



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. Yu. Maksimov, *CW*-groups, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1982, Number 1, 27–31

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

February 12, 2025, 04:08:03



**BOUNDEDNESS OF THE DEGREE
OF HIGH DIMENSIONAL TORICAL FANO VARIETIES**

Let V be a nonsingular projective torical variety with ample anti-canonical sheaf, i. e. a torical Fano variety. It is proved that the degree of this variety is less then a constant depending only on the dimension of V . There is a simple method for the computation of this constant.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исковских В. А. Антиканоические модели трехмерных алгебраических многообразий.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 12. (Итоги науки). ВИНТИ, 1979, с. 59—157.
2. Данилов В. И. Геометрия торических многообразий.— Успехи матем. наук, 1978, 33, вып. 2, с. 97—155.

Поступила в редакцию
18.05.81

УДК 512.8

С. Ю. Максимов

CW-ГРУППЫ

В настоящей работе рассматриваются так называемые CW-группы, являющиеся обобщением групп Уорфилда [1]; находятся достаточные условия того, что прямое слагаемое прямой суммы CW-групп есть прямая сумма CW-групп.

На протяжении всей работы Σ и \oplus обозначают прямые суммы, под термином «группа» понимается абелева группа, под «счетностью» — не более чем счетность. Используемое в тексте определение подгрупп, в основном содержащихся одна в другой, а также в основном связанных подгрупп дано в [1, 2].

Определение 1. Пусть \mathfrak{A} — произвольный класс групп. Группу G будем называть CW-группой относительно класса \mathfrak{A} или, короче, CW-группой, если для любых групп $A_i \in \mathfrak{A}$ и любого гомоморфизма $\varphi: G \rightarrow \sum_{i \in I} A_i$ существуют счетное подмножество $J \subseteq I$ и разложение $G = G_1 \oplus G_2$, такие, что G_2 — счетная прямая сумма ограниченных групп, а любой ненулевой элемент из G_1 имеет ненулевое кратное, образ которого при гомоморфизме φ лежит в $\sum_{i \in I} A_i$.

Лемма 1. Класс CW-групп замкнут относительно счетных прямых сумм.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1 из [1].

Лемма 2. Класс CW-групп со счетными ульмовскими инвариантами замкнут относительно прямых слагаемых.

Доказательство. Пусть $A = B \oplus C$ — CW-группа со счетными ульмовскими инвариантами, $\varphi: B \rightarrow \sum_{i \in I} A_i$ — гомоморфизм, $A_i \in \mathfrak{A}$.

Продолжим φ до гомоморфизма $\psi: B \oplus C \rightarrow \sum_{i \in I} A_i$, положив $\psi|_B = \varphi$, $\psi|_C = 0$. По условию существуют разложение $B \oplus C = G_1 \oplus G_2$ и счетное подмножество $J_1 \subseteq I$, такие, что G_2 — счетная прямая сумма ограниченных групп, а любой ненулевой элемент из G_1 имеет ненулевое кратное, образ которого при гомоморфизме ψ лежит в $\sum_{i \in J_1} A_i$. В силу

счетности ульмовских инвариантов группы A группа G_2 счетна, поэтому существует счетное подмножество $J_2 \subseteq I$, такое, что $\psi(G_2) \subseteq \sum_{i \in J_2} A_i$.

Отсюда получим, что любой ненулевой элемент группы A имеет ненулевое кратное, образ которого при гомоморфизме ψ лежит в $\sum_{i \in J_1 \cup J_2} A_i$,

но так как $\psi(B) = \varphi(B)$, то B есть CW -группа. Лемма доказана.

Определение 2. Группу G назовем *сервантно полной*, если для любой ее подгруппы H в G найдется сервантная подгруппа H' , в основном связанная с H .

Лемма 3. Класс сервантно полных групп замкнут относительно прямых слагаемых.

Доказательство. Пусть $A = B \oplus C$ — сервантно полная группа, H — произвольная подгруппа группы B . Тогда существует сервантная подгруппа H' группы A , в основном связанная с H . Положим $F = \pi_B(H')$, где π_B — проекция на B , и докажем, что F в основном связана с H и сервантна в B . В самом деле, рассмотрим произвольный $b \in F$. Тогда существует $c \in C$, такой, что $b + c \in H'$. Поэтому существует $n > 0$, такое, что $n(b + c) \in H$, $n(b + c) \neq 0$. Но $H \subseteq B$. Отсюда $nc = 0$, то есть $0 \neq nb \in H$, и F в основном содержится в H . Пусть теперь $0 \neq x \in H$, тогда существует $n > 0$, такое, что $nx \in H'$, $nx \neq 0$. Отсюда $nx \in B \cap H' \subseteq F$. Поэтому и H в основном содержится в F , то есть F и H в основном связаны. Докажем, что любой ненулевой элемент из F имеет ненулевое кратное, все высоты которого в B и F совпадают. Действительно, пусть $0 \neq x \in F$; тогда существует $n > 0$, такое, что $nx \neq 0$ и $nx \in H'$. Предположим, что $nx = mb$, $b \in B$. Тогда в силу сервантности H' существует $h \in H'$, такой, что $nx = mh$. Пусть $h = b' + c$, где $b' \in B$, $c \in C$. Тогда $nx = mb'$, так как $nx \in B$. Теперь совпадение высот вытекает из того, что $b' \in \pi_B(H')$, а в силу [2, лемма 4] подгруппа F сервантна в B . Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $A = B \oplus C = \sum_{i \in I} A_i$, причем все A_i суть CW -группы со счетными ульмовскими инвариантами. Тогда существует счетное подмножество $J \subseteq I$, такое, что $A' = \sum_{i \in J} A_i$ в основном связана с $(A * \cap B) \oplus (A * \cap C)$.

Доказательство. Пусть $\pi_B: A \rightarrow B$ — проекция A на B , и пусть $i_1 \in I$. Повторив рассуждения, проведенные в лемме 2, получим, что существует счетное подмножество $M_1 \subseteq I$, такое, что любой ненулевой элемент из A_{i_1} имеет ненулевое кратное, образ которого при гомоморфизме π_B лежит в $\sum_{i \in M_1} A_i$. Без ограничения общности можно считать,

что $i_1 \in M_1$. В силу леммы 1 $\sum_{i \in M_1} A_i$ есть CW -группа, поэтому аналогично можно построить счетное подмножество $M_2 \subseteq I$, такое, что $M_1 \subseteq M_2$, и любой ненулевой элемент из $\sum_{i \in M_1} A_i$ имеет ненулевое кратное, образ

которого при гомоморфизме π_B лежит в $\sum_{i \in M_2} A_i$. Продолжив процесс, получим счетную цепочку подмножеств $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots$, таких, что $|M_n| \leq \aleph_0$ для каждого n и любой ненулевой элемент из $\sum_{i \in M_n} A_i$

имеет ненулевое кратное, образ которого при π_B лежит в $\sum_{i \in M_{n+1}} A_i$. Поло-

жим $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, $A^* = \sum_{i \in J} A_i$. Тогда $|J| \leq \aleph_0$ и для любого $x \in A^*$ существует $m > 0$, такое, что $mx \neq 0$ и $\pi_B(mx) \in A^*$. Пусть $x = b + c$, $b \in B$, $c \in C$; отсюда $mb = \pi_B(mx) \in A^*$. Поэтому $mc = mx - mb \in A^*$, то есть $mx = mb + mc \in (A^* \cap B) \oplus (A^* \cap C)$, а поскольку $(A^* \cap B) \oplus (A^* \cap C) \subseteq A^*$, то $(A^* \cap B) \oplus (A^* \cap C)$ и A^* в основном связаны. Лемма доказана.

Теорема 1. Класс сервантно полных прямых сумм CW-групп со счетными ульмовскими инвариантами замкнут относительно прямых слагаемых.

Доказательство. Пусть $A = B \oplus C = \sum_{i \in I} A_i$ — сервантно полная группа, причем все A_i суть CW-группы со счетными ульмовскими инвариантами. Индукцией по τ докажем, что для любого τ существуют подгруппы $X_\alpha \subseteq B$, $Y_\alpha \subseteq C$, $\alpha \leq \tau$, такие, что $\sum_{\alpha \leq \tau} (X_\alpha \oplus Y_\alpha)$ сервантна в A

и в основном связана с $\sum_{\alpha \leq \tau} A_\alpha^*$, где $A_\alpha^* = \sum_{i \in J_\alpha} A_i$, $|J_\alpha| \leq \aleph_0$.

Проведем доказательство для $\tau = 1$. В самом деле, по лемме 4 существует счетное подмножество $J_1 \subseteq I$, такое, что $A_1^* = \sum_{i \in J_1} A_i$ в основном связана с $(A^* \cap B) \oplus (A^* \cap C)$. В силу леммы 3 подгруппы B и C сервантно полны. Поэтому существуют подгруппы X_1, Y_1 , сервантные в B и C соответственно, причем X_1 в основном связана с $A^* \cap B$, а Y_1 — с $A^* \cap C$. Отсюда $X_1 \oplus Y_1$ в основном связана с $(A^* \cap B) \oplus (A^* \cap C)$, а значит, и с A^* . Кроме того, $X_1 \oplus Y_1$ сервантна в A , то есть для $\tau = 1$ утверждение доказано.

Пусть для всех $\tau < \tau_0$ утверждение верно. Докажем его для τ_0 . Предположим сначала, что τ_0 — неперделное, и пусть $\tau_0 = \tau + 1$. В силу индуктивного предположения $\sum_{\alpha < \tau} (X_\alpha \oplus Y_\alpha)$ сервантна в A и в основном связана с $\sum_{\alpha < \tau} A_\alpha^*$; поэтому согласно [2, лемма 5] имеем разложение

$$A = \sum_{\alpha < \tau} (X_\alpha \oplus Y_\alpha) \oplus \sum_{i \in \bigcup_{\alpha < \tau} J_\alpha} A_i.$$

Так как $\sum_{\alpha < \tau} X_\alpha$ — прямое слагаемое A , $X_\alpha \subseteq B$ для всех $\alpha < \tau$, то $\sum_{\alpha < \tau} X_\alpha$ — прямое слагаемое B , то есть существует B_τ , такое, что

$$B = \sum_{\alpha < \tau} X_\alpha \oplus B_\tau.$$

Аналогично существует C_τ , такое, что

$$C = \sum_{\alpha < \tau} Y_\alpha \oplus C_\tau.$$

Таким образом,

$$A = \sum_{\alpha \leq \tau} (X_\alpha \oplus Y_\alpha) \oplus B_\tau \oplus C_\tau.$$

Положим $\sum_{\alpha \leq \tau} (X_\alpha \oplus Y_\alpha) = H$. Тогда будем иметь

$$A = H \oplus \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ \alpha \leq \tau}}^{J_\alpha} A_i = H \oplus B_\tau \oplus C_\tau.$$

Отсюда

$$A/H = \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ \alpha \leq \tau}}^{J_\alpha} (A_i \oplus H)/H = ((B_\tau \oplus H)/H) \oplus ((C_\tau \oplus H)/H).$$

По лемме 4 существует счетное подмножество $J_{\tau+1} \subseteq I$, такое, что фактор-группа $(A_{\tau+1}^* \oplus H)/H = \sum_{i \in J_{\tau+1}} (A_i \oplus H)/H$ в основном связана с

$$(((A_{\tau+1}^* \oplus H) \cap (B_\tau \oplus H))/H) \oplus (((A_{\tau+1}^* \oplus H) \cap (C_\tau \oplus H))/H).$$

Пусть $\pi_\tau: A \rightarrow B_\tau \oplus C_\tau$ — проекция; тогда имеем включения

$$\begin{aligned} \pi_\tau((A_{\tau+1}^* \oplus H) \cap (B_\tau \oplus H)) &\subseteq B_\tau, \\ \pi_\tau((A_{\tau+1}^* \oplus H) \cap (C_\tau \oplus H)) &\subseteq C_\tau. \end{aligned}$$

По лемме 3 в B_τ существует сервантная подгруппа $X_{\tau+1}$, в основном связанная с $\pi_\tau((A_{\tau+1}^* \oplus H) \cap (B_\tau \oplus H))$, а в C_τ существует сервантная подгруппа $Y_{\tau+1}$, в основном связанная с $\pi_\tau((A_{\tau+1}^* \oplus H) \cap (C_\tau \oplus H))$. Путем непосредственной проверки нетрудно убедиться, что $(X_{\tau+1} \oplus H)/H$ в основном связана с $((A_{\tau+1}^* \oplus H) \cap (B_\tau \oplus H))/H$, а $(Y_{\tau+1} \oplus H)/H$ — с $((A_{\tau+1}^* \oplus H) \cap (C_\tau \oplus H))/H$. Отсюда заключаем, что $((X_{\tau+1} \oplus H)/H) \oplus ((Y_{\tau+1} \oplus H)/H)$ в основном связана с $((A_{\tau+1}^* \oplus H) \cap (B_\tau \oplus H))/H \oplus ((A_{\tau+1}^* \oplus H) \cap (C_\tau \oplus H))/H$, а значит, и с $(A_{\tau+1}^* \oplus H)/H$. Поэтому $H \oplus X_{\tau+1} \oplus Y_{\tau+1}$ в основном связана с $A_{\tau+1} \oplus H$, откуда $\sum_{\alpha \leq \tau_0} (X_\alpha \oplus Y_\alpha)$

в основном связана $\sum_{\alpha \leq \tau_0} A_\alpha^*$. Кроме того, по построению $\sum_{\alpha \leq \tau_0} (X_\alpha \oplus Y_\alpha)$ сервантна в A , то есть для неопределенного τ_0 утверждение доказано.

Пусть теперь τ_0 — предельное. По индуктивному предположению $\sum_{\alpha \leq \tau_0} (X_\alpha \oplus Y_\alpha)$ сервантна в A и в основном связана с $\sum_{\alpha \leq \tau_0} A_\alpha^*$. Положим $X_{\tau_0} = Y_{\tau_0} = A_{\tau_0}^* = 0$. Тогда, очевидно, $\sum_{\alpha \leq \tau_0} (X_\alpha \oplus Y_\alpha)$ в основном связана с $\sum_{\alpha \leq \tau_0} A_\alpha^*$ и сервантна в A . Итак, утверждение полностью доказано.

Далее, согласно [2, лемма 5] для любого τ имеем разложение

$$A = \sum_{\alpha \leq \tau} (X_\alpha \oplus Y_\alpha) \oplus \sum_{\substack{i \in \bar{I} \\ \alpha \leq \tau}}^{J_\alpha} A_i.$$

Более того, нетрудно видеть, что на каждом неопределенном шаге множество J_τ можно выбрать непустым, поэтому существует τ_0 , такое, что

$$A = \sum_{\alpha \leq \tau_0} (X_\alpha \oplus Y_\alpha).$$

Отсюда

$$B = \sum_{\alpha < \tau_0} X_\alpha, \quad C = \sum_{\alpha < \tau_0} Y_\alpha.$$

Кроме того,

$$X_\alpha \oplus Y_\alpha \cong A_\alpha^*$$

для любого α . Поэтому в силу лемм 1, 2 подгруппы X_α и Y_α суть CW -группы. Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет получить следующее утверждение для групп без кручения:

Теорема 2. Класс прямых сумм CW -групп без кручения замкнут относительно прямых слагаемых.

Доказательство легко следует из теоремы 1, если заметить, что всякая группа без кручения сервантно полна и имеет нулевые ульмовские инварианты.

Автор благодарен А. В. Иванову за постановку задачи и А. П. Мишиной за постоянное внимание к работе.

S. Yu. Maksimov

CW-GROUPS

If a purely divisible group G is a direct sum of CW -groups with countable Ulm invariants then any summand of G has the same properties.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А. В. О тестовой проблеме Капланского.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1981, 42, с. 200—220.
2. Warfield R. An isomorphic refinement theorem for Abelian groups.— Pacif. J. Math., 1970, 34, p. 237—255.

Поступила в редакцию
25.05.81

УДК 513.83

В. В. Успенский

О СПЕКТРЕ ЧАСТОТ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть X_1 и X_2 — два пространства одной и той же тесноты, $t(X_1) = t(X_2) = \tau$. Может случиться, что утверждение «каково бы ни было Y , если $t(Y) \leq \tau$, то и $t(X_i \times Y) \leq \tau$ » верно при $i=1$ и не верно при $i=2$. Введенное [1] и подробно исследованное А. В. Архангельским (см. [2], а также [3], гл. II, § 3) понятие спектра частот $\text{Sp } X$ топологического пространства X направлено на обнаружение подобного рода «скрытых» свойств X , связанных с теснотой. В настоящей работе изучаются пространства непрерывных функций с точки зрения упомянутых «скрытых» особенностей структуры. Все пространства предполагаются вполне регулярными, τ — произвольный бесконечный кардинал, ω — наименьший бесконечный кардинал, $\varepsilon = \exp \omega$. Через $C(X)$ обозначается пространство непрерывных вещественных функций на X , которое наделено топологией поточечной сходимости. Теснота $C(X)$ выражается формулой $t(C(X)) = \sup \{l(X^n) : n \in \mathbf{N}\}$ (см. [3], теорема 4.1.2); l — число Линделёфа. Нас интересует поведение тесноты при умножении $C(X)$ на произвольное Y . Согласно приведенной формуле $t(C(X)) = \omega$, когда X — бикомпакт. Этому случаю уделяется особое внимание.

Определение 1: $\text{Sp } X = \{\tau : t(X \times Y) \leq \tau \text{ для любого } Y, \text{ такого, что } t(Y) \leq \tau\}$.