В. П. Ильин, Некоторые замечания о сходимости последовательностей функций полиномиального типа в пространствах $W_p^l(G)$, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1968, том 11, 73–96

В.П.Ильин

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВАХ $W_p^l(G)$

В работе [I][ж)] на основе мультипликативных неравенств, соответствующих теоремам вложения, были получены некоторые результаты о сходимости последовательностей функций в пространствах $W_p^l(G)$. Для частного случая, когда функции рассматриваемой последовательности являются функциями полиномиального типа, т.е. такими, что для них справедливы неравенства типа неравенства Маркова или Бернштейна, а сходимость рассматривается в пространстве $C^s(G)$, полученные результаты конкретизировались. В качестве следствий из этих результатов были получены некоторые теоремы о сходимости метода Ритца в применении к краевым задачам для эллиптических уравнений второго и четвертого порядков.

В данной заметке мы обобщаем эти результаты работы [I].

ж) Работа [I] представляет собой несколько переработанное и дополненное изложение результатов работы [2].

Основной здесь является теорема, обобщающая соответствующую теорему из [I] , в которой на основании известной быстроты убывания $\|f-g_i\|_{W_p^l(G)}$, где $g_i\ (i=1,\ldots)$ – функции полиномиального типа в области G , делается заключение о порядке сходимости $\{g_i\}_1^\infty$ к f в норме $W_q^s(G)$, где $p \leq q \leq \infty$, а s – вообще говоря, произвольное целое положительное число. Для доказательства теоремы применяются неравенства для функций полиномиального типа, дающие оценку их нормы в $W_q^s(G)$ через норму в $W_p^l(G)$. Хотя такого рода неравенства для некоторых классов областей хорошо известны, мы их устанавливаем, применяя метод, основанный на использовании параметрических неравенств для функций из пространств $W_p^l(G)$.

Из доказанной теоремы и теорем конструктивной теории функций, позволяющих оценить порядок убывания $\|f-g_i\|_{W_p^l(G)}$, вытекают некоторые конкретные результаты о порядке сходимости вариационных процессов в пространствах $W_q^s(G)$.

Отметим, что в случае обыкновенных дифференциальных уравнений вопрос о порядке сходимости производных любого порядка в методе Ритца-Галеркина рассматривался И.К.Даугавет [3] , а в случае любого числа независимых переменных – С.Г.Михлиным ж) , однако методы, а отчасти и результаты этих авторов отличны от наших.

I. В настоящем пункте G будет обозначать область n -мерного эвклидова пространства E^n , удовлетворяющую ус-

---

ж) Автор имел возможность познакомиться с результатами С.Г.Михлина в рукописи.

ловию: для каждой точки $x=(x_1,\dots,x_n)\in G$ существует n -мерный шаровой сектор постоянного радиуса и формы с вершиной в x, целиком лежащий внутри G. Пусть H – величина наибольшего допустимого радиуса достигающего каждую точку x области G сектора. Тогда, если G удовлетворяет указанному условию, мы будем писать $G\in A(H)$.

Пусть функция $f(x)$ определена в области G и имеет в ней обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные всех рассматриваемых ниже порядков. Будем предполагать также, что все рассматриваемые ниже нормы функции f имеют смысл.

Пусть $\bar{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ – целый неотрицательный вектор ($\alpha_i\geqslant 0$ – целые), $|\bar{\alpha}|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$. Положим

$$\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f(x)=\frac{\partial^{|\bar{\alpha}|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad \mathcal{D}^{\ell} f(x)=\sqrt{\sum_{|\bar{\alpha}|=\ell}|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f(x)|^2},$$

где ℓ – целое неотрицательное число.

Пусть $p>1$ [ж],

$$\|f\|_{W_p^\ell(G)}=\|f\|_{L_p(G)}+\|\mathcal{D}^\ell f\|_{L_p(G)}$$

$$(\text{ при } \ell=0 \quad \|f\|_{W_p^\ell(G)}=\|f\|_{L_p(G)}),$$

[ж] Предположение, что $p>1$, мы делаем для простоты. Некоторым усложнением рассуждений основные из приводимых ниже оценок могут быть получены аналогичным методом и для $p=1$.

где

$$\| f \|_{L_p(G)} = \left[\int\limits_G |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} .$$

Основной целью настоящего пункта является получение специального типа оценок $\| \mathcal{D}^s f \|_{L_q(G)}$ через $\| f \|_{W_p^\ell(G)}$, где s – произвольное целое неотрицательное число, а число q удовлетворяет неравенствам: $p \le q \le \infty$.

В зависимости от соотношений между параметрами ℓ, s, p, q n (n – размерность области G) будем различать следующие случаи:

1) $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geqslant 0$, причем исключается случай одновременного выполнения следующих равенств: $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ и $q = \infty$;

2) $\ell - s - \frac{n}{p} = 0$, $q = \infty$;

3) $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$.

1) Пусть $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geqslant 0$, но при $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ $q \neq \infty$. На основании теоремы 2 (стр. 76) работы [1] в этом случае справедлива оценка

$$\| \mathcal{D}^s f \|_{L_q(G)} \le C \, \| f \|^{\alpha}_{L_p(G)} \cdot \| f \|^{1-\alpha}_{W_p^\ell(G)} \le C \, \| f \|_{W_p^\ell(G)} , \tag{1}$$

где $\alpha = \frac{1}{\ell} \left(\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \right)$, а C – константа, зависящая от вида области G, но не зависящая от f.

2) Пусть $l-s-\frac{n}{p}=0$, $q=\infty$. Пусть τ — произвольное положительное число, $\tau \geq p$. На основании неравенства (I6″) (стр. 7I) работы [I] для любой точки $x\in G$ справедлива оценка

$$|\mathcal{D}^s f(x)| \leq C_1 h^{-\frac{n}{\tau}} \|\mathcal{D}^s f\|_{L_\tau(G\cap Ш_h(x))} + C_2 h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_\infty(G)} \qquad (2)$$

где h — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенствам: $0<h\leq H$, H — параметр, входящий в определение класса $A(H)$, к которому принадлежит область G, $Ш_h(x)$ — n-мерный шар радиуса h с центром в x, а C_1 C_2 — константы, не зависящие от f, h и τ.

Далее, на основании неравенства (25) (стр. 73) той же работы имеем

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_\tau(G\cap Ш_h(x))} \leq C_3 h^{\frac{n}{\tau}} \lambda^{-\frac{n}{p}} \|\mathcal{D}^s f\|_{L_p(G)} + \qquad (3)$$

$$+ C_4 (2\tau)^{\frac{1}{p'}} h^{\frac{n}{2\tau}} \|\mathcal{D}^l f\|_{L_p(G)},$$

где $\frac{1}{p'}=1-\frac{1}{p}$, λ — фиксированное число, $0<\lambda\leq H$, C_3 и C_4 — константы, не зависящие от h, τ, λ f.

Подставляя (3) в (2) и замечая при этом, что

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_p(G)} \leq C_5 \|f\|_{W_p^\ell(G)},$$

$$\vdots$$

так как $s \leq \ell$, получим

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_\infty(G)} \leq C_6 \|f\|_{W_p^\ell(G)} + \tag{4}$$

$$+ C_7 (2\tau)^{\frac{1}{p'}} h^{-\frac{n}{2\tau}} \|f\|_{W_p^\ell(G)} + C_2 h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_\infty(G)},$$

где C_6, C_7, C_2 - постоянные, не зависящие от f, h и τ , а h и τ - произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам: $0 < h \leq H$, $p \leq \tau < \infty$.

3) Пусть, наконец, $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$. Рассмотрим два подслучая: а) $s \leq \ell - 1$, б) $s \geq \ell$.

Пусть сперва $s \leq \ell - 1$. Так как $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$, то существует такое τ , $p < \tau < q \leq \infty$, что $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{\tau} = 0$ и, в силу теоремы вложения (см. [4]),

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_\tau(G)} \leq C_9 \|f\|_{W_p^\ell(G)}, \tag{5}$$

где C_9 не зависит от f .

На основании неравенства (24) (стр. 73) работы [I] и неравенства (5) тогда получим

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_q(G)} \leq C_{10} h^{-\frac{n}{r}+\frac{n}{q}} \|\mathcal{D}^s f\|_{L_r(G)} + C_{11} h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq C_{12} h^{l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|f\|_{W_p^l(G)} + C_{11} h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_q(G)}, \tag{6}$$

где h – произвольное положительное число, $0<h\leq H$, C_{11} и C_{12} – константы, не зависящие от f и h.

Пусть теперь $s \geq l$. Тогда на основании неравенства (37) (стр. 77) работы [I] получим

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{L_q(G)} \leq C_{13} h^{l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|\mathcal{D}^l f\|_{L_p(G)} + C_{14} h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq C_{13} h^{l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|f\|_{W_p^l(G)} + C_{14} h \|\mathcal{D}^{s+1} f\|_{L_q(G)}, \tag{7}$$

где $0<h\leq H$, C_{13} и C_{14} не зависят от f и h. Сравнивая (6) и (7), видим, что при $l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}<0$ можно считать, что всегда справедлива оценка (7).

Оценки (I), (4) и (7), соответствующие случаям I), 2) и 3), мы применим в следующем пункте для получения нужных неравенств для функций более узких классов.

II. Пусть $\nu > 0$ – целое число, i – произвольное положительное число, $\sigma(\xi)$ – положительная при $\xi > 0$ монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию:

$$\sigma(m\xi) \leq C(m)\sigma(\xi), \tag{8}$$

где $m \geq 1$ – любое положительное число, $C(m)$ – константа, не зависящая от ξ.

Будем говорить, что функция $g(x)$ является в области G функцией класса $\mathcal{P}(i;\sigma;\nu;G)$, если для любого целого неотрицательного вектора $\bar{\alpha}$, $|\bar{\alpha}| = s$, $0 \leq s \leq \nu-1$, и любого числа q, $1 \leq q \leq \infty$, справедливы неравенства:

$$\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}+\bar{\omega}_k} g\|_{L_q(G)} \leq \bar{C}\sigma(i)\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} g\|_{L_q(G)} \ (k=1,\dots,n), \tag{9}$$

где $\bar{\omega}_k = (0,\dots,0,\overset{k}{1},0,\dots,0)$, $\bar{C}$ – константа, зависящая от свойств области G и не зависящая от i и g, σ – функция, удовлетворяющая указанным выше условиям (она, вообще говоря, также зависит от G).

Для определенного класса областей G, например, для областей, удовлетворяющих условиям приводимого ниже замечания (простейшим примером такой области является прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат), функциями класса $\mathcal{P}(i;\sigma;\nu;G)$ при любом ν и при $\sigma(i) = i^2$ являются алгебраические и тригонометрические полиномы степени i по каждой переменной.

Пусть G - ограниченная область, а Γ - ее граница. Пусть, далее, $\omega(x)$ - достаточно гладкая функция, определенная в открытой области, содержащей $\bar{G}=G+\Gamma$, удовлетворяющая условиям: I) $\omega(x)=0$ на Γ, 2) $\omega(x)>0$ в G, 3) $|\operatorname{grad}\omega|_\Gamma>0$. Тогда функцией класса $\mathcal{P}(i;\sigma;\ell;G)$, где $\sigma(i)=i^2$, является функция вида:

$$g(x)=\omega^\ell(x)P_i(x), \tag{I0}$$

где $P_i(x)$- алгебраический полином степени не выше i по каждой из переменных $x_1,\ldots,x_n$, ℓ - натуральное число. При $\ell=1$ этот результат доказан в работе [5].

Функциями класса $\mathcal{P}(i;\sigma;v;E^n)$ $(G=E^n)$ при любом v являются целые функции степени i по каждой из пепеременных, суммируемые по E^n со степенью q, причем $\sigma(i)=i$. Аналогичное верно для тригонометрических полиномов, рассматриваемых на периоде $\Pi=G$.ж)

Предположим теперь, что $g(x)$ является функцией класса $\mathcal{P}(i;\sigma;s+1;G)$ и $g(x)\in W_p^\ell(G)$, $G\in A(H)$. Отметим следствия, вытекающие для $g(x)$ из неравенств (I), (4) и (7).

1) Если $\ell-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\geqslant 0$ (при $\ell-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}=0$ $q\neq\infty$), то на основании (1)

ж) Применявшийся выше термин - функции полиномаильного типа - относился именно к функциям классов $\mathcal{P}(i;\sigma;v;G)$.

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_q(G)} \leq C \|g\|_{W_p^\ell(G)} . \tag{11}$$

2) Если $\ell - s - \frac{n}{p} = 0$ и $q = \infty$, то, в силу (4),

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)} \leq C_6 \|g\|_{W_p^\ell(G)} +$$

$$+ C_7 (2\tau)^{\frac{1}{p'}} h^{-\frac{n}{2\tau}} \|g\|_{W_p^\ell(G)} + C_2 h \|\mathcal{D}^{s+1} g\|_{L_\infty(G)} , \tag{4'}$$

где $0 < h \leq H$, $p \leq \tau < \infty$.

Согласно неравенств (9),

$$\|\mathcal{D}^{s+1} g\|_{L_\infty(G)} \leq \tilde{C} \sigma(i) \|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)} , \tag{12}$$

где $\tilde{C}$ не зависит от i и g .

Оценим последнее слагаемое в (4′) на основании неравенства (12) и положим

$$h = \frac{1}{K C_2 \tilde{C} \sigma(i)} ,$$

где $K \geq 2$ выбрано так, что $h \leq H$. Тогда, перенося слагаемое с $\|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)}$ в левую часть неравенства и замечая, что коэффициент при нем $\leq \frac{1}{2}$, после простых преобразований получим

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)} \leq C_{15}\|g\|_{W_p^\ell(G)} + C_{16}(2\tau)^{\frac{1}{p'}}[\sigma(i)]^{\frac{n}{2\tau}}\|g\|_{W_p^\ell(G)}, \quad (13)$$

где C_{15} и C_{16} не зависят от i, τ и g.

Если $\ln[\sigma(i)]^n \geq 2p$, то, полагая

$$2\tau = \ln[\sigma(i)]^n,$$

получим

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)} \leq C_{17}\|g\|_{W_p^\ell(G)} \cdot [\ln\sigma(i)|^{\frac{1}{p'}} \quad (14)$$

Если же $\ln[\sigma(i)]^n \leq 2p$, то, полагая в (13) $2\tau = 2p$, получим

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_\infty(G)} \leq C_{18}\|g\|_{W_p^\ell(G)}.$$

При $\sigma(i) \geq 2$ мы всегда можем считать, что имеет место неравенство (14), где $\mathcal{J}$ не зависит от i и g.

3) Если $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$, то на основании неравенства (7)

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_q(G)} \le C_{13} h^{l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|g\|_{W_p^l(G)} + C_{14} h \|\mathcal{D}^{s+1} g\|_{L_q(G)} .$$

Применяя, как и выше, для оценки $\|\mathcal{D}^{s+1} g\|_{L_q(G)}$ неравенство (I2) и выбирая соответствующим образом h , получим

$$\|\mathcal{D}^s g\|_{L_q(G)} \le C_{19} \|g\|_{W_p^l(G)} [\sigma(i)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})} \tag{I5}$$

где C_{19} - константа, не зависящая от i и g .

<u>Замечание</u>. Пусть $l=s=0$, $1 \le p < q \le \infty$. Тогда имеет место случай 3) ($l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}<0$), и мы получаем из (I5) хорошо известное неравенство:

$$\|g\|_{L_q(G)} \le C \|g\|_{L_p(G)} [\sigma(i)]^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} . \tag{I6}$$

Если G^m - сечение области G гиперплоскостью размерности m , $1 \le m < n$, то аналогичным способом можно получить следующее неравенство:

$$\|g\|_{L_q(G^m)} \le C \|g\|_{L_p(G)} [\sigma(i)]^{\frac{n}{p}-\frac{m}{q}} . \tag{I7}$$

Неравенства (I6) и (I7) (как и неравенства (I4) и (I5)) можно уточнить, если на область G наложить более жесткие ограничения.

Предположим, что область G удовлетворяет условию: для каждой точки $x \in G$ существует прямоугольный параллелепипед фиксированных размеров с ребрами, параллельными осям координат и с вершиной в x, целиком содержащийся в G. Пусть $H_k\ (k=1,\dots,n)$ - наибольшие допустимые длины ребер достигающего каждую точку x области G параллелепипеда.

Обозначим через e произвольное (в том числе и пустое) подмножество множества $e^n=\{1,\dots,n\}$ натуральных чисел; положим $e'=e^n\setminus e, \bar\omega^e=(\omega_1^e,\dots,\omega_n^e)$, где $\omega_j^e=1$, если $j\in e$, $\omega_j^e=0$, если $j\in e'$,

$$\mathcal{D}^{\bar\omega^e} g(x)=\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}g(x), \qquad \{j_1,\dots,j_k\}=e.$$

Методом интегральных представлений дифференцируемых функций нетрудно доказать следующее неравенство:

$$\|g\|_{L_q(G)}\le\sum_{e\subseteq e^n} C_e\,\|\mathcal{D}^{\bar\omega^e} g\|_{L_p(G)}\times \tag{I8}$$
$$\times\Big(\prod_{k\in e} h_k^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\Big)\Big(\prod_{k\in e'} h_k^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\Big),$$

где $1\le p<q\le\infty$, h_k - произвольные числа, удовлетворяющие

условиям: $0 < h_k \leq H_k$ $(k=1,\dots,n)$, C_e – постоянные, не зависящие от g и h_k.

Предположим еще, что в области G для функции $g(x)$ справедливы неравенства (9) в форме:

$$\|\mathcal{D}^{\bar\alpha+\bar\omega_k} g\|_{L_p(G)} \leq \bar C \sigma(i_k) \|\mathcal{D}^{\bar\alpha} g\|_{L_p(G)} \quad (k=1,\dots,n), \qquad (9')$$

т.е. $g(x)$ является функцией полиномиального типа степени i_k по переменной x_k $(k=1,\dots,n)$.

Тогда на основании (9′) неравенство (18) можно записать в виде:

$$\|g\|_{L_q(G)} \leq \|g\|_{L_p(G)} \sum_{e \subseteq e^n} \tilde C_e \Big(\prod_{k\in e} h_k^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \cdot \sigma(i_k)\Big)\Big(\prod_{k\in e'} h_k^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\Big).$$

Полагая

$$h_k = \frac{1}{M\sigma(i_k)} \quad (k=1,\dots,n),$$

где $M>0$ выбрано так, что $h_k \leq H_k$ $(k=1,\dots,n)$, получим

$$\|g\|_{L_q(G)} \leq C \|g\|_{L_p(G)} \Big(\prod_{k=1}^{n} \sigma(i_k)\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \qquad (19)$$

где C не зависит от g и i_k $(k=1,\dots,n)$.

Пусть, далее, m — натуральное число, $1 \le m \le n$, $e^{n-m} = \{m+1, \ldots, n\}$, e — произвольное подмножество e^{n-m}, $e' = e^{n-m} \setminus e$, G^m — сечение области G гиперплоскостью $x_{m+1} = \mathrm{const}, \ldots, x_n = \mathrm{const}$. Тогда можно установить неравенство:

$$\|g\|_{L_p(G^m)} \le \sum_{e \subseteq e^{n-m}} C_e \|\mathcal{D}^{\bar{\omega}^e} g\|_{L_p(G)} \Big(\prod_{k \in e} h_k^{1-\frac{1}{p}}\Big)\Big(\prod_{k \in e'} h_k^{-\frac{1}{p}}\Big).$$

Отсюда с помощью неравенства (9$'$) получим

$$\|g\|_{L_p(G^m)} \le C \|g\|_{L_p(G)} \cdot \Big(\prod_{k=m+1}^{n} \sigma(i_k)\Big)^{\frac{1}{p}}. \qquad (20)$$

Для целых функций конечной степени при $G = E^n$ и для тригонометрических полиномов, рассматриваемых на периоде, неравенства (I9) и (20), с указанием значений констант C, впервые были получены С.М.Никольским [6], но другим методом. Другие случаи справедливости неравенств (I9) и (20), но в основном для функций одного переменного, рассматривались позднее и рядом других авторов.

Мы будем в дальнейшем рассматривать последовательности $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ функций таких, что $g_i \in \mathcal{P}(i; \sigma; v; G)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и если $i > k$, то $g_i - g_k \in \mathcal{P}(i; \sigma; v; G)$.

Тогда, очевидно, для разности $g_i - g_k$ будут справедливы соответственно неравенства (II), (I4) и (I5) с заменой в них g_i

на $g_i - g_k$.

Для упрощения записи в дальнейшем положим:

$$E_i = E_i^{\ell,p} = \|f - g_i\|_{W_p^\ell(G)}, \quad E_{ik} = \|g_i - g_k\|_{W_p^\ell(G)}.$$

<u>**Теорема.**</u> Пусть $G \in A(H)$, $f \in W_p^\ell(G)$, $\{g_i\}_1^\infty$ – последовательность функций таких, что $g_i \in W_p^\ell(G) \cap \mathcal{P}(i; \sigma; s+1; G)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, s – некоторое натуральное число, q – положительное число, для которого $p \leq q \leq \infty$.

Пусть, далее, E_i монотонно убывают (при $i \to \infty$) и

1) $\lim\limits_{i\to\infty} E_i = 0$, если $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0$

(21)

(при $\ell - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ $q \neq \infty$);

2) Сходится ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} E_{2^m} |\ln \sigma(2^m)|^{\frac{1}{p'}}$,

(22)

если $\ell - s - \frac{n}{p} = 0$ и $q = \infty$;

3) сходится ряд $\sum_{m=0}^{\infty} E_{2^m} [\sigma(2^m)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}$, (23)

если $l - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$.

Тогда функция $f(x)$ имеет в области G все обобщенные производные $\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f$ порядка $|\bar{\alpha}| = s$ и последовательность $\{\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} g_i\}_1^{\infty}$ сходится к $\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f$ в $L_q(G)$, причем:

I) $\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f - \mathcal{D}^{\bar{\alpha}} g_i\|_{L_q(G)} \leq C_{20} E_i$ при условии (2I); (24)

2) $\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f - \mathcal{D}^{\bar{\alpha}} g_i\|_{L_\infty(G)} \leq C_{21} E_i |\ln \sigma(i)|^{\frac{1}{p'}} +$ (25)

$+ C_{22} \sum_{m=r}^{\infty} E_{2^m} |\ln \sigma(2^m)|^{\frac{1}{p'}}$ при условии (22);

3) $\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f - \mathcal{D}^{\bar{\alpha}} g_i\|_{L_q(G)} \leq C_{23} E_i [\sigma(i)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})} +$

$$+C_{24}\sum_{m=\tau}^{\infty} E_{2^m}\left[\sigma(2^m)\right]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})} \quad \text{при условии (23), (26)}$$

где C_j – постоянные, не зависящие от f и g_i, а целое число τ таково, что $2^{\tau-1}<i\le 2^{\tau}$.

Доказательство. Случай $l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\geqslant 0$ не требует рассмотрения, так как неравенство (24) является прямым следствием неравенства (I). Остальные два случая рассматриваются одинаково. Мы остановимся на доказательстве утверждения теоремы в случае $l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}<0$.

Прежде всего заметим, что

$$E_{ik}\le E_i+E_k\le 2E_k \quad \text{, если } i>k \quad , \tag{27}$$

так как E_i по условию монотонно убывают.

Докажем, что последовательность $\{\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} g_{2^m}\}_{m=1}^{\infty}$, $|\bar{\alpha}|=s$ сходится в $L_q(G)$ к некоторой функции φ. Для этого установим сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}(g_{2^{m+1}}-g_{2^m})\|_{L_q(G)} . \tag{28}$$

Поскольку $g_{2^{m+1}} - g_{2^m}$ является функцией класса $\mathcal{P}(2^{m+1}; \sigma; s+1; G)$, то на основании неравенств (I5), (27) и (8) имеем

$$\|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}}(g_{2^{m+1}} - g_{2^m})\|_{L_q(G)} \leq C_{25} E_{2^m}[\sigma(2^{m+1})]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})} \leq$$

$$\leq C_{26} E_{2^m}[\sigma(2^m)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}, \tag{29}$$

где C_{26} не зависит от m.

Из неравенства (29) и сходимости ряда (23) вытекает сходимость ряда (28). Поэтому существует функция $\varphi \in L_q(G)$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} g_{2^m} - \varphi\|_{L_q(G)} = 0$$

Так как, кроме того,

$$\lim_{m\to\infty} \|g_{2^m} - f\|_{L_p(G)} = 0 \qquad (E_i \to 0 \text{ при } i\to\infty),$$

то существует $\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f$ и $\mathcal{D}^{\bar{\alpha}} f = \varphi \in L_q(G)$.

Оценим теперь $\|\mathcal{D}^{\bar\alpha} f - \mathcal{D}^{\bar\alpha} g_i\|_{L_q(G)}$ при произвольном натуральном i. Выберем целое r так, чтобы $2^{r-1} < i \leq 2^r$. Тогда, используя неравенство:

$$\|\mathcal{D}^{\bar\alpha}(g_{2^r} - g_i)\|_{L_q(G)} \leq C_{27} E_i [\sigma(i)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})} \quad (i=2^{r-1},\dots,2^r),$$

получаемое так же как и неравенство (29), получим

$$\|\mathcal{D}^{\bar\alpha}(f - g_i)\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq \|\mathcal{D}^{\bar\alpha}(g_{2^r} - g_i)\|_{L_q(G)} + \|\mathcal{D}^{\bar\alpha}(f - g_{2^r})\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq \|\mathcal{D}^{\bar\alpha}(g_{2^r} - g_i)\|_{L_q(G)} + \sum_{m=r}^{\infty} \|\mathcal{D}^{\bar\alpha}(g_{2^{m+1}} - g_{2^m})\|_{L_q(G)} \leq$$

$$\leq C_{28} E_i [\sigma(i)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})} + C_{29} \sum_{m=r}^{\infty} E_{2^m} [\sigma(2^m)]^{-(l-s-\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}.$$

Теорема доказана.

II. Доказанная теорема позволяет, зная оценку скорости убывания $E_i^{\ell,p} = \| f - g \|_{W_p^\ell(G)}$, делать заключение о скорости сходимости производных произвольного порядка s функций g_i классов $\mathcal{P}(i;\sigma;\nu;G)$ к соответствующей производной функции f в норме $L_q(G)$. Оценку для $E_i^{\ell,p}$ удается в некоторых случаях указать на основе теорем конструктивной теории функций.

Мы применим доказанную теорему к оценке быстроты сходимости вариационных процессов.

Предположим, что ищется решение первой краевой задачи для линейного самосопряженного дифференциального уравнения эллиптического типа порядка 2ℓ в n-мерной ограниченной области G :

$$\mathcal{L} u = f$$

$$D^{\bar{\alpha}} u/_{\Gamma} = 0 \qquad |\bar{\alpha}| = 0, 1, \ldots, \ell - 1. \tag{30}$$

Пусть решение u ищется как предел минимизирующей последовательности $\{u_i\}_1^\infty$ для соответствующего задаче квадратичного функционала $\mathcal{F}(u)$. Предположим, что минимизирующая последовательность строится по методу Ритца и функции u_i являются функциями соответствующих классов $\mathcal{P}(i;\sigma;\nu;G)$ вида (I0) (для некоторых частных типов областей G функции u_i оказываются просто алгебраическими полиномами).

Пусть $\tilde{u}_i$ – произвольная функция вида (I0) ($\tilde{u}_i = \omega^\ell(x) Q_i(x)$, где $Q_i(x)$ – произвольный полином степени не выше i по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$).

Тогда, как хорошо известно, справедлива следующая цепь неравенств

$$E_i^{l,2}=\|u-u_i\|_{W_2^l(G)} \le C_1(\mathcal{F}(u_i)-\mathcal{F}(u)) \le$$

$$\le C_1(\mathcal{F}(\tilde{u}_i)-\mathcal{F}(u)) \le C_2\|u-\tilde{u}_i\|_{W_2^l(G)}, \tag{31}$$

где C_2 не зависит от u и $\tilde{u}_i$.

Возможность получения оценки для $E_i^{l,2}$ основана на неравенстве (31) и теоремах, дающих оценку для $\|u-\tilde{u}_i\|_{W_2^l(G)}$. Оценку для $\|u-\tilde{u}_i\|_{W_2^l(G)}$ можно получить на основании теоремы И.Ю.Харрик [7].

Пусть функция u – решение задачи (30)– является K раз непрерывно дифференцируемой в области $\bar{G}$, а $\omega(x)$ – $K+1$ раз непрерывно дифференцируема. Тогда, как показано в работе [7], существует функция $\tilde{u}_i$, указанного выше вида, такая, что

$$\|u-\tilde{u}_i\|_{C^l(\bar{G})}=O\left(\frac{\omega^{(K)}(u;\frac{1}{i})}{i^{K-l}}\right),\quad K>l, \tag{32}$$

где $\omega^{(K)}(u;\frac{1}{i})$ – максимальный модуль непрерывности производных порядка K функции u.

При указанных условиях из (31) и (32) следует, что

$$E_i^{l,2}\le C\,\frac{\omega^{(K)}(u;\frac{1}{i})}{i^{K-l}}.$$

Применяя эту оценку к доказанной выше теореме при $p=2$, $G(i)=i^2$, получим неравенства:

I) $\|\mathcal{D}^s u-\mathcal{D}^s u_i\|_{L_q(G)}\leq C_1 i^{-k+l}\omega^{(k)}(u;\frac{1}{i})$, если

$$l-s-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}\geqslant 0 \quad (\text{при } l-s-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}=0 \; q\neq\infty),\; k>l;$$

2) $\|\mathcal{D}^s u-\mathcal{D}^s u_i\|_{C(G)}\leq C_2 i^{-k+l}\omega^{(k)}(u;\frac{1}{i})\sqrt{\ln i}$,

если $l-s-\frac{n}{2}=0$, $k>l$;

3) $\|\mathcal{D}^s u-\mathcal{D}^s u_i\|_{L_q(G)}\leq C_3 i^{-k+l-2[l-s-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}]}\omega^{(k)}(u;\frac{1}{i})$,

если $l-s-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}<0$ и $k>l-2[l-s-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}]$, где C_1, C_2 и C_3 не зависят от i.

Литература

I. Ильин В.П. Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов. Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1959, 53, 64-127.

2. Ильин В.П. Кандидатская диссертация. ЛГУ, 1951г.

3. Даугавет И.К. О быстроте сходимости метода Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений. Известия ВУЗов, Математика, 1958, № 5, 158-165.

4. Соболев С.Л. Об одной теореме функционального анализа. Матем. сборник, 1938, 4(46):3, 471-497.

5. Харрик И.Ю. Об одном аналоге неравенства Маркова. ДАН СССР, 1956, 106, № 2, 203-206.

6. Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Тр. Матем. ин-та им.В.А. Стеклова АН СССР, 1951, 38, 244-278.

7. Харрик И.Ю. О приближении функций, обращающихся на границе области в нуль вместе с частными производными, функциями особого вида. Сиб. матем. журнал , 1963, IУ, № 2, 408-425.