператора должно, по-видимому, сохраняться для второй функции из более широкого класса, чем $L_{p,\infty}$. Каковы эти классы?

2. Признак компактности в предложении 0.1 налагает дополнительные условия на поведение одной из функций a^*, b^* как при $t \to 0$, так и при $t \to \infty$. Можно ли «разделить» эти дополнительные требования между функциями a и b, т.е. поставить условия типа $a^*(t) = o(t^{1/p})$, $b^*(t) = o(t^{1/p})$ при $t \to \infty$ (или при $t \to 0$) как достаточные условия компактности?

Решение этих задач требует существенного обобщения и уточнения интерполяционной техники, примененной в [БКС] для установления предложения 0.1. В частности, мы рассматриваем действие нестепенных $K_{\eta,q}$-функторов (с функциональным параметром η, ср. [В]) на функциональные пространства. Выход из степенной шкалы имеет самостоятельный интерес и ведет к широкому обобщению предложения 0.1. Это позволяет также ответить на поставленные выше вопросы.

Предлагаемый путь уточнения и обобщения оценок применим и к другим «степенным» интерполяционным оценкам. В качестве примера мы приводим обобщение оценки поведения сингулярных чисел оператора T_{ab} в «нерегулярном» (см. [БКС]) случае.

Вопросам теории интерполяции посвящен §1. Интерполяционная техника развивается лишь в той мере, которая нужна для решения поставленной задачи. Основными здесь являются теоремы 1.1, 1.2, которые дают интерполяционные представления нестепенных идеалов через степенные. Доказательство теоремы 1.2 довольно громоздко и вынесено в дополнение. В §2 получено решение указанных выше задач. В §3 формулируется одно обобщение интерполяционных оценок поведения сингулярных чисел компактного оператора T_{ab}. Для этого $K_{\eta,q}$-функторы применяются к операторным идеалам (ср. [B]). Мы также приводим в качестве примера оценки числа отрицательных собственных состояний оператора Шрёдингера с «нерегулярным» возмущением (ср. [БС, БКС]).

Работа тесно связана с предыдущей статьей автора [B], где в основном изучались нестепенные операторные идеалы слабого типа. Сейчас больше внимания уделено аналогичным вопросам для пространств функций.

В этой работе $\mathfrak{R}$ — пространство всех ограниченных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве (в нашем случае — в L_2), $\mathfrak{S}_\infty$ обозначает идеал компактных операторов из $\mathfrak{R}$. Через $|\cdot|_{p,q}$, $|\cdot|_{f,q}$ обозначаем лоренцевы (при $q=\infty$ — слабые) квазинормы в функциональных пространствах, а через $|\cdot|_p$, $|\cdot|_f$ — аналогичные квазинормы в слабых операторных идеалах Σ_p, Σ_f (ср. [B]). Здесь индексы могут иметь числовые (p) или функциональные (f) значения. В дальнейшем $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{(i)}$, $\|\cdot\|_{\eta,q}$ — интерполяционные (квази)нормы, а $\|\cdot\|_p$ — обычная L_p-(квази)норма; она эквивалентна $|\cdot|_{p,p}$.

В заключение хочу выразить свою благодарность проф. М. Ш. Бирману за внимание и доброжелательное руководство при выполнении этой работы. Я благодарен также Институту Миттаг-Леффлера в Стокгольме за предоставленную мне возможность работать там в конце 1992 г.

§1. Применение нестепенных K-функторов к функциональным пространствам

1. Рассмотрим измеримую функцию $\eta\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$, обладающую всюду конечной функцией растяжения $M(\eta,\cdot)\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$

$$M(\eta,s) := \sup_{t>0} \eta(st)/\eta(t).$$

Предположим, что для функции η существуют конечные коэффициенты растяжения (см. [КПС])

$$\alpha(\eta) := \lim_{t\to 0} \ln M(\eta,t)/\ln t, \qquad \beta(\eta) := \lim_{t\to\infty} \ln M(\eta,t)/\ln t.$$

В §§1 и 2, если не оговорено иное, будем предполагать, что

$$-1 < \alpha(\eta) \leqslant \beta(\eta) < \infty. \tag{1.1}$$

Тогда в соответствии с [B] можно ввести интерполяционные функторы $K_{\eta,q}$. Для этого рассмотрим функционалы $\Phi(\eta,q,\cdot)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, заданные[1] на измеримых

[1]Хотя многие определения в дальнейшем допускают значения $q>0$, содержательные рассмотрения мы ведем при $q\geqslant 1$.

функциях $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$\Phi(\eta, q; h) := \Big(\int_0^\infty (\eta(t)h(t))^q\, dt/t\Big)^{1/q}, \qquad 1 \leqslant q < \infty,$$
$$\Phi(\eta, \infty, h) := \sup_{t>0} \eta(t)h(t).$$

Тогда функтор $K_{\eta,q}$ сопоставляет интерполяционной паре $\mathbf{A} = \{A_1, A_2\}$ (квази)нормированных пространств $(A_i, \|\cdot\|_{(i)}, i = 1, 2)$ промежуточные пространства

$$A_{\eta,q} := \big\{\, a \in A_1 + A_2 : \|a\|_{\eta,q} := \Phi(\eta, q, K(\cdot, a; \mathbf{A})) < \infty \,\big\},$$

где

$$K(t, a; \mathbf{A}) := \inf_{a=a_1+a_2} (\|a_1\|_{(1)} + t\|a_2\|_{(2)}), \qquad a_i \in A_i, \quad i = 1, 2.$$

Справедливо следующее предложение

Предложение 1.1 ([B]). *Пусть линейный оператор Q действует непрерывно из A_i в B_i с операторной (квази)нормой μ_i, $i = 1, 2$ соответственно, где $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$ — интерполяционные пары (квази)нормированных пространств. Тогда оператор Q непрерывно отображает $A_{\eta,q}$ в $B_{\eta,q}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. При этом справедлива следующая оценка на операторную (квази)норму*

$$\|Q\|_{A_{\eta,q}\to B_{\eta,q}} \leqslant \mu_1(Q) M(\eta, \mu_1(Q)/\mu_2(Q)).$$

Обычные интерполяционные функторы $K_{\theta,q}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, соответствуют функторам $K_{\eta,q}$, где $\eta(t) := t^{-\theta}$.

Ниже символ ς принимает значения 0 и ∞. При $q = \infty$ на пространствах $A_{\eta,\infty}$ можно ввести асимптотические функционалы

$$\Delta_\eta^{(\varsigma)}(a) := \limsup_{t\to\varsigma} \eta(t) K(t, a; \mathbf{A}), \qquad a \in A_{\eta,\infty}, \quad \varsigma = 0, \infty.$$

Для них имеет место модифицированное интерполяционное свойство, доказательство которого также можно найти в [B].

Предложение 1.1a. *В условиях предложения* 1.1 *при $q = \infty$ справедливы оценки*

$$\Delta_\eta^{(\varsigma)}(Qa) \leqslant \mu_1(Q) M(\eta, \mu_1(Q)/\mu_2(Q)) \Delta_\eta^{(\varsigma)}(a), \qquad a \in A_{\eta,\infty}, \quad \varsigma = 0, \infty.$$

Замечание 1.1. В случае $q = \infty$ сказанное выше остается в силе, когда $\alpha(\eta) = -1$, если при этом выполнена равномерная оценка $sM(\eta, s) \leqslant C(\eta)$ при $0 < s < 1$ (ср. [B]).

Цель этого параграфа — показать применение интерполяционной техники к функциональным пространствам. Прежде всего приведем некоторые общие факты из теории $K_{\eta,q}$-функторов.

Лемма 1.1. *Пусть для измеримой функции* $\eta\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ *функция растяжения* $M(\eta,\cdot)$ *всюду конечна, и пусть коэффициенты растяжения удовлетворяют условию* (1.1). *Пусть* $q\in[0,\infty]$. *Тогда существуют постоянные* $c(\eta,q)$, $C(\eta,q)$: $0<c(\eta,q),C(\eta,q)<\infty$ *такие, что справедлива оценка*

$$c(\eta,q)\Phi(\eta,q;h_s)\leqslant\eta(s)\leqslant C(\eta,q)\Phi(\eta,q;h_s),\qquad h_s(t):=\min\{1,t/s\}.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\begin{aligned}\Phi(\eta,q;h_s(t))&=\left(s^{-q}\int_0^s(t\eta(t))^q\,dt/t+\int_s^\infty(\eta(t))^q\,dt/t\right)^{1/q}\\&=\eta(s)\left(s^{-q}\int_0^s(t\eta(t)/\eta(s))^q\,dt/t+\int_s^\infty(\eta(t)/\eta(s)^q\,dt/t\right)^{1/q}\\&\leqslant\eta(s)\left(s^{-q}\int_0^s(tM(\eta,t/s))^q\,dt/t+\int_s^\infty(M(\eta,t/s))^q\,dt/t\right)^{1/q}\\&\leqslant\eta(s)\left(\int_0^1(\xi M(\eta,\xi))^q\,d\xi/\xi+\int_1^\infty(M(\eta,\xi))^q\,d\xi/\xi\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

В силу оценки (1.1) интегралы конечны, и $\Phi(\eta,q;h_s(t))\leqslant C(\eta,q)\eta(s)$. Такие же выкладки приводят к обратной оценке, если учесть, что

$$0<\inf_{t>0}\eta(ts)/\eta(t)=1/M(\eta,1/s),\qquad 0<s<\infty.\quad\bullet$$

Следствие 1.1. *В условиях леммы* 1.1 *имеет место неравенство*

$$K(t,a,\mathbf{A})\leqslant c_1(\eta,q)\|a\|_{\eta,q}/\eta(t).\tag{1.2}$$

Для доказательства достаточно подействовать функционалом $\Phi(\eta,q;\cdot)$ на известное неравенство $\min\{1,t/s\}K(s,a,\mathbf{A})\leqslant K(t,a,\mathbf{A})$ и применить лемму 1.1. $\bullet$

Неравенство (1.2) позволяет нам установить следующую лемму, представляющую собой частичный аналог теоремы реитерации из теории степенных функторов. Доказательство леммы 1.2 следует доказательству аналогичного факта в степенном случае (ср. [БЛ]).

Лемма 1.2. *Рассмотрим функции* η, η_0, η_1, *удовлетворяющие условиям леммы* 1.1. *Пусть функция* $\nu=\eta_0/\eta_1$ *дифференцируема,* $\nu'(t)t\geqslant\varepsilon\nu(t)$ *для некоторого* $\varepsilon>0$, *и пусть функция* $\omega(t)=\eta_0(t)\eta(\nu(t))$ *также удовлетворяет требованиям леммы* 1.1.

Тогда для любой интерполяционной пары пространств $\mathbf{A} = \{A_0, A_1\}$ *справедливо при* $1 \leqslant q, q_0, q_1 \leqslant \infty$ *непрерывное вложение*

$$(A_{\eta_0,q_0}, A_{\eta_1,q_1})_{\eta,q} \hookrightarrow A_{\omega,q}.$$

Доказательство. Рассмотрим разложение $a = a_0 + a_1$, $a_i \in A_{\eta_i,q_i}$, $i = 0,1$. Тогда по следствию 1.1

$$\begin{aligned} K(t,a,\mathbf{A}) &\leqslant K(t,a_0,\mathbf{A}) + K(t,a_1,\mathbf{A}) \\ &\leqslant c((1/\eta_0(t))\|a_0\|_{\eta_0,q_0} + (1/\eta_1(t))\|a_1\|_{\eta_1,q_1}), \qquad c = c(\eta_0,\eta_1,q), \end{aligned}$$

и тем самым

$$K(t,a,\mathbf{A}) \leqslant (c/\eta_0(t))K(\eta_0(t)/\eta_1(t), a, \{A_{\eta_0,q_0}, A_{\eta_1,q_1}\}).$$

Действуя интерполяционным функтором $K_{\omega,q}$, отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \|a\|_{A_{\omega,q}} &= \Phi(\omega,q;K(t,a,\mathbf{A})) \\ &\leqslant c\Big(\int_0^\infty (\omega(t)K(\eta_0(t)/\eta_1(t), a, \{A_{\eta_0,q_0}, A_{\eta_1,q_1}\}))^q \, dt/t\Big)^{1/q}. \end{aligned}$$

Замена переменных $\xi = \eta_0(t)/\eta_1(t)$ дает (при $\hat{\mathbf{A}} := \{A_{\eta_0,q_0}, A_{\eta_1,q_1}\}$)

$$\|a\|_{A_{\omega,q}} \leqslant C\|a\|_{\hat{A}_{\eta,q}}. \quad \bullet$$

Далее нам понадобятся следующие два предложения из теории степенных $K_{\theta,q}$-функторов (см. [X, БЛ]). Символ $\asymp$ означает наличие двусторонней оценки.

Предложение 1.2. *Для интерполяционной пары пространств* $\mathbf{A} = \{A_0, A_1\}$ *при* $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 \leqslant 1$, $1 \leqslant q_0 \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_1 \leqslant \infty$, $\lambda = \theta_1 - \theta_0$ *имеет место соотношение*

$$\begin{aligned} &K(t,a,\{A_{\theta_0,q_0}, A_{\theta_1,q_1}\}) \\ &\asymp \Big(\int_0^{t^{1/\lambda}} (s^{-\theta_0}K(s,a,\mathbf{A}))^{q_0} \, ds/s\Big)^{1/q_0} + t\Big(\int_{t^{1/\lambda}}^\infty (s^{-\theta_1}K(s,a,\mathbf{A}))^{q_1} \, ds/s\Big)^{1/q_1}. \end{aligned}$$

Кроме того, при $\lambda = \theta_1$ *справедливо соотношение*

$$K(t,a,\{A_0, A_{\theta_1,q_1}\}) \asymp t\Big(\int_{t^{1/\lambda}}^\infty (s^{-\theta_1}K(s,a,\mathbf{A}))^{q_1} \, ds/s\Big)^{1/q_1},$$

а при $\lambda = 1 - \theta_0$ — *соотношение*

$$K(t,a,\{A_{\theta_0,q_0}, A_1\}) \asymp \Big(\int_0^{t^{1/\lambda}} (s^{-\theta_0}K(s,a,\mathbf{A}))^{q_0} \, ds/s\Big)^{1/q_0}.$$

Следующее утверждение относится к шкале пространств L_p.

Предложение 1.3. *Пусть* $a \in L_p + L_\infty$, $0 < p < \infty$. *Тогда*

$$K(t, a; \{L_p, L_\infty\}) \asymp \Big(\int_0^{t^p} \Big(a^*(s))^p\, ds\Big)^{1/p}, \tag{1.3}$$

где a^* *— невозрастающая перестановка функции* a.

2. Применение $K_{\eta,q}$-функторов к функциональным пространствам приводит к необходимости расширить шкалу пространств Лоренца $L_{p,q}$. Пусть $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ — измеримая функция с всюду конечной функцией растяжения $M(f,s)$, и пусть для коэффициентов растяжения выполнено неравенство $0 < \alpha(f) \leqslant \beta(f) < \infty$. Введем на пространстве с мерой $(\mathcal{Z},\zeta)$ шкалу пространств

$$L_{f,q}(\mathcal{Z},\zeta) := \left\{ g(x) : |g|_{f,q} := \left(\int_0^\infty (f(t)g^*(t))^q\, dt/t\right)^{1/q} < \infty \right\}, \qquad 1 \leqslant q < \infty,$$

где g^* — невозрастающая перестановка измеримой функции g. В случае $q = \infty$ примем

$$L_{f,\infty}(\mathcal{Z},\zeta) := \{\, g(x) : |g|_{f,\infty} := \sup_{t>0} f(t)g^*(t) < \infty \,\}.$$

В дальнейшем мы опускаем в обозначениях пространство с мерой, если это не ведет к недоразумениям.

Привычные классы Лоренца $L_{p,q}$ соответствуют классам $L_{f,q}$, где $f(t) = t^{1/p}$, $p > 0$. На слабых классах $L_{f,\infty}$ определены непрерывные по соответствующей квазинорме асимптотические функционалы

$$\mathfrak{D}_f^{(\varsigma)}(g) := \limsup_{t\to\varsigma} f(t)g^*(t), \qquad g \in L_{f,\infty}, \quad \varsigma = 0, \infty.$$

Теорема 1.1. *Пусть* $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ *имеет конечные коэффициенты растяжения* $\alpha(f)$, $\beta(f)$: $0 < \alpha(f) \leqslant \beta(f) < \infty$. *Для любого* r : $\beta(f) < r < \infty$ *положим* $\eta_r(t) = f(t^{1/r})t^{-1}$. *Тогда имеет место равенство*

$$L_{f,q} = \{L_{1/r}, L_\infty\}_{\eta_r,q}, \qquad q \geqslant \max\{1, 1/r\},$$

с эквивалентностью (квази)норм.

Следствие 1.2. *Пространства* $L_{f,q}$ *— полные. При* $\beta(f) < 1$ *они нормируемы* (ср. соответствующую аргументацию в [B], где теорема 1.1 доказана в случае $q = \infty$).

Доказательство теоремы 1.1. Применим (1.3); тогда $(\eta = \eta_r)$

$$\|a\|_{\eta,q} = \left(\int_0^\infty (\eta(t)K(t,a,\{L_{1/r},L_\infty\}))^q\, dt/t\right)^{1/q}$$

$$\asymp \left(\int_0^\infty \left(\eta(t)\left(\int_0^{t^{1/r}} (a^*(\tau))^{1/r}\, d\tau\right)^r\right)^q dt/t\right)^{1/q}, \tag{1.4}$$

и, следовательно, при $c_0, c_1 > 0$

$$c_0\|a\|_{\eta,q} \geqslant \left(\int_0^\infty (\eta(t)ta^*(t^{1/r}))^q\,dt/t\right)^{1/q}$$
$$= \left(\int_0^\infty (f(t^{1/r})a^*(t^{1/r}))^q\,dt/t\right)^{1/q} = c_1|a|_{f,q}.$$

С другой стороны, в силу (1.4)

$$\|a\|_{\eta,q} \asymp \left(\int_0^\infty\left(\int_0^{t^{1/r}} (f(t^{1/r})t^{-1}a^*(\tau))^{1/r}\,d\tau\right)^{rq} dt/t\right)^{1/q}$$
$$= \left(\int_0^\infty\left(\int_0^1 (f(t^{1/r})a^*(t^{1/r}s))^{1/r}\,ds\right)^{rq} dt/t\right)^{1/q}$$
$$= \left(\int_0^\infty\left(\int_0^1 (f(t^{1/r}s)a^*(t^{1/r}s)M(f,1/s))^{1/r}\,ds\right)^{rq} dt/t\right)^{1/q}.$$

Применим во внутреннем интеграле неравенство Гёльдера при $p = qr > 1$. Тогда

$$\|a\|_{\eta,q} \leqslant c_2\left(\int_0^\infty t^{-1}\,dt\left\{\int_0^1 (f(t^{1/r}s)a^*(t^{1/r}s))^q(M(f,1/s))^{1/r}\,ds\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\int_0^1 (M(f,1/s))^{1/r}\,ds\right)^{qr-1}\right\}\right)^{1/q}.$$

В наших предположениях интеграл от функции растяжения представляет собой конечную величину, и тем самым

$$\|a\|_{\eta,q} \leqslant c_3\left(\int_0^1 ds(M(f,1/s))^{1/r}\int_0^\infty (f(t^{1/r}s)a^*(t^{1/r}s))^q\,dt/t\right)^{1/q} \leqslant c_4|a|_{f,q}. \quad \bullet$$

В применениях к операторам типа $\mathcal{E}$ теорема 1.1 обеспечивает, в частности, интерполяцию между пространствами L_1 и L_∞. Чтобы обеспечить интерполяцию для пары $\{L_1, L_2\}$, понадобится еще следующий результат, доказательство которого приводится в дополнении.

Теорема 1.2. *Для любых* p_0, p_1: $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, *и любой функции* η, *удовлетворяющей условиям леммы* 1.1, *имеет место равенство*

$$(L_{p_0}, L_{p_1})_{\eta,q} = L_{f,q}, \qquad f(t) = \eta(t^\gamma)t^{1/p_0}, \quad \gamma = p_0^{-1} - p_1^{-1}, \tag{1.5}$$

с эквивалентностью (квази)норм.

Для всякой функции f с коэффициентами растяжения, удовлетворяющими оценке

$$0 < p_1^{-1} < \alpha(f) \leqslant \beta(f) < p_0^{-1} < \infty, \tag{1.6}$$

функция $\eta(t) = f(t^{1/\gamma})t^{-1/\gamma p_0}$, $\gamma = p_0^{-1} - p_1^{-1}$, удовлетворяет условиям леммы 1.1. Поэтому верно

Следствие 1.3. *Если для коэффициентов растяжения функции f выполнено* (1.6), *то пространство* $L_{f,q}$ *имеет интерполяционное представление* (1.5).

Выделим частный случай теоремы 1.2, который понадобится в §2. Поскольку $K(t, a, \{A_1, A_2\}) = tK(t^{-1}, a, \{A_2, A_1\})$, то

$$(L_2, L_1)_{\eta,2} = (L_1, L_2)_{\nu,2}, \qquad \nu(t) = t^{-1}\eta(t^{-1})$$

(функции η и ν удовлетворяют условиям леммы 1.1 одновременно). Поэтому

$$(L_2, L_1)_{\eta,2} = L_{f,2}, \qquad f(t) = t^{1/2}\eta(t^{-1/2}). \tag{1.7}$$

Отметим еще, что, согласно теореме 1.1,

$$(L_2, L_\infty)_{\eta,2} = L_{f,2}, \qquad f(t) = t^{1/2}\eta(t^{1/2}). \tag{1.8}$$

§2. Интерполяционные оценки для операторов T_{ab}

1. На основе сказанного в §1 можно получить следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть* $f_i\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ — *измеримые функции с показателями растяжения* $0 < \alpha(f_i) \leqslant \beta(f_i) < \infty$, $i = 1, 2$. *Пусть далее* $\alpha(f_1 f_2) > 0$, $v \in L_{f_1,\infty}$, $u \in L_{f_2,q}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. *Тогда имеет место неравенство*

$$|vu|_{f_1 f_2,q} \leqslant c|v|_{f_1,\infty}|u|_{f_2,q}, \qquad c = c(f_1, f_2, q) < \infty.$$

Доказательство воспроизводит доказательство из [БКС] аналогичного факта, для случая $f_i(t) = t^{1/q_i}$, но теперь используются интерполяционные функторы $K_{\eta,q}$. Исходим из неравенства Гёльдера

$$\|vu\|_r \leqslant \|v\|_p\|u\|_s, \qquad r^{-1} = p^{-1} + s^{-1}, \quad 0 < r, s, p \leqslant \infty.$$

Пусть Q_w обозначает оператор умножения на функцию w. При фиксированном $u \in L_s$ оператор Q_u действует из L_p в L_r, $r^{-1} = p^{-1} + s^{-1}$, $p > 0$, с операторной нормой $\|u\|_s$. Рассмотрим это неравенство при $p = \mathfrak{q}$ и $p = \infty$ соответственно. Тогда для оператора Q_u возникают интерполяционные пары

$$Q_u\colon \{L_{\mathfrak{q}}, L_\infty\} \to \{L_r, L_s\}, \qquad r^{-1} = \mathfrak{q}^{-1} + s^{-1}.$$

Действуя интерполяционным функтором $K_{\eta_1,\infty}$, имеем в силу теорем 1.1 и 1.2

$$(L_{\mathfrak{q}}, L_\infty)_{\eta_1,\infty} = L_{f_1,\infty}, \qquad \eta_1(t) = f_1(t^{\mathfrak{q}})t^{-1},$$
$$(L_r, L_s)_{\eta_1,\infty} = L_{g_s,\infty}, \qquad g_s(t) = f_1(t)t^{1/s},$$

а следовательно,

$$|vu|_{g_s,\infty} \leqslant c(f_1, s)|v|_{f_1,\infty}\|u\|_s, \qquad 0 < s \leqslant \infty.$$

Исходя из этой оценки, повторим эти рассуждения применительно к оператору Q_v для $s = \mathfrak{p}$ и $s = \infty$. При этом выбираем $\mathfrak{p}$ так, чтобы было $\mathfrak{p} < \min\{1, 1/\beta(f_2)\}$. Тогда

$$Q_v : \{L_{\mathfrak{p}}, L_\infty\} \to \{L_{g_{\mathfrak{p}},\infty}, L_{g_\infty,\infty}\}.$$

Для первой пары имеем

$$(L_{\mathfrak{p}}, L_\infty)_{\eta_2,q} = L_{f_2,q}, \qquad \eta_2(t) = f_2(t^{\mathfrak{p}})t^{-1}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty.$$

Остается описать пространство $(L_{g_{\mathfrak{p}},\infty}, L_{g_\infty,\infty})_{\eta_2,q}$. Чтобы это сделать, отметим, что при $\mathfrak{r} > 0$: $\mathfrak{r}^{-1} > \mathfrak{q}^{-1} + \mathfrak{p}^{-1}$ в силу теоремы 1.1 выполнено

$$(L_{g_{\mathfrak{p}},\infty}, L_\infty)_{\nu_1,\infty} = L_{g_{\mathfrak{p}},\infty}, \qquad \nu_1(t) = t^{-1+\mathfrak{r}/\mathfrak{p}} f_1(t^{\mathfrak{r}}),$$
$$(L_{g_\infty,\infty}, L_\infty)_{\nu_2,\infty} = L_{g_\infty,\infty}, \qquad \nu_2(t) = t^{-1} f_1(t^{\mathfrak{r}}).$$

Поскольку $\omega(t) = \nu_1(t)\eta_2(\nu_1(t)/\nu_2(t)) = t^{-1}f_1(t^{\mathfrak{r}})f_2(t^{\mathfrak{r}})$ удовлетворяет условиям леммы 1.1, то по лемме 1.2

$$(L_{g_{\mathfrak{p}},\infty}, L_{g_\infty})_{\eta_2,q} \hookrightarrow (L_{\mathfrak{r}}, L_\infty)_{\omega,q} = L_{f_1 f_2,q}.$$

Суммируя сказанное, видим, что

$$|vu|_{f_1 f_2,q} \leqslant c(f_1, f_2, q)|v|_{f_1,\infty}|u|_{f_2,q}. \quad \bullet$$

Аналогично доказывается обобщенное неравенство Юнга, которое мы лишь сформулируем (оно в дальнейшем не используется).

Лемма 2.2. *Пусть $f_i\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ измеримые функции с показателями растяжения $0 < \alpha(f_i) \leqslant \beta(f_i) < 1$, $i = 1, 2$. Пусть далее $\alpha(f_1 f_2) > 1$, $v \in L_{f_1,\infty}$, $u \in L_{f_2,q}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Тогда имеет место неравенство*

$$|v * u|_{g,q} \leqslant c(f_1, f_2, q)|v|_{f_1,\infty}|u|_{f_2,q}, \qquad g(t) = f_1(t)f_2(t)t^{-1},$$

с некоторой постоянной $c(f_1, f_2, q) < \infty$.

Теперь мы можем получить решение вопросов, отмеченных во Введении.

Теорема 2.1. *Пусть функция η удовлетворяет условиям леммы* 1.1. *Рассмотрим оператор T типа $\mathcal{E}$ и две функции a, b: $a \in L_{\omega_1,\infty}(\mathcal{X},\rho)$, $\omega_1(t) = \eta(t^{-1/2})$; $b \in L_{\omega_2,\infty}(\mathcal{Y},\sigma)$, $\omega_2(t) = 1/\eta(t^{1/2})$. Тогда оператор $T_{ab} = bTa$ действует ограниченно из $L_2(\mathcal{X},\rho)$ в $L_2(\mathcal{Y},\sigma)$, причем*

$$\|bTa\|_{L_2\to L_2} \leqslant c(\eta)|a|_{\omega_1,\infty}|b|_{\omega_2,\infty}\mu_2 M(\eta,\mu_2/\mu_1). \tag{2.1}$$

Доказательство. Согласно соотношениям (1.7), (1.8), оператор T_{ab} действует из $(L_2,L_1)_{\eta,2} = L_{f_1,2}$, $f_1(t) = t^{1/2}\eta(t^{-1/2})$ в пространство $(L_2,L_\infty)_{\eta,2} = L_{f_2,2}$, $f_2(t) = t^{1/2}\eta(t^{1/2})$ с операторной нормой (см. предложение 0.1) $\mu_2 M(\eta,\mu_2/\mu_1)$. С учетом леммы 2.1 следующая диаграмма завершает доказательство

$$bTa\colon L_2 = L_{t^{1/2},2} \to L_{t^{1/2}\eta(t^{-1/2}),2} \to L_{t^{1/2}\eta(t^{1/2}),2} \to L_2. \quad \bullet$$

Обсудим полученный результат. Для простоты рассмотрим случай $a \in L_{\omega_1,\infty}$, где $\omega_1(t) = t^{1/p}$ для $0 < t \leqslant 1$, и $\omega_1(t) = t^{1/p}h(t)$ для $t \geqslant 1$. Предположим, что функция h монотонно стремится к бесконечности, причем так, чтобы к функции $\eta(t) = \omega_1(t^{-2})$ была применима лемма 1.1. В качестве h можно выбрать, например, достаточно быстро растущую, медленно меняющуюся функцию (ср. [C, B]). Тогда $a \in L_{p,\infty}$ и $a^*(t) = o(t^{1/p})$ при $t \to \infty$. Из теоремы 2.1 сразу следует, что оператор T_{ab} ограничен для функций $b \in L_{\omega_2,\infty}$, где $\omega_2(t) = t^{1/p}/h(1/t)$ для $0 < t \leqslant 1$, $\omega_2(t) = t^{1/p}$ для $t \geqslant 1$. Видно, что для функции b может нарушаться условие принадлежности к $L_{p,\infty}$ квалифицированным образом; именно более жесткие условия на поведение функции a^* в бесконечности приводят к более слабым требованиям на функцию b^* около нуля (и наоборот). Аналогично в случае $a^*(t) = o(t^{1/p})$ при $t \to 0$ имеет место ослабление условия на b^* в бесконечности.

Эти рассуждения приводят к следующей теореме.

Теорема 2.2. *Если в условиях теоремы* 1.1 *выполнено хотя бы одно из условий*

a) $\mathfrak{D}^{(\varsigma)}_{\omega_1}(a) = 0$ *при* $\varsigma = 0$ *и* $\varsigma = \infty$,

b) $\mathfrak{D}^{(\varsigma)}_{\omega_1}(b) = 0$ *при* $\varsigma = 0$ *и* $\varsigma = \infty$,

c) $\mathfrak{D}^{(0)}_{\omega_1}(a) = 0$ *и* $\mathfrak{D}^{(0)}_{\omega_2}(b) = 0$,

d) $\mathfrak{D}^{(\infty)}_{\omega_1}(a) = 0$ *и* $\mathfrak{D}^{(\infty)}_{\omega_2}(b) = 0$,

то оператор T_{ab} компактно отображает $L_2(\mathcal{X},\rho)$ в $L_2(\mathcal{Y},\sigma)$.

Доказательство. a), b). Без ограничения общности рассмотрим случай b). Обозначим через $|\cdot|_\delta$ квазинорму на операторном идеале

$$\Sigma_\delta = \{\, Q \in \mathfrak{S}_\infty : |Q|_\delta := \sup_{n\in\mathbb{N}} n^{1/\delta}s_n(Q) < \infty \,\}, \qquad \delta > 0.$$

Будем исходить из обобщенного неравенства Цвикеля, полученного в [БКС],

$$|T_{ab}|_\delta \leqslant C(\delta)|a|_{\delta,\infty}\|b\|_\delta \mu_2^{1-\theta}\mu_1^\theta, \qquad \delta > 2, \quad \delta\theta = 2.$$

Это неравенство несколько удобнее использовать в ослабленной, но симметричной форме

$$|T_{ab}|_\delta \leqslant C(\delta)\|a\|_\delta\|b\|_\delta \mu_2^{1-\theta}\mu_1^\theta. \tag{2.2}$$

Используем (2.2) при $\delta = p_0$ и $\delta = p_1$, фиксируя $b \in L_{p_0} \cap L_{p_1}$. Применим к отображению $a \mapsto T_{ab}$ функтор $K_{\vartheta,\infty}$, $\vartheta = \omega_1(t^{1/\gamma})t^{-1/\gamma p_0}$, $\gamma = p_0^{-1} - p_1^{-1}$. Тогда заведомо получим $T_{ab} \in \mathfrak{S}_\infty$ для $a \in L_{\omega_1,\infty}$. Остается сослаться на оценку (2.1) и на плотность $L_{p_0} \cap L_{p_1}$ в $L^0_{\omega_2,\infty}$.

c), d). Докажем, например, случай d). Если $a^*(t) = o(\omega_1(t))$ при $t \to \infty$, то найдется функция h такая, что h — неубывающая гладкая функция, $h(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, $h(t) = 1$ при $t \leqslant 1$ и $a \in L_{\nu_1,\infty}$, $\nu_1(t) = \omega_1(t)h(t)$. Ясно, что тогда $b \in L^0_{\nu_2,\infty}$, где $\nu_2(t) = \omega_2(t)/h(t^{-1})$. Далее нетрудно убедится в следующем: возможен такой выбор h, что теорема 2.1 применима к функциям ν_1, ν_2 (соответствующая функция η при этом вычисляется по ν_1). В силу $b \in L^0_{\nu_2,\infty}$ дело сводятся к случаю b). •

2. Вернемся еще раз к теоремам 1.1 и 1.2 и к вытекающим из них леммам 2.1 и 2.2. Как мы видели, эти утверждения позволяют работать в шкале более тонкой, чем степенная. В частности, они позволяют учесть разные степенные оценки поведения функции вблизи сингулярностей и в области ее убывания. Так, например, функция $g(\xi) = 1/(|\xi|^2 - \lambda)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$, при $d > 2$ не принадлежит $L_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$ ни при каком значении p; с другой стороны, $g^*(t) \asymp t^{-1}$, $t \to 0$, и $g^*(t) \asymp t^{-2/d}$, $t \to \infty$.

Введем классы

$$L^q_{p_0,p_1} := L_{f,q}, \qquad 0 < p_0, p_1 < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{2.3}$$

где

$$f(t) = t^{1/p_0} \quad \text{при} \quad t \leqslant 1, \qquad f(t) = t^{1/p_1} \quad \text{при} \quad t \geqslant 1.$$

(В нашем примере $g \in L^\infty_{1,d/2}$).

Определение (2.3) корректно, поскольку

$$M(f,t) = \max\{t^{1/p_0}, t^{1/p_1}\},$$

а тогда $0 < \min\{p_0^{-1}, p_1^{-1}\} = \alpha(f) \leqslant \beta(f) = \max\{p_0^{-1}, p_1^{-1}\}$. Очевидны вложения

$$\begin{aligned} &L^{q_0}_{p_0,p_1} \hookrightarrow L^{q_1}_{p_0,p_1}, \qquad 1 \leqslant q_0 < q_1 \leqslant \infty, \\ &L^q_{p_0,p_1} \hookrightarrow L^q_{r_0,r_1}, \qquad 0 < r_0 \leqslant p_0 < \infty, \quad 0 < p_1 \leqslant r_1 < \infty. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из теоремы 1.2 вытекает

Теорема 2.3. *Если T — оператор типа $\mathcal{E}$, то он непрерывен как оператор*

$$T\colon L^q_{p_0,p_1} \to L^q_{p'_1,p'_0}, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \quad {p'_i}^{-1} = 1 - p_i^{-1}, \quad 1 < p_i < 2, \quad i = 0,1.$$

При этом операторная квазинорма оценивается следующим образом

$$\|T\|_{L^q_{p_0,p_1} \to L^q_{p'_1,p'_0}} \leqslant c(p_0,p_1,q)\mu_1 \max\{(\mu_1/\mu_2)^{1/p_0}, (\mu_1/\mu_2)^{1/p_1}\}.$$

Индексы тем самым «меняются местами». Далее, частным случаем леммы 2.1 является

Лемма 2.3. *Если $u \in L^\infty_{p_0,p_1}$, $v \in L^q_{r_0,r_1}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < p_0,p_1,r_0,r_1 < \infty$, то $vu \in L^q_{s_0,s_1}$, $s_i^{-1} = p_i^{-1} + r_i^{-1}$, $i = 0,1$, и справедлива оценка*

$$|vu|_{L^q_{s_0,s_1}} \leqslant c(r_0,r_1,p_0,p_1,q)|u|_{L^\infty_{p_0,p_1}} |v|_{L^q_{r_0,r_1}}.$$

Наконец, приведем вариант неравенства Юнга, которое теперь принимает следующий вид.

Лемма 2.4. *Если $u \in L^\infty_{p_0,p_1}$, $v \in L^q_{r_0,r_1}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 < p_0,p_1,r_0,r_1 < \infty$, $p_i^{-1}+r_i^{-1} > 1$, $i = 1,2$, то $v * u \in L^q_{s_0,s_1}$, $s_i^{-1} = p_i^{-1} + r_i^{-1} - 1$, $i = 1,2$, и справедлива оценка*

$$|v * u|_{L^q_{s_0,s_1}} \leqslant c(r_0,r_1,p_0,p_1,q)|u|_{L^\infty_{p_0,p_1}} |v|_{L^q_{r_0,r_1}}.$$

Отметим еще, что в силу вложения (2.4) число $p_0^{-1} + r_0^{-1}$ всегда можно выбрать большим единицы. Следовательно, только условие $p_1^{-1} + r_1^{-1} > 1$ существенно ограничивает применимость неравенства Юнга.

В заключение сформулируем теорему 2.1 для $a \in L^\infty_{p_0,p_1}$, $b \in L^\infty_{p_1,p_0}$. При этом можно вычислить входящую в оценку (2.1) функцию растяжения явно.

Теорема 2.4. *Пусть $a \in L^\infty_{p_0,p_1}(\mathcal{X},\rho)$, $b \in L^\infty_{p_1,p_0}(\mathcal{Y},\sigma)$, $2 < p_0,p_1 < \infty$. Тогда оператор $T_{ab} = bTa$ ограниченно действует из $L_2(\mathcal{X},\rho)$ в $L_2(\mathcal{Y},\sigma)$ и имеет место оценка*

$$\|T_{ab}\|_{L_2 \to L_2} \leqslant c(p_0,p_1)|a|_{L^\infty_{p_0,p_1}} |b|_{L^\infty_{p_1,p_0}} \max\{\mu_2^{1-\theta_0}\mu_1^{\theta_0}, \mu_2^{1-\theta_1}\mu_1^{\theta_1}\}, \qquad \theta_i p_i = 2, \quad i = 0,1.$$

Результаты этого пункта можно получить из стандартных степенных результатов без привлечения нестепенной интерполяции. Действительно, легко видеть, что

$$L^q_{p_0,p_1} = \begin{cases} L_{p_0,q} + L_{p_1,q} & \text{для } p_0 \leqslant p_1, \\ L_{p_0,q} \cap L_{p_1,q} & \text{для } p_0 \geqslant p_1, \end{cases} \qquad 0 < p_0,p_1 < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{2.5}$$

с эквивалентностью (квази)норм. Выведем, например, теорему 2.4 из предложения 0.1. Рассмотрим случай $p_0 \leqslant p_1$. Пусть $b \in L_{p_0,\infty} \cap L_{p_1,\infty}$, $2 < p_0,p_1 < \infty$, $|b|_{L_{p_0,\infty} \cap L_{p_1,\infty}} := \max\{|b|_{L_{p_0,\infty}}, |b|_{L_{p_1,\infty}}\}$. Тогда имеют место неравенства

$$\|bTa_0\|_{L_2 \to L_2} \leqslant c(q_0)|a_0|_{p_0,\infty}|b|_{L_{p_0,\infty} \cap L_{p_1,\infty}} \mu_2^{1-\theta_0}\mu_1^{\theta_0}, \qquad p_0\theta_0 = 2, \quad a_0 \in L_{p_0,\infty},$$

$$|bTa_1\|_{L_2 \to L_2} \leqslant c(q_1)|a_1|_{p_1,\infty}|b|_{L_{p_0,\infty} \cap L_{p_1,\infty}} \mu_2^{1-\theta_1}\mu_1^{\theta_1}, \qquad p_1\theta_1 = 2, \quad a_1 \in L_{p_1,\infty}.$$

Пусть теперь $a \in L_{p_0,\infty} + L_{p_1,\infty}$. Тогда

$$|a|_{L_{p_0,\infty}+L_{p_1,\infty}} := \inf(|a_0|_{L_{p_0,\infty}} + |a_1|_{L_{p_1,\infty}}),$$

где inf вычисляется по всем представлениям $a = a_0 + a_1$, $a_i \in L_{p_i,\infty}$, $i = 0, 1$. В силу линейной зависимости T_{ab} от функции a имеем

$$\|T_{ab}\| \leqslant c(p_0, p_1)|a|_{L_{p_0,\infty}+L_{p_1,\infty}}|b|_{L_{p_0,\infty}\cap L_{p_1,\infty}} \max\{\mu_2^{1-\theta_0}\mu_1^{\theta_0}, \mu_2^{1-\theta_1}\mu_1^{\theta_1}\}, \tag{2.6}$$

где $p_i\theta_i = 2$, $i = 0, 1$. В силу (2.5) это соответствует оценке теоремы 2.4. Случай $p_0 > p_1$ рассматривается аналогично. •

Замечание 2.1. Отметим, что теорема 2.4 в формулировке (2.6) верна и для бесконечных показателей, т.е. неравенство (2.6) справедливо для $2 < p_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1$. Подобным же образом в условиях теоремы 2.3 можно считать $1 \leqslant p_i \leqslant 2$, а в лемме 2.3 $0 < p_i \leqslant \infty$, $0 < r_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1$.

§3. Нестепенные оценки сингулярных чисел оператора T_{ab} в нерегулярном случае

1. В этом параграфе мы хотим показать, как можно распространить интерполяционный путь получения оценок сингулярных чисел операторов T_{ab} на нестепенной случай. Для этого применим установленные в [В] интерполяционные теоремы к базисным неравенствам работы [БКС], заменяя использованные там степенные K-функторы на более общие. Прежде всего надо ввести нестепенные операторные идеалы. Мы напомним здесь только их определение. Подробности можно найти в [В].

Для двух функций $f, g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ будем писать $f \approx g$, если существуют постоянные c, C: $0 < c \leqslant C < \infty$ такие, что

$$cf(t) \leqslant g(t) \leqslant Cf(t), \quad \text{для всех } t > 0,$$

и

$$\lim_{t\to\infty} g(t)/f(t) = 1.$$

Пусть $\mathfrak{P}(\mathbb{R}_+)$ — множество всех измеримых неубывающих вогнутых (непрерывных) функций $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, для которых $\lim f(t) = 0$ при $t \to \infty$ и $\lim f(t) = \infty$ при $t \to \infty$. Непрерывная функция $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ принадлежит $\mathfrak{P}_p(\mathbb{R}_+)$ $(p \geqslant 0)$, если для каждого $q > p$ найдется $f_q \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}_+)$ такая, что $f \approx (f_q)^q$; при этом p — точная нижняя грань таких чисел q. При $f \in \mathfrak{P}_p(\mathbb{R}_+)$, $p \geqslant 0$, мы имеем для коэффициентов растяжения неравенства

$$0 \leqslant \alpha(f) \leqslant \beta(f) \leqslant p.$$

Пусть Q — компактный оператор и $s_k(Q)$ — упорядоченная (с учетом кратностей) последовательность его сингулярных чисел. Определим класс операторов Σ_f для $f \in \mathfrak{P}_p(\mathbb{R}_+)$

$$\Sigma_f := \Big\{ Q \in \mathfrak{S}_\infty : |Q|_f := \sup_{n\in\mathbf{N}} s_n(Q)f(n) < \infty \Big\}.$$

На классе Σ_f введем функционалы

$$\Delta_f(Q) := \limsup_{n\to\infty} s_n(Q)f(n),$$
$$\delta_f(Q) := \liminf_{n\to\infty} s_n(Q)f(n),$$

которые заведомо конечны на классе Σ_f. Функционал $|\cdot|_f$ определяет квазинорму на Σ_f. Функционалы δ_f, Δ_f непрерывны по этой квазинорме. Для них выполнены модифицированные неравенства треугольника

$$(\Delta_f(T_1+T_2))^{1/(1+p)} \leqslant (\Delta_f(T_1))^{1/(1+p)} + (\Delta_f(T_2))^{1/(1+p)},$$
$$(\delta_f(T_1+T_2))^{1/(1+p)} \leqslant (\delta_f(T_1))^{1/(1+p)} + (\Delta_f(T_2))^{1/(1+p)}.$$

Пространство Σ_f полно и несепарабельно. Оно содержит в себе сепарабельное подпространство

$$\Sigma_f^0 := \Big\{ Q \in \Sigma_f : \Delta_f(Q) = 0 \Big\}.$$

Степенные идеалы Σ_p соответствуют идеалам Σ_f с $f(n) = n^{1/p}$.

2. Фиксируем сейчас функцию $f \in \mathfrak{P}_p(\mathbb{R}_+)$, $p \geqslant 0$. Для любого $r > p$ положим

$$\eta_r(t) := f(t^{1/r})/t.$$

Легко видеть, что $-1 \leqslant \alpha(\eta_r) = (\alpha(f))^{1/r} - 1 \leqslant (\beta(f))^{1/r} - 1 = \beta(\eta_r) < 0$ и что $sM(\eta_r, s) = (M(f,s))^{1/r} \leqslant C$ при $s \leqslant 1$. В силу теоремы 5.1 [B] (см. также замечание 1.1) $K_{\eta_r,\infty}$ является интерполяционным функтором. При этом имеет место следующее

Предложение 3.1 ([B, §6]). *Если $f \in \mathfrak{P}_p(\mathbb{R}_+)$, $p \geqslant 0$ и $\eta_r(t) := f(t^{1/r})/t$, $r > p$, то*

$$\Sigma_f = (\Sigma_{1/r}, \mathfrak{R})_{\eta_r,\infty}$$

с эквивалентностью квазинорм. Кроме того, справедливы соотношения

$$c_1\Delta_f(T) \leqslant \Delta_\eta^{(\infty)}(T) \leqslant c_2\Delta_f(T), \qquad 0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty, \quad T \in \Sigma_f.$$

Сформулируем еще аналог этого предложения для пространств функций.

Предложение 3.2 ([B, §6]). *Если $f \in \mathfrak{P}_p(\mathbb{R}_+)$, $p \geqslant 0$ и $\eta_r(t) := f(t^{1/r})/t$, $r > p$, то*

$$L_{f,\infty} = (L_{1/r}, L_\infty)_{\eta_r,\infty}.$$

Кроме того,

$$c_1\mathfrak{D}_f^{(\varsigma)}(g) \leqslant \Delta_\eta^{(\varsigma)}(g) \leqslant c_2\mathfrak{D}_f^{(\varsigma)}(g), \qquad 0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty, \quad g \in L_{f,\infty}, \quad \varsigma = 0, \infty.$$

Исходными для получения нужных оценок являются неравенства из предложения 0.1

$$\|T_{ab}\|_{L_2\to L_2} \leqslant c|a|_{\delta,\infty}|b|_{\delta,\infty}\mu_2^{1-\theta}\mu_1^{\theta}, \qquad \delta\theta = 2, \quad c = c(\delta), \quad \delta > 2, \tag{3.1}$$

и обобщенное неравенство Цвикеля

$$|T_{ab}|_{\delta} \leqslant C|a|_{\delta,\infty}\|b\|_{\delta}\mu_2^{1-\theta}\mu_1^{\theta}, \qquad \delta\theta = 2, \quad C = C(\delta), \quad \delta > 2 \tag{3.2}$$

(см. [БКС]). Пусть теперь фиксирована измеримая функция $\psi : \mathcal{Y} \to (0,\infty)$ и мера χ определена равенством

$$\chi(e) := \int_e \psi\, d\sigma, \qquad e \subset \mathcal{Y}. \tag{3.3}$$

Квазинорму и асимптотический функционал на пространстве $L_{f,\infty}(\mathcal{Y},\chi)$ обозначим через $|\cdot|_{f,\infty,\chi}$, $\mathfrak{D}_f^{(\varsigma)}(\cdot,\chi)$, $\varsigma = 0,\infty$.

Теорема 3.1. *Пусть $f \in \mathfrak{P}_q(\mathbb{R}_+)$, $1/2 > \delta^{-1} > q \geqslant 0$, и пусть $T \in \mathcal{E}$, $a \in L_{\delta,\infty}(\mathcal{X},\rho)$. Пусть измеримая функция $\Psi(y) > 0$ такова, что*

$$\|T_{a\Psi}\|_{L_2\to L_2} \leqslant |a|_{\delta,\infty}\mu_2^{1-\theta}\mu_1^{\theta}. \tag{3.4}$$

Пусть, наконец, $b/\Psi \in L_{f,\infty}(\mathcal{Y},\chi)$, где χ определено в (3.3) при $\psi = \Psi^{\delta}$. Тогда $T_{ab} \in \Sigma_f$ и справедливы оценки

$$\begin{aligned} |T_{ab}|_f &\leqslant c(f,\delta)|a|_{\delta}\mu_2^{1-\theta}\mu_1^{\theta}|b/\Psi|_{f,\infty,\chi}, \qquad \delta\theta = 2,\\ \Delta_f(T_{ab}) &\leqslant c(f,\delta)|a|_{\delta}\mu_2^{1-\theta}\mu_1^{\theta}\mathfrak{D}_f^{(\infty)}(b/\Psi,\chi), \qquad \delta\theta = 2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

В частности, $T_{ab} \in \Sigma_f^0$ при $\mathfrak{D}_f^{\infty}(b/\Psi,\chi) = 0$.

Доказательство. Запишем T_{ab} в виде $T_{ab} = (b/\Psi)T_{a\Psi}$. В силу (3.1) и (3.2) при $\psi = \Psi^{\delta}$ получаем

$$\begin{aligned} \|T_{ab}\|_{L_2\to L_2} &\leqslant |a|_{\delta,\infty}\|b/\Psi\|_{L_\infty(\mathcal{Y},\chi)}\mu_2^{1-\theta}\mu_1^{\theta}, \qquad \delta\theta = 2,\\ |T_{ab}|_{\delta} &\leqslant C|a|_{\delta,\infty}\|b/\Psi\|_{L_\delta(\mathcal{Y},\chi)}\mu_2^{1-\theta}\mu_1^{\theta}, \qquad \delta\theta = 2, \quad C = C(\delta). \end{aligned}$$

Мы видим, что отображение $\Pi\colon b/\Psi \mapsto T_{ab}$ непрерывно как отображение

$$\begin{aligned} \Pi\colon L_\infty(\mathcal{Y},\chi) &\to \mathfrak{R}(L_2(\mathcal{X},\rho), L_2(\mathcal{Y},\sigma)),\\ \Pi\colon L_\delta(\mathcal{Y},\chi) &\to \Sigma_\delta(L_2(\mathcal{X},\rho), L_2(\mathcal{Y},\sigma)). \end{aligned}$$

Отсюда, применяя предложения 1.1, 1.1a, 3.1, 3.2, получим, что

$$\Pi\colon L_{f,\infty}(\mathcal{Y},\chi) \to \Sigma_f(L_2(\mathcal{X},\rho); L_2(\mathcal{Y},\sigma))$$

с требуемыми оценками. •

Замечание 3.1. Теорема 3.1 даже в степенном случае несколько сильнее, чем соответствующее утверждение в [БКС]. Именно для $T_{ab} \in \Sigma_f^0$ достаточно одного условия $\mathfrak{D}_f^{(\infty)}(b/\Psi, \chi) = 0$, в то время как в [БКС] требуется $b/\Psi \in L_{f,\infty}^0(\mathcal{Y}, \chi)$.

Замечание 3.2. В силу предложения 0.1 функция $\Psi > 0$, $\Psi \in L_{\delta,\infty}(\mathcal{Y}, \sigma)$ удовлетворяет (после умножения на нормирующий множитель) условиям теоремы 3.1. Однако общая формулировка теоремы 3.1 позволяет более полно учитывать информацию о функции a. Например, если $a \in L_{\delta,\infty}(\mathcal{X}, \rho) \cap L_\infty(\mathcal{X}, \rho)$, то (см. замечание 2.1) достаточно считать $\Psi \in L_{\delta,\infty}(\mathcal{Y}, \sigma) + L_\infty(\mathcal{Y}, \sigma)$. Иногда этот результат допускает дальнейшее улучшение за счет использования конкретных свойств оператора T. Такая ситуация имеет место в следующем примере.

Если положить $T_{ab} = F_{ab}^+ = bF^+a$, где F^+ — оператор, сопряженный к преобразованию Фурье F, то ввиду равенства

$$F_{ab}^+F = (2\pi)^{d/2} b(x)a(D),$$

оценки теоремы 3.1 распространяются на операторы $b(x)a(D)$. Следуя замечанию 5.10.3 [БКС], полученные результаты можно применить к исследованию числа $N(\gamma, A)$ собственных состояний в интервале $(-\infty, \gamma)$ оператора Шрёдингера на $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 3$,

$$A = A(\alpha V) = -\Delta - \alpha V, \qquad V \geqslant 0,$$

при большой константе связи $\alpha > 0$. Равенства

$$N(-\gamma, A(\alpha V)) = \pi(\alpha^{-1/2}; b(x)a(D)), \qquad \alpha > 0, \quad \gamma \geqslant 0,$$
$$b = V^{1/2}, \quad a_\gamma(\xi) = (|\xi|^2 + \gamma)^{-1/2}, \quad \pi(\lambda; Q) := \operatorname{card}\{s_n(Q) > \lambda\},$$

вместе с теоремой 3.1 позволяет установить нестепенные оценки для числа связанных состояний. Следующие теоремы обобщают результаты работы [БС]. Определим сначала фигурирующие в теоремах 3.2, 3.3 классы «весов Харди». Назовем функцию $\Psi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $\Psi > 0$, $d \geqslant 3$ «*весом Харди*», если выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Psi |u|^2\, dx \leqslant M_0(\Psi) \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2\, dx, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

и «*слабым весом Харди*», если выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Psi |u|^2\, dx \leqslant M_1(\Psi) \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, dx, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Вес Харди назовем *нормированным*, если $M_0 \leqslant 1$ или $M_1 \leqslant 1$ соответственно. Очевидно, оператор $\Psi^{1/2}F^+a_\gamma$ ограничен из L_2 в L_2 при $\gamma = 0$ ($\gamma = 1$ в «слабом» случае). В качестве слабого веса Харди можно выбрать, в частности, $\Psi = 1$.

Применение теоремы 3.1 дает следующую

Теорема 3.2. *Пусть Ψ — нормированный вес Харди, $d \geqslant 3$, $0 \leqslant q < 2/d$, $f \in \mathfrak{P}_q(\mathbb{R}_+)$. Тогда для потенциалов V таких, что $V/\Psi \in L_{f,\infty}(\mathbb{R}^d, \chi)$, $\psi = \Psi^{d/2}$, справедливы оценки*

$$f(N(0,\alpha V)) \leqslant c\alpha |V/\Psi|_{f,\infty,\chi}, \qquad c = c(f,d),$$
$$\limsup_{\alpha \to \infty} \alpha^{-1} f(N(0,\alpha V)) \leqslant c\mathfrak{D}_f^{(\infty)}(V/\Psi, \chi), \qquad c = c(f,d).$$

Теорема 3.3. *Пусть Ψ — нормированный слабый вес Харди, $d \geqslant 3$, $0 \leqslant q < 2/d$, $f \in \mathfrak{P}_q(\mathbb{R}_+)$. Тогда для потенциалов V таких, что $V/\Psi \in L_{f,\infty}(\mathbb{R}^d, \chi)$, $\psi = \Psi^{d/2}$, справедливы оценки*

$$f(N(-1,\alpha V)) \leqslant c\alpha |V/\Psi|_{f,\infty,\chi}, \qquad c = c(f,d), \limsup_{\alpha \to \infty} \alpha^{-1} f(N(-1,\alpha V))$$
$$\leqslant c\mathfrak{D}_f^{(\infty)}(V/\Psi, \chi), \qquad c = c(f,d).$$

Дополнение

Доказательство теоремы 1.2. Выберем p так, чтобы было: $0 < p < 1$, $p < p_0$. Воспользуемся предложением 1.2 при $\mathbf{A} = \{L_p, L_\infty\}$, $\theta_i = 1 - p/p_i$, $q_i = p_i$, $i = 0, 1$ (а тогда $\lambda = p(p_0^{-1} + p_1^{-1})$, $A_{\theta_i, p_i} = L_{p_i}$, $i = 0, 1$). Имеем

$$\eta(t)K(t,a;\{L_{p_0}, L_{p_1}\}) \geqslant c_1\eta(t)\left(\int_0^{t^{1/\lambda}} \left(s^{-\theta_0}\left(\int_0^{s^p} (a^*(\tau))^p\,d\tau\right)^{1/p}\right)^{p_0} ds/s\right)^{1/p_0}$$
$$\geqslant c_1\left(\int_0^{t^{1/\lambda}} (s^{1-\theta_0} a^*(s^p))^{p_0}\,ds/s\right)^{1/p_0}$$
$$\geqslant c_1\left(\int_0^{t^{1/\lambda}} ds\, s^{p-1}(a^*(s^p))^{p_0}\right)^{1/p_0}.$$

Поскольку функции s^{p-1} и $(a^*(s^p))^{p_0}$ убывающие, то

$$\eta(t)K(t,a;\{L_{p_0}, L_{p_1}\}) \geqslant c_1\eta(t)t^{1/\lambda p_0} t^{(p-1)/\lambda p_0} a^*(t^{p/\lambda}).$$

Отсюда следует, что $\|a\|_{\eta,q} \geqslant c_1 |a|_{f,q}$.

Обратную оценку рассмотрим сначала в случае $p_0 \geqslant 1$. Тогда имеет место неравенство $K(t,a,\{L_{p_0}, L_{p_1}\}) \leqslant c_2 K(t,a,\{L_{p_0,1}, L_{p_1,1}\})$. Применим предложение 1.2 при $\mathbf{A} = \{L_1, L_\infty\}$, $\theta_i = 1 - p^{-1}$, $q_i = 1$, $i = 0, 1$ (а тогда $\lambda = p_0^{-1} - p_1^{-1}$, $L_{p_i,1} = A_{\theta_i,1}$, $i = 0, 1$). Имеем

$$\eta(t)K(t,a,\{L_{p_0}, L_{p_1}\}) \leqslant c_2\eta(t)K(t,a,\{L_{p_0,1}, L_{p_1,1}\})$$

$$\asymp \eta(t)\int_0^{t^{1/\lambda}} ds\, s^{-1-\theta_0}\int_0^s a^*(\tau)\,d\tau + t\eta(t)\int_{t^{1/\lambda}}^\infty ds\, s^{-1-\theta_1}\int_0^s a^*(\tau)\,d\tau$$

$$= \eta(t)\int_0^1 ds\ s^{-1-\theta_0}t^{-\theta_0/\lambda}\int_0^{st^{1/\lambda}} a^*(\tau)\,d\tau + t\eta(t)\int_1^\infty ds\, s^{-1-\theta_1}t^{-\theta_1/\lambda}\int_0^{st^{1/\lambda}} a^*(\tau)\,d\tau$$

$$= \eta(t)\int_0^1 ds\, s^{-1-\theta_0}t^{1/p_0\lambda}\int_0^s a^*(\xi t^{1/\lambda})\,d\xi + \eta(t)\int_1^\infty ds\, s^{-1-\theta_1}t^{1/p_0\lambda}\int_0^s a^*(\xi t^{1/\lambda})\,d\xi$$

$$= \int_0^1 ds\, s^{-1-\theta_0}\int_0^s \eta(t)t^{1/p_0\lambda}a^*(\xi t^{1/\lambda})\,d\xi + \int_1^\infty ds\, s^{-1-\theta_1}\int_0^s \eta(t)t^{1/p_0\lambda}a^*(\xi t^{1/\lambda})\,d\xi$$

$$\leqslant \int_0^1 ds\, s^{-1-\theta_0}\int_0^s f(\xi t^{1/\lambda})a^*(\xi t^{1/\lambda})M(\eta,\xi^{-\lambda})\xi^{-1/p_0}\,d\xi$$

$$+ \int_1^\infty ds\, s^{-1-\theta_1}\int_0^s f(t^{1/\lambda})a^*(\xi t^{1/\lambda})M(\eta,\xi^{-\lambda})\,d\xi.$$

Положим $h(t) = f(t)a^*(t)$ и $d\mu = M(\eta,\xi^{-\lambda})\xi^{-1/p_0}\,d\xi$. Тогда неравенство примет вид

$$\eta(t)K(t,a,\{L_{p_0},L_{p_1}\})$$
$$\leqslant c_3\Big(\int_0^1 ds\, s^{-1-\theta_0}\int_0^s h(\xi^{-\lambda}t)\,d\mu(\xi) + \int_1^\infty ds\, s^{-1-\theta_1}\int_0^s h(\xi^{-\lambda}t)\,d\mu(\xi)\Big).$$

Заметим, что мера μ конечна для любого интервала $(0,s)$. Далее, из оценок для коэффициентов растяжения видно, что существуют числа $\varepsilon > 0$, $c(\varepsilon) < \infty$, $C(\varepsilon) < \infty$ такие, что $\mu((0,s)) \leqslant c(\varepsilon)s^{\theta_0+\varepsilon}$ при $s \to 0$, и $\mu((0,s)) \leqslant C(\varepsilon)s^{\theta_1+\varepsilon}$ при $s \to \infty$. Ввиду $q \geqslant 1$, имеем

$$\int_0^\infty (\eta(t)K(t,a,\{L_{p_0},L_{p_1}\}))^q\,dt/t$$
$$\leqslant c_3\int_0^\infty\Bigg(\Big(\int_0^1 ds\, s^{-1-\theta_0}\int_0^s h(\xi^{-\lambda}t)\,d\mu(\xi)$$
$$+ \Big(\int_1^\infty ds\, s^{-1-\theta_1}\int_0^s h(\xi^{-\lambda}t)d\mu(\xi)\Big)^q\Bigg)\,dt/t$$
$$\leqslant c_3\int_0^\infty\Big(\int_0^1 ds\, s^{-1-\theta_0}\int_0^s h(\xi^{-\lambda}t)\,d\mu(\xi)\Big)^q\,dt/t$$

$$
\begin{aligned}
&+\ c_3\int_0^\infty\biggl(\int_1^\infty ds\,s^{-1-\theta_1}\int_0^s h(\xi^{-\lambda}t)\,d\mu(\xi)\biggr)^q dt/t\\
&\leqslant c_4(\varepsilon)\int_0^\infty\int_0^1 ds\,s^{-1+\varepsilon}\biggl(s^{-\theta_0-\varepsilon}\int_0^s h(\xi^{-\lambda}t)\,d\mu(\xi)\biggr)^q dt/t\\
&+c_4(\varepsilon)\int_0^\infty\int_1^\infty ds\,s^{-1-\varepsilon}\biggl(s^{-\theta_1+\varepsilon}\int_0^s h(\xi^{-\lambda}t)\,d\mu(\xi)\biggr)^q dt/t\\
&\leqslant c_4(\varepsilon)\int_0^\infty\int_0^1 ds\,s^{-1+\varepsilon}s^{-(q\theta_0+\varepsilon)}(\mu((0,s)))^{q-1}\int_0^s h^q(\xi^{-\lambda}t)\,d\mu(\xi)\,dt/t\\
&+c_4(\varepsilon)\int_0^\infty\int_1^\infty ds\,s^{-1-\varepsilon}s^{-(q\theta_1-\varepsilon)}(\mu((0,s)))^{q-1}\int_0^s h^q(\xi^{-\lambda}t)\,d\mu(\xi)\,dt/t\\
&\leqslant c_5(\varepsilon)(|a|_{f,q})^q\biggl(\int_0^1 ds\,s^{-1+\varepsilon}s^{-(q\theta_0+\varepsilon)}(\mu((0,s)))^q\\
&\qquad\qquad+\int_1^\infty ds\,s^{-1-\varepsilon}s^{-(q\theta_1-\varepsilon)}(\mu((0,s)))^q\biggr)
\end{aligned}
$$

и тем самым

$$
\|a\|^q_{\eta,q}\leqslant c_6(\varepsilon)|a|^q_{f,q}\biggl(\int_0^1 s^{-1+\varepsilon}\,ds+\int_1^\infty s^{-1-\varepsilon}\,ds\biggr)\leqslant c_7(\varepsilon)|a|^q_{f,q}.
$$

Осталось рассмотреть случай $p_0<1$. Положим $p=\min\{1,p_1\}$ и заметим, что

$$
K(t,a;\{L_{p_0},L_{p_1}\})\leqslant K(t,a;\{L_{p_0},L_{p_1,p}\}).
$$

Применим вторую часть предложения 1.2 при $\mathbf{A}=\{L_{p_0},L_\infty\}$, $\theta_1=\theta:=1-p_0/p_1$ (а тогда $\lambda=\theta$, $A_{\theta,p}=L_{p_1,p}$). Имеем

$$
\begin{aligned}
\eta(t)K(t,a;\{L_{p_0},L_{p_1}\})&\leqslant c_8t\eta(t)\biggl(\int_{t^{1/\theta}}^\infty ds\,s^{-1}(s^{-\theta}K(s,a;\{L_{p_0},L_\infty\})^p\biggr)^{1/p}\\
&\leqslant c_8t\eta(t)\biggl(\int_1^\infty ds\,s^{-1}(s^{-\theta}t^{-1}K(st^{1/\theta},a;\{L_{p_0},L_\infty\}))^p\biggr)^{1/p}\\
&\leqslant c_8t\eta(t)\biggl(\int_1^\infty ds\,s^{-1}\biggl(s^{-\theta}t^{-1}\biggl(\int_0^{(st^{1/\theta})^{p_0}}(a^*(\tau))^{p_0}\,d\tau\biggr)^{1/p_0}\biggr)^p\biggr)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

После замены переменных $\tau=(\xi t^{1/\theta})^{p_0}$, $d\tau=p_0(\xi t^{1/\theta})^{p_0}\,d\xi/\xi$, неравенство продолжается в виде

$$\leqslant c_8\eta(t)\left(\int_1^\infty ds\, s^{-1}\left(s^{-\theta}\left(\int_0^s (a^*(\xi t^{1/\theta}))^{p_0}\, d\xi/\xi\right)^{1/p_0}\right)^p\right)^{1/p}$$

$$\leqslant c_8\left(\int_1^\infty ds\, s^{-1}\left(s^{-\theta}\left(\int_0^s (f(\xi t^{1/\theta})a^*(\xi t^{1/\theta})M(\eta,\xi^{-\theta}))^{p_0}\, d\xi/\xi\right)^{1/p_0}\right)^p\right)^{1/p}.$$

В обозначениях $h(t) = f(t)a^*(t)$ и $d\mu = (M(\eta,\xi^{-\theta}))^{p_0}\, d\xi/\xi$ имеем

$$\eta(t)K(t,a;\{L_{p_0},L_{p_1}\}) \leqslant c_8\left(\int_1^\infty ds\ s^{-1}\left(s^{-\theta}\left(\int_0^s (h(\xi t^{1/\theta}))^{p_0}\, d\mu\right)^{1/p_0}\right)^p\right)^{1/p}.$$

Мера μ конечна на любом промежутке $(0,s)$ и допускает оценку вида $\mu((0,s)) \leqslant c(\varepsilon)s^{p_0\theta-\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Повторное использование неравенства Гёльдера дает

$$\|a\|^q_{\eta,q} \leqslant c_8\int_0^\infty\left(\int_1^\infty ds\, s^{-1}\left(s^{-\theta}\left(\int_0^s (h(\xi t^{1/\theta}))^{p_0}\, d\mu\right)^{1/p_0}\right)^p\right)^{1/p} dt/t$$

$$\leqslant c_9(\varepsilon)\int_0^\infty dt\, t^{-1}\int_1^\infty ds\, s^{-1-\varepsilon}s^{-q\theta+\varepsilon q/p}(\mu((0,s)))^{-1+q/p_0}\int_0^s (h(\xi t^{1/\theta}))^q\, d\mu$$

$$\leqslant c_9(\varepsilon)|a|^q_{f,q}\int_1^\infty ds\, s^{-1-\varepsilon}s^{-q\theta+\varepsilon q/p}(\mu((0,s)))^{q/p_0} \leqslant c_{10}(\varepsilon)|a|^q_{f,q}. \quad \bullet$$

Список литературы

[БКС] Birman M. Sh., Karadzhov G. E., Solomyak M. Z., *Boundedness conditions and spectrum estimates for the operators $b(x)a(D)$ and their analogs*, Advances in Soviet Mathematics, vol. 7, 1991, pp. 85–106.

[БЛ] Bergh J., Loefstroem J., *Interpolation Spaces. An Introduction*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 223, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[Т] Triebel H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North Holland Library, vol. 18, 1978.

[В] Вайдль Т., *Общие операторные идеалы слабого типа*, Алгебра и Анализ **4** (1992), № 3, 117–144.

[БС] Birman M. S., Solomyak M. Z., *Schroedinger operator. Estimates for number of bound states as function-theoretical problem*, Trans. Amer. Math. Soc. (2) **150** (1992), 1–54.

[КПС] Krein S. G., Petunin Ju. I., Semenov E. M., *Interpolation of linear operators*, Nauka, M., 1978; English Transl., Trans. Math. Monographs,, vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[Х] Holmstedt T., *Interpolation of quasi-normed spaces*, Math. Scand. **26** (1970), 177–199.

[С] Seneta E., *Regulary Varying Fuctions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 508, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

Universität Potsdam
Max-Planck-AG "Partielle Differentialgleichnungen"
Am Neuen Palais 10 D O-1571 Potsdam

Поступило 17 января 1993 г.