В. В. Батырев, Д. А. Мельников, Теорема о непродолжаемости торических многообразий, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1986, номер 3, 20–24

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1986. № 3

УДК 513.6

В. В. Батырев, Д. А. Мельников

ТЕОРЕМА О НЕПРОДОЛЖАЕМОСТИ ТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

1. Введение. В этой статье будет исследована проблема продолжаемости гладких торических многообразий, то есть вложения их как обильных дивизоров в гладкое многообразие. Основной результат работы содержится в теореме 2. В пункте 2 доказано обобщение точной последовательности Эйлера на торические многообразия. В пункте 3 результаты пункта 2 применяются к подсчету когомологий $H^1(X, T_X\otimes\otimes\mathcal{L}^{-1})$, где T_X — касательное расслоение на X, а $\mathcal{L}$ — обильный обратимый пучок. Завершает доказательство применение критерия непродолжаемости Фуджиты.

Мы придерживаемся следующих обозначений: K — основное поле; M и N — двойственные решетки; σ — конус в пространстве $N_{\mathbf{Q}}=N\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$; Σ — веер в $N_{\mathbf{Q}}$; $\Sigma^{(k)}$ — множество k-мерных конусов из Σ; $|\Sigma^{(k)}|=\bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma^{(k)}}\sigma$; X_Σ — торическое многообразие, ассоциированное с веером Σ; D_i — страты X, ассоциированные с конусами $\sigma_i\in\Sigma^{(1)}$; $\mathbf{T}=\operatorname{Spec}K[M]$ — максимальный тор, содержащийся в X; $\operatorname{Div}\operatorname{inv}(X)$ — группа инвариантных при действии $\mathbf{T}$ дивизоров на X; T_X — касательное расслоение; $\Omega^1{}_X$ — пучок 1-дифференциалов на X.

2. Точная последовательность Эйлера. Для проективного пространства хорошо известна точная последовательность Эйлера:

$$0\to\Omega^1_{\mathbf{P}^n}\to\mathcal{O}(-1)^{n+1}\to\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}\to 0. \tag{1}$$

Мы докажем ее обобщение для гладких торических многообразий.

Теорема 1. *Пусть X — гладкое торическое многообразие, $\dim(X)=n$, $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X)=\rho$. Тогда существует точная последовательность*

$$0\to\Omega^1_X\to\bigoplus_{i=1}^{n+\rho}\mathcal{O}_X(-D_i)\to\mathcal{O}^\rho_X\to 0. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через M группу характеров n-мерного тора $\mathbf{T}$, $M\cong\mathbf{Z}^n$. Имеем точную последовательность

$$0\to M\xrightarrow{p}\operatorname{Div}\operatorname{inv}(X)\xrightarrow{q}\operatorname{Pic}(X)\to 0,$$

где

$$p: M\to\operatorname{Div}\operatorname{inv}(X),\quad p(f)=\operatorname{div}(f),\quad q:\operatorname{Div}\operatorname{inv}(X)\to\operatorname{Pic}(X),$$

$q(D)=\bar{D}$ — образ дивизора D в $\operatorname{Pic}(X)$. Умножим последовательность (2) на структурный пучок $\mathcal{O}_X$ и отождествим $M\otimes\mathcal{O}_X$ с пучком $\Omega^1_X(\log)$ 1-дифференциалов на X с логарифмическими полюсами вне $\mathbf{T}$ (см. [1], § 15). Рассмотрим естественные вложения

$$s:\Omega^1_X\to\Omega^1_X(\log),\quad t:\bigoplus\mathcal{O}(-D_i)\to\operatorname{Div}\operatorname{inv}(X)\otimes\mathcal{O}_X.$$

Вычет Пуанкаре $r:\Omega^1_X(\log)\to\bigoplus\mathcal{O}_{D_i}$ дает изоморфизм $\Omega^1_X(\log)/\Omega^1_X\cong\cong\bigoplus\mathcal{O}_{D_i}$ (см. [1], с. 115). Коядро t также изоморфно $\bigoplus\mathcal{O}_{D_i}$.

Покажем, что

$$\bar{p} = p \otimes \mathrm{id} : \Omega_X^1(\log) \to \mathrm{Div\,inv}\ (X) \otimes \mathcal{O}_X$$

индуцирует тождественное отображение на $\bigoplus \mathcal{O}_{D_i}$. Локально, в аффинной карте $W = \operatorname{Spec} K[x_1, \ldots, x_n]$,

$$p\left(f \frac{dx_i}{x_i}\right) = \operatorname{div}(x_i) \otimes f \,(\operatorname{mod} \mathcal{O}(-\operatorname{div}(x_i))) = r\left(f \frac{dx_i}{x_i}\right)$$

(здесь f — характер $\mathbf{T}$ с полюсами вне W). Таким образом, последовательность (1) является ядром эпиморфизма точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \Omega_X^1(\log) & \xrightarrow{\bar{p}} & \mathrm{Div\,inv}\,(X) \otimes \mathcal{O}_X & \to & \mathrm{Pic}\,(X) \otimes \mathcal{O}_X & \to 0 \\ r\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to \bigoplus \mathcal{O}_{D_i} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \bigoplus \mathcal{O}_{D_i} & \longrightarrow & 0 & \to 0, \end{array}$$

откуда следует утверждение теоремы.

3. Основная теорема. Сформулируем сначала несколько вспомогательных лемм об обратимых пучках на торическом многообразии. Пусть $\mathcal{E} \in \mathrm{Pic}\,(X_\Sigma)$. Так как $\mathrm{Pic}\,(\mathbf{T}) = 0$, то $\mathcal{E}|_{\mathbf{T}} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{T}}$. Назовем изоморфизм $\varphi : \mathcal{E}|_{\mathbf{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbf{T}}$ тривиализацией $\mathcal{E}$. Группа инвариантных дивизоров $\mathrm{Div\,inv}(X)$ изоморфна $\{(\mathcal{E}, \varphi) \mid \mathcal{E} \in \mathrm{Pic}\,(X_\Sigma),\ \varphi$ — тривиализации $\mathcal{E}\}$. Решетка характеров тора действует транзитивно на тривиализациях, поэтому

$$\mathrm{Pic}\,(X) \cong \mathrm{Div\,inv}(X)/M.$$

Лемма 1 (см. [1], 6.4): $\mathrm{Div\,inv}\,(X_\Sigma) = \{$*функции* $g : |\Sigma| \cap N \to \mathbf{Z}$ *такие, что* $g|_\sigma$ *линейны для любого* $\sigma \in \Sigma\}$.

Обозначим функцию g, соответствующую $(\mathcal{E}, \varphi)$, через $\mathrm{ord}\,(\mathcal{E}, \varphi)$.

Лемма 2 (см. [1], 6.7, 6.9). *Пусть* Σ *— полный веер,* $\mathcal{E} \in \mathrm{Pic}\,(X_\Sigma)$ *порождается своими глобальными сечениями тогда и только тогда, когда* $\mathrm{ord}\,(\mathcal{E})$ *выпукла вверх. Пучок* $\mathcal{E}$ *обилен тогда и только тогда, когда* $\mathrm{ord}\,(\mathcal{E})$ *строго выпукла вверх, то есть выпукла вверх и для разных* $\sigma, \sigma' \in \Sigma^{(n)}$ $\mathrm{ord}\,(\mathcal{E})|_\sigma$ *и* $\mathrm{ord}(\mathcal{E})|_{\sigma'}$ *— разные линейные функции.*

Будем обозначать через g_σ линейную функцию на $\mathbf{R}^n$, ограничение которой на σ совпадает с $g|_\sigma$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathcal{E} \in \mathrm{Pic}\,(X_\Sigma)$ *обилен на полном гладком многообразии* X_Σ *и* $D_0 \in \mathrm{Div\,inv}(X)$ *— дивизор, ассоциированный с конусом* $\sigma_0 \in \Sigma^{(1)}$. *Тогда* $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(-D_0)$ *порожден глобальными сечениями.*

Доказательство. Обозначим: $g = \mathrm{ord}\,(\mathcal{E})$; $h = \mathrm{ord}\,(-D_0)$; e_i — примитивные векторы решетки N, лежащие на $\sigma_i \in \Sigma^{(1)}$. Докажем выпуклость функции $g + h$. Достаточно проверить справедливость неравенств

$$g_\sigma(e_i) + h_\sigma(e_i) \geqslant g(e_i) + h(e_i) \ \forall \sigma \in \Sigma^{(n)},\ \forall e_i \notin \sigma.$$

Если $e_0 \notin \sigma$, то $h_\sigma(e_i) = 0$, $h(e_i) \leqslant 1$ и наше неравенство следует из строгой выпуклости g $(g_\sigma(e_i) > g(e_i)$, если $e_i \notin \sigma)$. Пусть $e_0 \in \sigma$, тогда выберем тривиализацию $\mathcal{E}$ так, чтобы $g_\sigma = 0$ (σ фиксировано). Рассмотрим такие векторы $e_1, \ldots, e_n \in N$, что

$$\langle e_0, \ldots, e_{n-1} \rangle = \sigma,\ \langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \sigma' \in \Sigma^{(n)}.$$

Пусть

$$e_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} e_j, \quad e_0 = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$$

($b_n = -1$, поскольку σ и σ' базисные). Тогда

$$h_\sigma(e_i) = a_{i0}, \quad h(e_i) = 0, \quad g_\sigma(e_i) = 0, \quad g(e_i) \leqslant g_{\sigma'}(e_i) = a_{i0} g_{\sigma'}(e_0) = -a_{i0} g(e_n).$$

Так как $g(e_n) < 0$, $g(e_i) < 0$, то $g(e_i) \leqslant a_{i0}$. Выпуклость доказана.

Теорема 2. *Пусть X — гладкое торическое многообразие размерности n над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, которое вложено как обильный дивизор в гладкое многообразие Y. Тогда либо $X \cong \mathbf{P}^n$, $Y \cong \mathbf{P}^{n+1}$ и X — гиперплоскость в Y, либо X и Y — расслоения на проективные пространства над $\mathbf{P}^1$ $X \cong \mathbf{P}(\mathscr{E})$, $Y \cong \mathbf{P}(\mathscr{F})$ и существует точная последовательность локально-свободных пучков на $\mathbf{P}^1$*

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \to \mathscr{F} \to \mathscr{E} \to 0,$$

которая индуцирует вложение $X \hookrightarrow Y$. Более того, любое такое X можно вложить указанным способом в подходящее расслоение Y.

Доказательство. Будем вычислять $H^1(X, T_X \otimes \mathscr{L}^{-1})$ для обильного $\mathscr{L}$, а затем применим критерий Фуджиты [2].

Докажем, что если $H^1(X, T_X \otimes \mathscr{L}^{-1}) \neq 0$ для некоторого обильного пучка $\mathscr{L}$, то X — расслоения на проективные пространства над $\mathbf{P}^1$ (это верно для любого поля K). Воспользуемся последовательностью, двойственной последовательности (1), умноженной на $\mathscr{L}^{-1}$:

$$0 \to \mathcal{O}_X^\rho \otimes \mathscr{L}^{-1} \to \bigoplus \mathcal{O}_{D_i} \otimes \mathscr{L}^{-1} \to T_X \otimes \mathscr{L}^{-1} \to 0.$$

Здесь

$$H^2(X, \mathscr{L}^{-1}) = H^{n-2}(X, \omega \otimes \mathscr{L}) = 0$$

(по [1], 7.5.2). Отсюда

$$H^1(X, T_X \otimes \mathscr{L}^{-1}) = \bigoplus_{m \in M} H^1(X, \mathcal{O}(D_i) \otimes \mathscr{L}^{-1})(m).$$

Эта группа снабжена M-градуировкой. Зафиксируем $i \leqslant n+\rho$, $m \in M$, такие, что

$$H^1(X, \mathcal{O}(D_i) \otimes \mathscr{L}^{-1})(m) \neq 0.$$

Пусть $g = \operatorname{ord}(\mathscr{L} \otimes \mathcal{O}(-D_i))$. Введем замкнутое множество

$$Z_m = \{x \in |\Sigma| : m(x) \geqslant -g(x)\}.$$

Тогда ([1], § 7)

$$H^1(X, \mathcal{O}(D_i) \otimes \mathscr{L}^{-1})(m) = H^1_{Z_m}(R^n, K).$$

Рассмотрим точную последовательность пары

$$\ldots \to H^0(\mathbf{R}^n \setminus Z_m) \to H^1_{Z_m}(\mathbf{R}^n) \to H^1(\mathbf{R}^n) = 0.$$

Так как $H^1_{Z_m}(\mathbf{R}^n) \neq 0$, то множество $\mathscr{U} = \mathbf{R}^n \setminus Z_m$ несвязно. По лемме 3 функция g выпукла вверх. Тогда Z_m является выпуклым конусом. Следовательно, $\mathscr{U}$ несвязно тогда и только тогда, когда Z_m — подпространство размерности $n-1$, в частности, $g(x) \leqslant -m(x)$ для любого x. Имеем $Z_m \subset |\Sigma^{(n-1)}|$. В самом деле, если существует $x \in Z_m$, не лежащий в $|\Sigma^{(n-1)}|$, то x находится строго внутри некоторого конуса

$\sigma \in \Sigma^{(n)}$. Но $g|_\sigma$ линейна и не константа (поскольку $\sigma \not\subset Z_m$), следовательно, существует $y \in \sigma$, такой, что $g(y) > -m(y)$. Противоречие. Покажем теперь, что в Z_m лежат ровно n конусов из $\Sigma^{(1)}$. Действительно, $g|_{Z_m} = -m$, а $\operatorname{ord}(D_i)$ равна нулю на всех примитивных векторах конусов из $\Sigma^{(1)}$, кроме одного. Таким образом, если бы в Z_m лежало более n конусов из $\Sigma^{(1)}$, то функция $\operatorname{ord}(\mathscr{L}) = g + \operatorname{ord}(D_i)$ не была бы строго выпуклой. В силу гладкости X эти конусы образуют веер проективного пространства $\mathbf{P}^{n-1}$. Выберем базис в N так, чтобы $Z_m = \{x_n = 0\}$,

$$\Sigma^{(1)} \cap Z_m = \{\langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_{n-1} \rangle, \ e_i = \langle -x_1 - \ldots - x_{n-1} \rangle\}$$

и D_i был ассоциирован с конусом $\langle e_i \rangle$. Докажем, что в полупространствах $x_n > 0$ и $x_n < 0$ лежит по одному конусу из $\Sigma^{(1)}$. Предположим, что в $\{x_n > 0\}$ содержится не менее двух конусов из $\Sigma^{(1)}$. Выберем (перенумеруем, если это будет необходимо, $x_1, \ldots, x_{n-1}$) такие $e, e' \in N \cap \{x_n > 0\}$, что

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1}, e \rangle = \sigma_1 \in \Sigma^{(n)} \text{ и } \langle x_1, \ldots, x_{n-2}, e, e' \rangle = \sigma_2 \in \Sigma^{(n)}.$$

Тогда

$$e' = \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j + a_n e, \qquad a_j \in \mathbf{Z},$$

поскольку σ_1, σ_2 — базисные, то $a_{n-1} = -1$. Обозначим $h = \operatorname{ord}(\mathscr{L})$, тогда $h(e_i) = h_{\sigma_1}(e_i) - 1$. Из неравенств $h(e') < h_{\sigma_1}(e')$ и $h(e_i) < h_{\sigma_2}(e_i)$ следует

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j h(x_j) + a_n h(e) - 1 < h(e') < \sum_{j=1}^{n-1} a_j h(x_j) + a_n h(e).$$

Но $h(e')$ — целое. Противоречие.

Итак, в каждом из полупространств $x_n > 0$ и $x_n < 0$ содержится по одному лучу из $\Sigma^{(1)}$. Таким образом, Σ является веером расслоения на проективные пространства над $\mathbf{P}^1$.

Применим теперь критерий непродолжаемости Фуджиты, заключающийся в следующем: пусть для любого обильного пучка $\mathscr{L}$ на многообразии X не $\cong \mathbf{P}^n$

$$H^1(X, T_X \otimes \mathscr{L}^{-1}) = 0;$$

тогда X не может быть обильным дивизором в гладком многообразии. В [2] утверждение доказано над полем $\mathbf{C}$. Однако, использовав то, что $H^i(X_\Sigma, \mathscr{L} \otimes \omega) = 0$ при $i > 0$ (см. [1], 7.5.2), нетрудно перенести доказательство [2] на алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Получаем, что обильными дивизорами среди гладких торических многообразий могут быть только расслоения. Теперь заключение нашей теоремы следует из результатов [3].

Авторы благодарны В. И. Данилову за ряд весьма полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов В. И. Геометрия торических многообразий. — Успехи матем. наук, 1978, **33**, № 2, 85—134.
2. Fujita T. Impossibility criterion of being an ample divisor. — J. Math. Soc. Jap., 1982, **34**, N 2, 355—363.

3. Badescu L. On ample divisors. II. — In: Proceedings of the Week of Algebraic Geometry. Bucharest, 1980, p. 12—32. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd 40. Leipzig, 1981.

Поступила в редакцию
21.05.84

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1986, № 3

УДК 517.51

Д. В. Панников

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ${}_1F_1(1, c, az)$ НА $[0, \infty)$

Вырожденная гипергеометрическая функция имеет вид

$$ {}_1F_1(1, c, az) = \Gamma(c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(az)^k}{\Gamma(c+k)}. $$

Например, ${}_1F_1(1, 1, z) = e^z$. Для оценки сверху чебышевских постоянных для e^{-z} относительно $[0, \infty)$

$$ \rho_n = \min_{\pi} \|e^{-z} - \pi(z)\|_{C[0,\infty)}, $$

где минимум взят по действительным рациональным функциям степени не выше n, в работах [1, 2, 3] использованы различные методы. Положим

$$ \overline{\lim_{n\to\infty}} (\rho_n)^{1/n} = 1/q. $$

Давно сформулирована гипотеза о том, что $q=9$ (см., например, [3]), а в последнее время — о том, что $q > 9$ (см. [4]). В настоящей статье доказывается, что $q > 9$. Этот результат допускает следующее обобщение.

Теорема. *Пусть* $c \in \mathbf{R}$, $1-c \overline{\in} \mathbf{N}$. *Тогда*

$$ \overline{\lim_{n\to\infty}} (\min_{\pi_n} \|{}_1F_1(1, c, -z) - \pi_n(z)\|_{C[0,\infty)})^{1/n} < 1/9, $$

где минимум взят по действительным рациональным функциям степени не выше n.

Теорема опирается на ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $1-c \overline{\in} \mathbf{N}$, *многочлен* $Q(z)$ *представлен в виде*

$$ Q(z) = \int_0^{\infty} t^{c-1} e^{-t} T(t, z)\, dt, $$

где $T(t, z)$ *— многочлен от двух переменных. Тогда*

$$ Q(z)\, {}_1F_1(1, c, z) - \frac{e^z \Gamma(c)}{z^{c-1}} \int_0^z t^{c-1} e^{-t} T(t, z)\, dt = P(z) $$

есть многочлен.