И. В. Денисова, В. А. Солонников, Классическая разрешимость задачи о движении изолированной массы сжимаемой жидкости,
Алгебра и анализ, 2002, том 14, выпуск 1, 71–98

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 1

КЛАССИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ИЗОЛИРОВАННОЙ МАССЫ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© И. В. Денисова, В. А. Солонников

§1. Введение. Основные формулировки

В этой работе мы рассмотрим задачу о движении в вакууме конечного объема сжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью. Жидкость считается баротропной, на свободной поверхности учитываются силы поверхностного натяжения. Мы докажем локальную однозначную разрешимость этой задачи в гёльдеровских классах функций. Аналогичный результат для этой задачи в пространствах Соболева был получен В. А. Солонниковым и А. Тани в [1]. Данная работа является продолжением [2], где была доказана разрешимость линейной полупространственной задачи на любом конечном промежутке времени.

Перейдем к формулировке нашей задачи. Мы считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ жидкость находится в известной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим границу этой области $\partial\Omega$ через Γ. Для каждого $t > 0$ требуется найти свободную поверхность $\Gamma_t = \partial\Omega_t$, поле скоростей $\mathbf{v}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$ и функцию плотности $\rho(x,t) > 0$ жидкости, удовлетворяющие начально-краевой задаче для системы уравнений Навье–Стокса

$$\rho(\mathcal{D}_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}) - \nabla\cdot\mathbb{T} = \rho\mathbf{f},\ \ \mathcal{D}_t\rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \text{ в } \Omega_t, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x),\ \ \rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$\mathbb{T}\mathbf{n}|_{\Gamma_t} = \sigma H\mathbf{n} - p_e\mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma_t. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathcal{D}_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$, тензор напряжений $\mathbb{T}$ задается формулой

$$\mathbb{T} = (-p(\rho) + \mu'\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbb{I} + \mu\mathbb{S}(\mathbf{v}),$$

$$(\mathbb{S}(\mathbf{v}))_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad i,j = 1,2,3;$$

Ключевые слова: система Навье-Стокса, задача со свободной границей, гёльдеровская норма функции, некоэрцитивное краевое условие.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №01-01-00330.

$\mathbb{I}$ — единичная матрица,

μ, μ' — коэффициенты динамических вязкостей жидкости,

$p(\rho)$ — давление жидкости, заданное известной гладкой функцией плотности,

$\mathbf{f}$ — заданное поле внешних сил,

$p_e = p_e(x,t)$ — функция внешнего давления, заданная при $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$;

$\mathbf{v}_0$ и ρ_0 — начальные значения скорости и плотности жидкости соответственно;

$\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к Ω_t;

$\sigma \geqslant 0$ — коэффициент поверхностного натяжения;

$H(x,t)$ — удвоенная средняя кривизна поверхности Γ_t, причем $H < 0$ в точках выпуклости Γ_t.

Запись $\nabla \cdot \mathbb{T}$ обозначает вектор с компонентами $(\nabla \cdot \mathbb{T})_j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}$, $j = 1, 2, 3$. Здесь и далее мы будем подразумевать суммирование по повторяющимся индексам. В $\mathbb{R}^3$ введены декартовы координаты; точкой обозначено декартово скалярное произведение.

Условимся отмечать вектора и пространства, которым они принадлежат, полужирным шрифтом.

Поскольку мы должны исключить потерю массы через свободную поверхность, то будем считать, что граница Γ_t состоит из точек $x(\xi,t)$, соответствующий радиус-вектор которых является решением задачи Коши

$$\mathcal{D}_t \mathbf{x} = \mathbf{v}(x(\xi,t),t), \quad \mathbf{x}(\xi,0) = \xi, \quad \xi \in \Gamma. \tag{1.4}$$

Значит, $\Gamma_t = \{x(\xi,t) \mid \xi \in \Gamma\}$, а $\Omega_t = \{x(\xi,t) \mid \xi \in \Omega\}$.

Условие (1.4) замыкает систему (1.1)–(1.3) и позволяет избавиться от неизвестной границы путем перехода от эйлеровых координат к лагранжевым в соответствии с формулой

$$\mathbf{x}(\xi,t) = \boldsymbol{\xi} + \int_0^t \mathbf{u}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau \equiv \mathbf{X}_{\mathbf{u}}(\xi,t), \tag{1.5}$$

где $\mathbf{u}(\xi,t) = \mathbf{v}(x(\xi,t),t)$ — поле скоростей в лагранжевых координатах.

Якобиан преобразования (1.5) $J_{\mathbf{u}}(\xi,t) = \det\{a_{ij}\}_{j=1}^3$,

$$a_{ij}(\xi,t) = \delta_j^i + \int_0^t \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}\,\mathrm{d}\tau,$$

является решением задачи Коши

$$\mathcal{D}_t J_{\mathbf{u}}(\xi,t) \equiv \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} A_{ij} = A_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \equiv J_{\mathbf{u}}(\xi,t)(\nabla \cdot \mathbf{v}|_{x=X_{\mathbf{u}}}), \quad J_{\mathbf{u}}(\xi,0) = 1, \tag{1.6}$$

где δ_j^i — символы Кронекера, A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы Якоби, а $\mathbb{A} = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^3$. Интегрируя (1.6), получаем

$$J_{\mathbf{u}}(\xi, t) = 1 + \int_0^t \mathbb{A}\nabla \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}\,\tau \tag{1.7}$$

и

$$J_{\mathbf{u}}(\xi, t) = \exp\left(\int_0^t \nabla \cdot \mathbf{v}|_{x=X_{\mathbf{u}}} \, \mathrm{d}\,\tau\right) \equiv \exp\left(\int_0^t \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}\,\tau\right), \tag{1.8}$$

где $\nabla_{\mathbf{u}} \equiv \{\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\}_{k=1}^3 = J_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbb{A}\nabla$.

После преобразования (1.5) второе уравнение в системе (1.1) примет вид

$$\mathcal{D}_t \widehat{\rho} + \widehat{\rho}\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = 0,$$

откуда ввиду (1.8) выводим выражение для плотности в лагранжевых координатах

$$\widehat{\rho}(\xi, t) = \rho_0(\xi) \exp\left(-\int_0^t \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}\,\tau\right) = \rho_0(\xi) J_{\mathbf{u}}^{-1}(\xi, t).$$

Подставим это выражение в первое уравнение из (1.1) и воспользуемся известной формулой для удвоенной средней кривизны поверхности

$$H\mathbf{n} = \Delta(t)\mathbf{x} \equiv \Delta(t)\mathbf{X}_{\mathbf{u}}.$$

Здесь $\Delta(t)$ — оператор Бельтрами—Лапласа на Γ_t. Далее, разделим краевое условие (1.3) на касательную и нормальную компоненты. Для этого спроектируем его на касательные плоскости сначала к Γ_t, а затем — к Γ с помощью проекторов Π и Π_0 соответственно.

Обозначим через $\mathbf{n}_0$ внешнюю нормаль к Γ. Она связана с $\mathbf{n}$ соотношением

$$\mathbf{n} = \frac{J_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{n}_0}{|J_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{n}_0|} = \frac{\mathbb{A}\mathbf{n}_0}{|\mathbb{A}\mathbf{n}_0|}.$$

В результате описанных выше преобразований мы приходим к системе, эквивалентной (1.1)–(1.4) при $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0 > 0$:

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_t\mathbf{u} - \rho_0^{-1}(\xi)\mathbb{A}\nabla \cdot \mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} - \rho_0^{-1}(\xi)\mathbb{A}\nabla p(\rho_0 J_{\mathbf{u}}^{-1}) \text{ на } \Omega, \quad t > 0, \\
\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \mu\Pi_0\Pi\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\mathbf{n}|_\Gamma = 0, \\
\mathbf{n}_0 \cdot \mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\mathbf{n}|_\Gamma - \sigma\mathbf{n}_0 \cdot \Delta(t)\mathbf{X}_{\mathbf{u}}|_\Gamma = (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})\{p(\rho_0 J_{\mathbf{u}}^{-1}) - p_e(\mathbf{X}_{\mathbf{u}}, t)\}|_\Gamma,
\end{gathered} \tag{1.9}$$

где

$$\mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}) = (\mu'\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w})\mathbb{I} + \mu\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}),$$
$$(\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}))_{ij} = J_{\mathbf{u}}^{-1}\left(A_{ik}\frac{\partial w_j}{\partial \xi_k} + A_{jk}\frac{\partial w_i}{\partial \xi_k}\right),$$
$$\Pi_0\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{n}_0, \quad \Pi\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{n}.$$

Хотя коэффициенты системы (1.9) значительно сложнее, чем у (1.1)–(1.3), она имеет то преимущество, что является начально-краевой задачей относительно одной неизвестной вектор-функции $\mathbf{u}$ в известной области Ω.

Как уже упоминалось, мы будем искать решение задачи (1.9) в пространствах Гёльдера. Напомним определение этих пространств.

Пусть Ω_0 — область в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $Q_T = \Omega_0 \times (0, T)$ и $\alpha \in (0,1)$. Обозначим через $C^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$ пространство функций, заданных в Q_T и имеющих конечную норму

$$|f|_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)} = |f|_{Q_T} + \langle f\rangle_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)},$$

где

$$|f|_{Q_T} = \sup_{(x,t)\in Q_T} |f(x,t)|,$$
$$\langle f\rangle_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)} = \langle f\rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} + \langle f\rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)},$$
$$\langle f\rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{x,y\in\Omega_0} \sup_{t\in(0,T)} |f(x,t) - f(y,t)||x-y|^{-\alpha},$$
$$\langle f\rangle_{t,Q_T}^{(\beta)} = \sup_{x\in\Omega_0} \sup_{t,\tau\in(0,T)} |f(x,t) - f(x,\tau)||t-\tau|^{-\beta}, \quad \beta \in (0,1).$$

Положим $|f|_{x,Q_T}^{(\alpha)} = |f|_{Q_T} + \langle f\rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)}$.

Пусть $\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} = \partial^{(\mathbf{r})}/(\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n})$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_i > 0$, $|\mathbf{r}| = r_1 + \cdots + r_n$, $\mathcal{D}_t^s = \partial^s/\partial t^s$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и пусть $k \in \mathbb{N}$. Пространство $C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)$ состоит из функций с конечной нормой

$$|f|_{Q_T}^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})} = \sum_{|r|+2s\leqslant k} |\mathcal{D}x^{\mathbf{r}}\mathcal{D}_t^s f|_{Q_T} + \langle f\rangle_{Q_T}^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})},$$
$$\langle f\rangle_{Q_T}^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})} = \sum_{|\mathbf{r}|+2s=k} \langle\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}}\mathcal{D}_t^s\rangle_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)} + \sum_{|r|+2s=k-1} \langle\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}}\mathcal{D}_t^s f\rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}.$$

Символом $\mathring{C}^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)$ будем обозначать подпространство $C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(Q_T)$, состоящее из функций f таких, что $\mathcal{D}_t^i f|_{t=0} = 0$, $i = 0, \ldots, \left[\frac{k+\alpha}{2}\right]$.

Через $C^{k+\alpha}(\Omega_0)$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, обозначим пространство функций $f(x)$, $x \in \Omega_0$, с нормой

$$|f|_{\Omega_0}^{(k+\alpha)} = \sum_{|\mathbf{r}|\leqslant k} |\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} f|_{\Omega_0} + \langle f\rangle_{\Omega_0}^{(k+\alpha)},$$

$$\langle f\rangle_{\Omega_0}^{(k+\alpha)} = \sum_{|\mathbf{r}|=k} \langle \mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} f\rangle_{\Omega_0}^{(\alpha)} = \sup_{x,y\in\Omega_0} \sum_{|\mathbf{r}|=k} \big|\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} f(x) - \mathcal{D}_y^{\mathbf{r}} f(y)\big| |x-y|^{-\alpha}.$$

Будем считать, что вектор-функция принадлежит пространству Гёльдера, если этому пространству принадлежат все компоненты этой вектор-функции. Норму вектора определим как максимум норм его компонент. Такое же определение введем и для норм матричных функций.

С помощью локальных карт и разбиения единицы все эти пространства вводятся на многообразиях, в частности на Γ и $G_T = \Gamma \times (0,T)$.

Введем обозначения: $\mathbb{R}_T^3 = \mathbb{R}^3 \times (0,T)$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть при некоторых* $\alpha \in (0,1)$ *и* $T < \infty$ *поверхность* $\Gamma \in C^{3+\alpha}$, $\rho_0 \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $\rho_0(\xi) \geqslant r_0 > 0$, *константа* $\sigma \geqslant 0$, $p \in C^3(\mathbb{R}_+)$, $\mathbf{f}, \mathcal{D}_f\mathbf{f} \in \mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}_T^3)$, $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\Omega)$; $p_e, \mathcal{D}_x p_e \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}_T^3)$. *Предположим, кроме того, что выполнено условие согласования*

$$-p(\rho_0)\mathbf{n}_0 + \mu'(\nabla\cdot\mathbf{v}_0)\mathbf{n}_0 + \mu\mathbb{S}(\mathbf{v}_0)\mathbf{n}_0\big|_\Gamma = \sigma H\mathbf{n}_0 - p_e\mathbf{n}_0\big|_{t=0}. \tag{1.10}$$

Тогда на некотором интервале времени $(0,T_0)$, $T_0 \leqslant T$, *задача* (1.9) *имеет единственное решение* $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$. *Величина* T_0 *зависит от норм* $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}_0$, p, p_e, ρ_0 *и от кривизны поверхности* Γ.

Замечание 1.1. Теорема 1.1 остается справедливой также, если σ является неотрицательной функцией класса $C^{1+\alpha}(\Gamma)$.

§2. Разрешимость линейной задачи

В этом параграфе мы докажем разрешимость следующей линейной задачи, порожденной системой (1.9):

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_t\mathbf{w} - \rho_0^{-1}(x)\nabla\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{w}) = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad Q_T, \quad Q_T \equiv \Omega\times(0,T),\\
\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0 \quad \text{на} \quad \Omega,\\
\mu\Pi_0\mathbb{S}(\mathbf{w})\mathbf{n}_0|_\Gamma = \Pi_0\mathbf{a},\\
\mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{w})\mathbf{n}_0 - \sigma\mathbf{n}_0\cdot\Delta_\Gamma\int\limits_0^t \mathbf{w}\,\mathrm{d}\tau|_\Gamma = a + \sigma\int\limits_0^t A\,\mathrm{d}\tau \equiv a'\\
\text{на} \quad G_T = \Gamma\times(0,T).
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbb{T}'(\mathbf{w}) = \mu'(\nabla\cdot\mathbf{w})\mathbb{I} + \mu\cdot\mathbb{S}(\mathbf{w})$, Δ_Γ — оператор Бельтрами–Лапласа на Γ, а ρ_0, $\mathbf{f}$, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{a}$, a, A — заданные функции.

Теорема 2.1. *Пусть для некоторых* $\alpha\in(0,1)$ *и* $T<\infty$ *поверхность* $\Gamma\in C^{2+\alpha}$, *а известные функции в* (2.1) *таковы:* $\rho_0\in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $\rho_0\geqslant r_0>0$, $\mathbf{f}\in\mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$, $\mathbf{w}_0\in\mathbf{C}^{2+\alpha}(\Omega)$, $\mathbf{a}\in\mathbf{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(G_T)$, $a\in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(G_T)$, $A\in C^{\alpha,\alpha/2}(G_T)$. *Кроме того, предположим, что выполнены условия согласования*

$$\mu\Pi_0\mathbb{S}(\mathbf{w}_0)\mathbf{n}_0|_\Gamma = \Pi_0\mathbf{a}|_{t=0}, \quad \mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{w}_0)\mathbf{n}_0 = a|_{t=0}. \tag{2.2}$$

Тогда задача (2.1) *имеет единственное решение* $\mathbf{w}\in\mathbf{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ *и*

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{w}|_{Q_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}\\
&\quad\leqslant c_1(T)\{|\mathbf{f}|_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)} + |\mathbf{w}_0|_\Omega^{(2+\alpha)} + |\mathbf{a}|_{G_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |a|_{G_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + \sigma|A|_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)}\}\\
&\quad\equiv c_1P(T),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $c_1(T)$ *— неубывающая функция* T.

Замечание 2.1. Теорема 2.1 была доказана для случая, когда областью Ω служит полупространство $\mathbb{R}^3_+ = \{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_3>0\}$, а Γ — плоскость $\{x_3=0\}$, при этом ρ_0 считалось константой [2].

Доказательство.

1°. Получим сначала оценку (2.3) как априорную.

Рассмотрим произвольную точку границы $\xi\in\Gamma$. В силу дифференциальных свойств Γ можно выбрать такую локальную систему декартовых координат $\{y\}$ с центром в точке ξ, что Γ локально задается уравнением

$$y_3 = \varphi(y'), \quad y' = (y_1, y_2)\in K_d,$$

где ось y_3 направлена вдоль вектора $-\mathbf{n}_0(\xi)$, а функция $\varphi \in C^{2+\alpha}$ определена в круге $K_d = \{|y'| < d\}$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \nabla'\varphi(0) = 0, \quad |\varphi|_{K_d}^{(2+\alpha)} \leqslant M, \tag{2.4}$$

причем константы d и M не зависят от ξ.

Очевидно, что

$$\sup_{|y'|\leqslant\lambda} |\varphi(y')| \leqslant M\lambda, \quad \sup_{|y|\leqslant\lambda} |\nabla'\varphi(y')| \leqslant M\lambda, \quad \nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right). \tag{2.5}$$

Для простоты будем считать, что $\xi = 0$, а система координат $\{y\}$ совпадает с исходной системой $\{x\}$.

Домножим все соотношения в (2.1) на срезку $\zeta_\lambda(x) = \zeta(x/\lambda)$, где $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

и введем новую неизвестную функцию $\mathbf{u}_\lambda = \mathbf{w}\zeta_\lambda$. Она удовлетворяет системе

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_t\mathbf{u}_\lambda - \rho_0^{-1}(x)\nabla \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{u}_\lambda) = \mathbf{f}\zeta_\lambda + \mathbf{K}_1(\mathbf{w}), \\ \mathbf{u}_\lambda|_{t=0} = \mathbf{w}_0\zeta_\lambda, \quad \mu\Pi_0\mathbb{S}(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{n}_0|_\Gamma = \Pi\mathbf{a}\zeta_1 + \mathbf{K}_2(\mathbf{w}), \\ \mathbf{n}_0 \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{u}_\lambda)\mathbf{n}_0 - \sigma\mathbf{n}_0 \cdot \Delta_0 \int_0^t \mathbf{u}_\lambda \, \mathrm{d}\,\tau|_\Gamma = a'\zeta_\lambda + K_3(\mathbf{w}) + \sigma\int_0^t K_4(\mathbf{w}) \, \mathrm{d}\,\tau. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь операторы

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(\mathbf{w}) &= \rho_0^{-1}(\zeta_\lambda\nabla \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{w}) - \nabla \cdot \mathbb{T}'(\zeta_\lambda\mathbf{w})) \\ &= -\rho_0^{-1}\{(\mu + \mu')[\nabla\zeta_\lambda(\nabla \cdot \mathbf{w}) + \nabla(\nabla\zeta_\lambda \cdot \mathbf{w})] + \mu[\mathbf{w}\nabla^2\zeta_\lambda + 2(\nabla\zeta_\lambda \cdot \nabla)\mathbf{w}]\}, \\ \mathbf{K}_2(\mathbf{w}) &= \mu\Pi_0[\mathbb{S}(\mathbf{w}\zeta_\lambda) - \zeta_\lambda\mathbb{S}(\mathbf{w})]\mathbf{n}_0 \\ &= \mu\Pi_0\left[\mathbf{w}\frac{\partial\zeta_\lambda}{\partial\mathbf{n}_0} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_0)\nabla\zeta_\lambda\right], \\ K_3(\mathbf{w}) &= \mathbf{n}_0 \cdot [\mathbb{T}'(\mathbf{w}\zeta_\lambda) - \zeta_\lambda\mathbb{T}'(\mathbf{w})]\mathbf{n}_0 \\ &= \mu'\mathbf{w} \cdot \nabla\zeta_\lambda + 2\mu(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_0)\frac{\partial\zeta_\lambda}{\partial\mathbf{n}_0}, \\ K_4(\mathbf{w}) &= (\zeta_\lambda \cdot \Delta_0\mathbf{w} - \Delta_0(\zeta_\lambda\mathbf{w})) \cdot \mathbf{n}_0. \end{aligned}$$

Продолжим φ с сохранением класса на $\mathbb{R}^3_+$ и сделаем преобразование координат $x = Y(z)$:

$$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2, \quad x_3 = z_3 + \varphi(z).$$

Это преобразование обратимо, если $|\varphi'_{z_3}| < 1$, и переводит $\mathbb{R}^3_+$ в область $\{x_3 > \varphi(x')\}$.

В новых координатах $z = Y^{-1}(x)$ все функции будем обозначать теми же буквами, но со „шляпкой", например, $\widehat{\mathbf{u}}_\lambda(t, z) = \mathbf{u}_\lambda(t, Y(z))$ и т.д. Градиент в новых координатах равен $\nabla_1 = \mathcal{Z}^T\nabla$, $\mathcal{Z} = \left\{\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right\}^3_{i,k=1} = \{Z_{ik}\}^3_{i,k=1}$,

$$\mathcal{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \varphi'_{z_1} & \varphi'_{z_2} & 1 + \varphi'_{z_3} \end{pmatrix},$$

вектор нормали $\widehat{\mathbf{n}}_0 = \left(\frac{\varphi'_{z_1}}{\sqrt{1+|\nabla'\varphi|^2}}, \frac{\varphi'_{z_2}}{\sqrt{1+|\nabla'\varphi|^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla'\varphi|^2}}\right)$, тензор напряжений

$$\widehat{\mathbb{T}}'(\widehat{\mathbf{w}}) = \mu'\nabla_1 \cdot \widehat{\mathbf{w}} + \mu\widehat{\mathbb{S}}(\widehat{\mathbf{w}}), \quad \widehat{\mathbb{S}}_{ij} = \sum_{m=1}^3 \left(Z_{mi}\frac{\partial \widehat{w}_j}{\partial z_m} + Z_{mj}\frac{\partial \widehat{w}_i}{\partial z_m}\right).$$

Перепишем систему (2.6) в координатах $\{z\}$ в виде

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\widehat{\mathbf{u}}_\lambda - \widehat{\rho}_0^{-1}(0)\nabla\cdot\mathbb{T}'(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda) \\
&\qquad = \widehat{\mathbf{f}}\widehat{\zeta}_\lambda + \widehat{\mathbf{K}}_1(\widehat{\mathbf{w}}) \\
&\qquad + \widehat{\rho}_0^{-1}(z)[\nabla_1\cdot\widehat{\mathbb{T}}'(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda) - \nabla\cdot\mathbb{T}'(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda)] + [\widehat{\rho}_0^{-1}(z) - \widehat{\rho}_0^{-1}(0)]\nabla\cdot\mathbb{T}'(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda) \\
&\qquad \equiv \mathbf{F}(t, z), \\
&\widehat{\mathbf{u}}_\lambda|_{t=0} = \widehat{\mathbf{w}}_0\widehat{\zeta}_\lambda, \\
&-\mu S_{\beta 3}(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda)|_{z_3=0} = (\Pi_0\widehat{\mathbf{a}}\widehat{\zeta}_\lambda)_\beta + \widehat{K}_{2\beta}(\widehat{\mathbf{w}}) - \mu[S_{\beta 3}(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda) + (\Pi_0\widehat{\mathbb{S}}(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda)\widehat{\mathbf{n}}_0)_\beta]|_{z_3=0} \\
&\qquad \equiv b_\beta, \quad \beta = 1, 2, \\
&T'_{33}(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda) + \sigma\Delta'\int_0^t \widehat{u}_{\lambda 3}\,\mathrm{d}\,\tau|_{z_3=0} \\
&\qquad = \widehat{a}\widehat{\zeta}_\lambda + \sigma\int_0^t \widehat{A}\widehat{\zeta}_\lambda\,\mathrm{d}\,\tau + \widehat{K}_3(\widehat{\mathbf{w}}) + \sigma\int_0^t \widehat{K}_4(\widehat{\mathbf{w}})\,\mathrm{d}\,\tau \\
&\qquad\quad + T'_{33}(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda) - \widehat{\mathbf{n}}_0\cdot\widehat{\mathbb{T}}'(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda)\widehat{\mathbf{n}}_0 + \sigma\int_0^t (\Delta'\widehat{u}_{\lambda 3} + \widehat{\mathbf{n}}_0\cdot\Delta_\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_\lambda)\,\mathrm{d}\,\tau|_{z_3=0} \\
&\qquad \equiv b_3 + \sigma\int_0^t B\,\mathrm{d}\,\tau,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\Delta' = \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right),$$

$$b_3 = \widehat{a}\widehat{\zeta}_\lambda + \widehat{K}_3(\widehat{\mathbf{w}}) + (T'_{33}(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda) - \widehat{\mathbf{n}}_0\cdot\mathbb{T}'(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda)\widehat{\mathbf{n}}_0)|_{z_3=0},$$

$$B = \widehat{A}\widehat{\zeta}_\lambda + \widehat{K}_4(\widehat{\mathbf{w}}) + (\Delta' u_{\lambda 3} + \widehat{\mathbf{n}}_0\cdot\Delta_\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_\lambda)|_{z_3=0}.$$

Так как носитель $\mathbf{u}_\lambda$ лежит в $\Omega_\lambda = \overline{\Omega} \cap B_\lambda$, $B_\lambda = \{|x| < \lambda\}$, то $\operatorname{supp} \widehat{\mathbf{u}}_\lambda \subset V_\lambda = Y^{-1}\Omega_\lambda$, $\operatorname{supp} \mathbf{F} \subset V_\lambda$, а $\operatorname{supp} a_\beta$, $\operatorname{supp} h$, $\operatorname{supp} H \subset V'_\lambda = V_\lambda \cap \{z_3 = 0\}$. Значит, мы можем продолжить нулем функции b_j и B на $\mathbb{R}^2 \setminus V_\lambda$, а вектора $\widehat{\mathbf{u}}_\lambda$, $\widehat{\mathbf{F}}$ — на $\mathbb{R}^3_+ \setminus V_\lambda$. Кроме того, продолжим $\widehat{\rho}_0$ на $\mathbb{R}^3_+$ так, чтобы $\widehat{\rho}_0 \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3_+)$ и $\widehat{\rho}_0(z) \geqslant r_0 > 0$. Рассмотрим теперь (2.7) как начально-краевую задачу в $D_T = \mathbb{R}^3_+ \times (0,T)$. Согласно замечанию 2.1, для этой задачи есть оценка (2.3):

$$|\widehat{\mathbf{u}}_\lambda|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{D_T} \leqslant c_2(T)\Big\{|\mathbf{F}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_T} + |\widehat{\mathbf{w}}_0\widehat{\zeta}_\lambda|^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sum_{j=1}^{3} |b_j|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2_T} + \sigma|B|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2_T}\Big\}, \tag{2.8}$$

где $\mathbb{R}^2_T = \mathbb{R}^2 \times (0,T)$.

Оценим нормы функций в правой части (2.8).

Так как

$$\max_{V_\lambda} |\widehat{\rho}_0^{-1}(z) - \widehat{\rho}_0^{-1}(0)| \leqslant c(r_0)\lambda|\widehat{\rho}_0|^{(1)}_{\mathbb{R}^3_+}$$

и

$$\sup_{V_\lambda} |Z_{ij}(z) - \delta^i_j| \leqslant c\lambda,$$

а оператор $\widehat{\mathbf{K}}_1(\mathbf{w})$ не содержит старших производных от $\widehat{\mathbf{w}}$, то $\mathbf{F}$ можно оценить так:

$$|\mathbf{F}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_T} \leqslant (c(r_0)+c)\lambda|\widehat{\rho}_0|^{(1)}_{\mathbb{R}^3_+}|\widehat{\mathbf{u}}_\lambda|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{D_T} + c(\lambda)|\widehat{\mathbf{w}}|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{V_\lambda,T} + |\widehat{\mathbf{f}}\widehat{\zeta}_\lambda|^{(\alpha,\alpha/2)}_{D_T}, \tag{2.9}$$

$V_{\lambda,T} \equiv V_\lambda \times (0,T)$.

Из аналогичных соображений оцениваются и остальные функции в правых частях (2.7). Будем иметь в виду, что

$$S_{\beta 3}(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda) + (\Pi_0\widehat{\mathbb{S}}(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda)\widehat{\mathbf{n}}_0)_\beta = S_{\beta 3} + \sum_{j=1}^{3} \widehat{S}_{\beta j}\widehat{n}_{0j} - \widehat{n}_{0\beta}(\widehat{\mathbf{n}}_0 \cdot \widehat{\mathbb{S}}\widehat{\mathbf{n}}_0),$$

$$T'_{33}(\mathbf{u}_\lambda) - \widehat{\mathbf{n}}_0 \cdot \widehat{\mathbb{T}}'(\widehat{\mathbf{u}}_\lambda)\widehat{\mathbf{n}}_0 = T'_{33} - \widehat{n}^2_{03}\widehat{T}'_{33} - \sum_{i+j<6} \widehat{n}_{0i}\widehat{n}_{0j}\widehat{T}'_{ij},$$

$$\Delta'\widehat{u}_{\lambda 3} + \widehat{\mathbf{n}}_0 \cdot \Delta_\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_\lambda = (\Delta' - \Delta_\Gamma)\widehat{u}_{\lambda 3} + (1 + \widehat{n}_{03})\Delta_\Gamma\widehat{u}_{\lambda 3} + \sum_{\gamma=1}^{2} \widehat{n}_{0\gamma}\Delta_\Gamma\widehat{u}_{\lambda\gamma},$$

а также то, что старшие коэффициенты разности $\Delta_\Gamma - \Delta'$ пропорциональны φ'_{z_γ}, $\gamma = 1, 2$, поскольку в местных координатах $\{z\}$ в K_d оператор Бельтрами—

Лапласа имеет вид

$$\Delta_\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla'\varphi|^2}} \times \left[\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1+\varphi_{z_2}'^2}{\sqrt{1+|\nabla'\varphi|^2}}\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\varphi_{z_1}'\varphi_{z_2}'}{\sqrt{1+|\nabla'\varphi|^2}}\frac{\partial}{\partial z_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{1+\varphi_{z_1}'^2}{\sqrt{1+|\nabla'\varphi|^2}}\frac{\partial}{\partial z_2} - \frac{\varphi_{z_1}'\varphi_{z_2}'}{\sqrt{1+|\nabla'\varphi|^2}}\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\right].$$

Кроме того,

$$|\widehat{n}_{01}(z')| + |\widehat{n}_{02}(z')| + |1+\widehat{n}_{03}(z')| \leqslant c|\nabla'\varphi(z')| \leqslant c'\lambda, \quad z' \in K_\lambda.$$

Учтя вышесказанное, а также то, что $\widehat{K}_{2\beta}$, $\widehat{K}_3$, $\widehat{K}_4$ не содержат вторых производных от $\widehat{\mathbf{w}}$, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}|b_j|_{\mathbb{R}^2_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + \sigma|B|_{\mathbb{R}^2_T}^{(\alpha,\alpha/2)} &\leqslant c\lambda|\widehat{\mathbf{u}}_\lambda|_{\mathcal{D}_T}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} + C(\lambda)|\widehat{\mathbf{w}}|_{V_{\lambda,T}}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} \\ &+ |\widehat{\mathbf{a}}\widehat{\zeta}_\lambda|_{K_{\lambda,T}}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |\widehat{a}\widehat{\zeta}_\lambda|_{K_{\lambda,T}}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + \sigma|\widehat{A}\widehat{\zeta}_\lambda|_{K_{\lambda,T}}^{(\alpha,\alpha/2)},\end{aligned} \tag{2.10}$$

где $K_{\lambda,T} = K_\lambda \times (0,T)$. Выбирая λ достаточно малым, из (2.8)–(2.10) выводим

$$\begin{aligned}|\widehat{\mathbf{w}}|_{V_{\lambda/2,T}}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} &\leqslant |\widehat{\mathbf{u}}_\lambda|_{D_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \\ &\leqslant c\big\{|\widehat{\mathbf{w}}|_{V_{\lambda,T}}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |\widehat{\mathbf{f}}|_{V_{\lambda,T}}^{(\alpha,\alpha/2)} \\ &+ |\widehat{\mathbf{a}}|_{K_{\lambda,T}}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |\widehat{a}|_{K_{\lambda,T}}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + \sigma|\widehat{A}|_{K_{\lambda,T}}^{(\alpha,\alpha/2)} + |\widehat{\mathbf{w}}_0|_{V_\lambda}^{(2+\alpha)}\big\}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Аналогичное неравенство, но только без норм граничных функций, верно и для любой достаточно малой строго внутренней подобласти Ω. Это следует из результатов работы [3] для задачи Коши с параболической по Петровскому системой уравнений. Покрывая Ω конечным покрытием из таких областей и суммируя полученные оценки, мы заключаем, что

$$|\mathbf{w}|_{Q_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leqslant c_3(T)\big\{|\mathbf{w}|_{Q_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + P(T)\big\}, \tag{2.12}$$

где $c_3(T)$ — неубывающая функция T.

Оценим норму

$$|\mathbf{w}|_{Q_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} = |\mathbf{w}|_{Q_T} + |\nabla \mathbf{w}|_{Q_T} + \langle \nabla \mathbf{w} \rangle_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)} + \langle \mathbf{w} \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$$

через $|\mathbf{w}|_{Q_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}$ с малым коэффициентом и через сумму $|\mathbf{w}|_{Q_T} + P(T)$ с произвольным коэффициентом. Для этого применим известное неравенство

$$|\nabla \mathbf{w}|_{Q_T} \leqslant \varepsilon_1^\alpha \langle \nabla \mathbf{w} \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} + c(\varepsilon_1)|\mathbf{w}|_{Q_T}.$$

Имеем

$$\langle \nabla \mathbf{w} \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} \leqslant |\nabla\nabla \mathbf{w}|_{Q_T} \leqslant \varepsilon_2 \langle \mathbf{w} \rangle_{x,Q_T}^{(2+\alpha)} + \varepsilon_3 c(\varepsilon_2) \langle \nabla \mathbf{w} \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} + c(\varepsilon_2,\varepsilon_3)|\mathbf{w}|_{Q_T}.$$

Константу Гёльдера $\langle \nabla \mathbf{w} \rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)}$ оценим с помощью мультипликативного неравенства и неравенства Юнга

$$\begin{aligned}\langle \nabla \mathbf{w} \rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)} &\leqslant \left(\langle \nabla w \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(2|\nabla \mathbf{w}|_{Q_T}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \\ &\leqslant \varepsilon_4^{\frac{1+\alpha}{2}} \langle \nabla \mathbf{w} \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + 2\varepsilon_4^{-(1+\alpha)} |\nabla \mathbf{w}|_{Q_T},\end{aligned}$$

а $\langle \mathbf{w} \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$ оценим через $|\mathcal{D}_t \mathbf{w}|_{Q_T}$ на основании леммы 2.1 из [4]

$$\langle \mathbf{w} \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leqslant |\mathcal{D}_t \mathbf{w}|_{Q_T} \leqslant \varepsilon_5^\alpha \langle \mathcal{D}_t \mathbf{w} \rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)} + c(\varepsilon_5, T)(|\mathbf{w}|_{Q_T} + |\mathcal{D}_t \mathbf{w}(\cdot,0)|_\Omega), \tag{2.13}$$

где $c(\varepsilon_4, T)$ — неубывающая функция T. Ограниченность $\mathcal{D}_t \mathbf{w}|_{t=0}$ следует из уравнения при $t = 0$.

Суммируя вышесказанное, при достаточно малых ε_i, $i = 1,\dots,5$, из (2.12) получаем неравенство

$$|\mathbf{w}|_{Q_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leqslant c_4(T)(P(T) + |\mathbf{w}|_{Q_T}), \tag{2.14}$$

которое верно при любом $t \leqslant T$ с одной и той же константой $c_4(T)$. Поэтому

$$|\mathbf{w}|_{Q_t} \leqslant |\mathbf{w}_0|_\Omega + \int_0^t |\mathcal{D}_\tau \mathbf{w}(\cdot,\tau)|_\Omega \, \mathrm{d}\tau \leqslant c_5(t)\Big\{P(t) + \int_0^t |\mathbf{w}|_{Q_\tau} \, \mathrm{d}\tau\Big\},$$

откуда по лемме Гронуолла следует, что

$$|\mathbf{w}|_{Q_t} \leqslant c_6(t)P(t).$$

Это неравенство вместе с (2.14) завершает доказательство оценки (2.3).

2°. Докажем разрешимость задачи (2.1) сначала в случае, когда $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{w} = 0$ и заданные функции в краевых условиях обращаются в нуль при $t = 0$. Воспользуемся методом построения регуляризатора [5].

Записав систему (2.1) в операторном виде

$$\mathcal{A}\mathbf{w} = \mathbf{D},$$

мы построим линейный непрерывный оператор

$$\mathcal{R} : \overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(G_T) \times \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(G_T) \times \overset{\circ}{C}{}^{\alpha,\alpha/2}(G_T) \to \overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T),$$

обращающий операторное уравнение

$$\mathcal{A}\mathbf{w} = (\mathcal{I} + \mathcal{M})\mathbf{D},$$

т.е. $\mathbf{w} = \mathcal{R}\mathbf{D}$. Здесь $\mathbf{D} = (\mathbf{a}, a, A)$, $\mathcal{I}$ — единичный оператор, $\mathcal{M}$ — некоторый линейный оператор такой, что

$$\|\mathcal{M}\mathbf{D}\| \leqslant \varepsilon\|\mathbf{D}\| + c(\varepsilon)\int\limits_0^t \|\mathbf{D}\|\,\mathrm{d}\tau, \quad \varepsilon < 1. \tag{2.15}$$

Из последнего неравенства следует обратимость оператора $\mathcal{I}+\mathcal{M}$ на всем интервале времени $[0,T]$, что можно доказать методом последовательных приближений. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\mathbf{D} + \mathcal{M}\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$$

и положим $\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{D}_0$, $\mathbf{D}^{(m+1)} = \mathbf{D}_0 - \mathcal{M}\mathbf{D}^{(m)}$, $m \geqslant 0$. Тогда имеем

$$\|\mathbf{D}^{(m+1)} - \mathbf{D}^{(m)}\| \leqslant \varepsilon\|\mathbf{D}^{(m)} - \mathbf{D}^{(m-1)}\| + c(\varepsilon)\int\limits_0^t \|\mathbf{D}^{(m)} - \mathbf{D}^{(m-1)}\|\,\mathrm{d}\tau.$$

После суммирования этих неравенств по m от 1 до ∞ с помощью леммы Гронуолла устанавливаем, что $\sum_{m=1}^{\infty}\|\mathbf{D}^{(m+1)} - \mathbf{D}^{(m)}\| < \infty$, а это означает сходимость последовательных приближений $\mathbf{D}^{(m)}$.

Однозначность правого обратного оператора $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{R}(\mathcal{I}+\mathcal{M})^{-1}$ следует из априорной оценки (2.3), поэтому он является обратным к оператору $\mathcal{A}$.

а) **Построение регуляризатора $\mathcal{R}$.** Пусть $\{\zeta_j\}_{j\leqslant N_\lambda}$ — семейство бесконечно гладких срезок, составляющее разбиение единицы, которое соответствует покрытию поверхности Γ шарами $K_{j,\lambda} = \{|x-\xi_j| < \lambda\}$ достаточно малого радиуса λ с центрами в точках $\xi_j \in \Gamma$. Рассмотрим также еще одно семейство гладких срезающих функций η_j с носителями в $K_{j,2\lambda}$ таких, что $\eta_j\zeta_j = \zeta j$. Предположим, что

$$|\mathcal{D}_x^{\mathbf{k}}\zeta_j(x)| + |\mathcal{D}_x^{\mathbf{k}}\eta_j(x)| \leqslant c(|\mathbf{k}|)\lambda^{-|\mathbf{k}|}, \quad |\mathbf{k}| \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Мы будем считать, что радиус разбиения $\lambda < d/2$ выбран таким, что в d-окрестности каждой точки ξ_j поверхность Γ задается в локальных декартовых координатах $\{y\}$ уравнением

$$y_3 = \varphi_j(y'), \quad y' = (y_1, y_2),$$

при этом ось y_3 противонаправлена к вектору внешней нормали $\mathbf{n}_j = \mathbf{n}_0(\xi_j)$ к Γ в точке ξ_j. Кроме того, функции $\varphi_j \in C^{2+\alpha}(K_{j,d})$, $j \leqslant N_\lambda$, обладают свойствами (2.4), (2.5) функции φ из 1°.

Обозначим через $Z_j(x)$ преобразование локального распрямления границы вблизи ξ_j такое, что якобиева матрица $J_j(x)$ этого преобразования имеет определитель $\det J_j = 1$ и в точке ξ_j равна единичной. Далее, пусть $\mathbb{R}_j^2$ — плоскость $\{(Z_j)_3 = 0\}$, а $D_j = \{\mathbb{R}^3 \mid (Z_j)_3 > 0\}$. При этом преобразовании окрестность Γ_j точки ξ_j на Γ переходит в часть плоскости $\mathbb{R}_j^2$.

Положим

$$\mathbf{v}'(x,t) = \sum_{j=1}^{N_\lambda} \mathbf{v}_j(x,t)\eta_j(x),$$

где $\mathbf{v}_j(x,t) = \mathbf{w}_j(Z_j(x),t)$, а $\mathbf{w}_j$ — решения задач с плоскими границами $\mathbb{R}_j^2$, $j = 1,\ldots,N_\lambda$,

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_t\mathbf{w}_j - \rho_0^{-1}(\xi_j)\nabla\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{w}_j) = 0 \quad \text{в} \quad D_j\times(0,T) \equiv D_{j,T},\\
\mathbf{w}_j|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{w}_j \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0,\\
\Pi_j\mathbb{T}'(\mathbf{w}_j)\mathbf{n}_j|_{\mathbb{R}_j^2} = \mathbf{a}_j,\\
\mathbf{n}_j\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{w}_j)\mathbf{n}_j - \sigma\mathbf{n}_j\cdot\Delta_j\int_0^t \mathbf{w}_j\,\mathrm{d}\tau = a_j + \sigma\int_0^t A_j\,\mathrm{d}\tau.
\end{gathered} \tag{2.17}$$

Здесь $\Pi_j\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{n}_j\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{n}_j$ — проектор на плоскость $\mathbb{R}_j^2$, Δ_j — лапласиан на $\mathbb{R}_j^2$, $\mathbf{a}_j(z,t) = \Pi_j\Pi_0\mathbf{a}(x,t)\zeta_j(x)|_{x=Z_j^{-1}(z)}$, $a_j(z,t) = a(x,t)\zeta_j(x)|_{x=Z^{-1}(z)}$, A_j определяются аналогично.

Сами вектор-функции $\mathbf{v}_j$ в координатах $x = Z_j^{-1}(z)$ будут удовлетворять системе

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_t \mathbf{v}_j - \rho_0^{-1}(\xi_j)\nabla_j \cdot \mathbb{T}^{(j)}(\mathbf{v}_j) = 0, \\
\mathbf{v}_j|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{v}_j \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0, \\
\Pi_j \mathbb{T}^{(j)}(\mathbf{v}_j)\mathbf{n}_j|_{\Gamma_j} = \Pi_j \Pi_0 \mathbf{a}\zeta_j, \\
\mathbf{n}_j \cdot \mathbb{T}^{(j)}(\mathbf{v}_j)\mathbf{n}_j|_{\Gamma_j} - \sigma \mathbf{n}_j \cdot \tilde{\Delta}_j \int_0^t \mathbf{v}_j \, d\tau = a\zeta_j + \sigma \int_0^t A\zeta_j \, d\tau,
\end{gathered} \tag{2.18}$$

где $\nabla_j = (J_j^{-1})^T \nabla$, J_j^{-1} — якобиева матрица преобразования Z_j^{-1} с элементами J_j^{mk}; $\mathbb{T}^{(j)}(\mathbf{v})$ — тензор с компонентами $T_{ik}^{(j)} = \mu' \delta_i^k \nabla_j \cdot \mathbf{v} + \mu \sum_{m=1}^3 (J_j^{mk} \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + J_j^{mi} \frac{\partial v_k}{\partial x_m})$; $\Gamma_j = Z_j^{-1}(\mathbb{R}_j^2)$, $\tilde{\Delta}_j = Z_j^{-1}(\Delta_j)$.

Определим далее $\mathbf{v}''$ как решение начально-краевой задачи

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_t \mathbf{v}'' - \rho_0^{-1}(x)[(\mu + \mu')\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}'') - \mu \nabla^2 \mathbf{v}''] = \mathbf{g} \quad \text{в } Q_T, \\
\mathbf{v}''|_{t=0} = 0, \ \mathbf{v}''|_{\Gamma} = 0
\end{gathered} \tag{2.19}$$

с

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= \sum_{j=1}^{N_\lambda} \{\rho_0^{-1}(x)\nabla \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{v}_j \eta_j) - \rho_0^{-1}(\xi_j)\eta_j \nabla_j \cdot \mathbb{T}^{(j)}(\mathbf{v}_j)\} \\
&= \sum_{j=1}^{N_\lambda} [\rho_0^{-1}(x) - \rho_0^{-1}(\xi_j)]\nabla \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{v}_j \eta_j) + \sum_{j=1}^{N_\lambda} \rho_0^{-1}(\xi_j)[\nabla \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{v}_j \eta_j) - \eta_j \nabla \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{v}_j)] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_\lambda} \rho_0^{-1}(\xi_j)[\nabla \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{v}_j) - \nabla_j \cdot \mathbb{T}^{(j)}(\mathbf{v}_j)]\eta_j.
\end{aligned}$$

Положим по определению

$$\mathcal{R}\mathbf{D} = \mathbf{w} \equiv \mathbf{v}' + \mathbf{v}''.$$

Ясно, что $\mathcal{R}$ — линейный оператор. Его непрерывность следует из теоремы 2.1 [2] и из теоремы 4.9 [3], где доказана однозначная разрешимость задач (2.18) и (2.19) соответственно.

Вычислим теперь оператор $\mathcal{M}$. Для этого просуммируем по $j = 1, \ldots, N_\lambda$ системы (2.18), домножив их на η_j и объединив в них два краевых условия в одно векторное. Нетрудно видеть, что $\mathbf{w}$ является решением однородной задачи (2.1) с граничными условиями

$$\begin{aligned}&\Pi_0\mathbb{T}'(\mathbf{w})\mathbf{n}_0|_\Gamma = \mu\Pi_0\mathbb{S}(\mathbf{w})\mathbf{n}_0|_\Gamma = \Pi_0\mathbf{a} + \Pi_0\mathbf{a}_1 + \mathbf{b} + \Pi_0\mathbf{d},\\ &\mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{w})\mathbf{n}_0|_\Gamma - \sigma\mathbf{n}_0\cdot\Delta_\Gamma\int_0^t \mathbf{w}\,\mathrm{d}\tau\\ &= a + \sigma\int_0^t A\,\mathrm{d}\tau + \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{a}_1 + \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d} + b + \sigma\int_0^t (B + B_1 + B_2)\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Здесь

$$\mathbf{a}_1 = \sum_{j=1}^{N_\lambda}(\Pi_j\Pi_0\mathbf{a} - \Pi_0\mathbf{a})\eta_j, \quad \mathbf{b} = \Pi_0\mathbb{T}'(\mathbf{v}'')\mathbf{n}_0|_\Gamma,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d} = \sum_{j=1}^{N_\lambda}\{&[\mathbb{T}'(\mathbf{v}_j\eta_j) - \eta_j\mathbb{T}'(\mathbf{v}_j)]\mathbf{n}_0\\ &+ \eta_j[\mathbb{T}'(\mathbf{v}_j)\mathbf{n}_0 - \mathbb{T}^{(j)}(\mathbf{v}_j)\mathbf{n}_j] + \eta_j(\mathbf{n}_j - \mathbf{n}_0)\mathbf{n}_j\cdot\mathbb{T}^{(j)}(\mathbf{v}_j)\mathbf{n}_j\}|_\Gamma,\end{aligned}$$

$$b = \mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{v}'')\mathbf{n}_0|_\Gamma, \quad B = -\mathbf{n}_0\cdot\Delta_\Gamma\mathbf{v}'',$$

$$B_1 = \mathbf{n}_0\cdot\sum_{j=1}^{N_\lambda}(\Delta_\Gamma(\mathbf{v}_j\eta_j) - \eta_j\Delta_\Gamma\mathbf{v}_j), \quad B_2 = \sum_j \eta_j(\mathbf{n}_0\cdot\Delta_\Gamma\mathbf{v}_j - \mathbf{n}_j\cdot\widetilde{\Delta}_j\mathbf{v}_j).$$

Оператор $\mathcal{M}$ зададим соотношением

$$\mathcal{M}\mathbf{D} = (\Pi_0\mathbf{a}_1 + b + \Pi_0\mathbf{d},\ \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{a}_1 + b + \mathbf{n}_0\cdot\mathbf{d},\ B + B_1 + B_2).$$

б) Оценка нормы $\|\mathcal{M}\mathbf{D}\|$.

Напомним, что наша задача — доказать для $\mathcal{M}$ оценку (2.15).

Нетрудно показать на основании рассуждений, подобных приведенным в 1°, и неравенства (2.16), что

$$\begin{aligned}&|\mathbf{b}+\mathbf{d}|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |b|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |B + B_1 + B_2|_{G_t}^{(\alpha,\alpha/2)}\\ &\leqslant c_1\Big\{(\varepsilon_1 + \lambda^\alpha c_2)\max_{j\leqslant N_\lambda}|\mathbf{v}_j|_{G_t}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}\\ &\quad + c_3(\lambda,\varepsilon_1)\max_{j\leqslant N_\lambda}\int_0^t|\mathbf{v}_j|_{G_\tau}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}\,\mathrm{d}\tau + |\mathbf{v}''|_{Q_t}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}\Big\}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Нормы вектор-функций $\mathbf{v}_j$ оцениваются через нормы решений задач (2.17), для которых по теореме 2.1 из [2] получаем

$$\begin{aligned}|\mathbf{w}_j|_{D_{j,t}}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} &\leqslant c(T)\{|\mathbf{a}_j|_{\mathbb{R}^2_{j,t}}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |a_j|_{\mathbb{R}^2_{j,t}}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + \sigma|A_j|_{\mathbb{R}^2_{j,t}}^{(\alpha,\alpha/2)}\}\\ &\leqslant c_4(T)\{|\mathbf{a}|_{G_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |a|_{G_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + \sigma|A|_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)}\}\\ &\leqslant c_4(T)P(t),\end{aligned}$$

где $\mathbb{R}^2_{j,t} = \mathbb{R}^2_j \times (0,t)$. Отсюда выводим

$$\max_{j\leqslant N_\lambda} |\mathbf{v}_j|_{D_t}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leqslant c_5(T)P(t). \tag{2.22}$$

Что касается вектора $\mathbf{v}''$, то этот вектор является решением первой начально-краевой задачи с параболической по Петровскому системой, для которой выполнены условия согласования, поэтому на основании теоремы 4.9 из [3] заключаем, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}''|_{Q_t}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} &\leqslant c(T)|\mathbf{g}|_{Q_t}^{(\alpha,\alpha/2)} \\ &\leqslant c(T,r_0)\{\lambda^\alpha \max_{j\leqslant N_\lambda}|\mathbf{v}_j|_{Q_t}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} + c(\lambda)\max_{j\leqslant N_\lambda}|\mathbf{v}_j|_{Q_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}\} \\ &\leqslant c(T,r_0)\Big\{\varepsilon_2+\lambda^\alpha)\max_{j\leqslant N_\lambda}|\mathbf{v}_j|_{Q_t}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} + c(\varepsilon_2,\lambda)\max_{j\leqslant N_\lambda}\int_0^t |\mathbf{v}_j|_{Q_\tau}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}\,\mathrm{d}\tau\Big\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Оценим норму $|\mathbf{a}_1|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}$. Поскольку $\Pi_j\Pi_0\mathbf{a} - \Pi_0\mathbf{a} = \mathbf{n}_j(\Pi_0\mathbf{a}\cdot(\mathbf{n}_0-\mathbf{n}_j))$, то очевидно, что

$$\Big|\sum_j \eta_j(\Pi_j\Pi_0\mathbf{a}-\Pi_0\mathbf{a})\Big|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} \leqslant c\lambda|\mathbf{a}|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + c(\lambda)\int_0^t |\mathbf{a}|_{G_\tau}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.24}$$

Таким образом, при достаточно малых λ, ε_1 и ε_2 неравенства (2.21)–(2.24) влекут за собой

$$\|\mathcal{M}\mathbf{D}\| \leqslant \varepsilon P(t) + c(\varepsilon)\int_0^t P(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{с } \varepsilon<1,$$

т.е. (2.15).

3°. Общий случай сводится к рассмотренному путем представления решения задачи (2.1) в виде суммы $\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}''$, где $\mathbf{w}'$ — решение задачи Коши

$$\mathcal{D}_t\mathbf{w}' - \rho_0^{-1}(x)\nabla\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{w}') = \mathbf{f}' \text{ в } \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{w}'|_{t=0} = \mathbf{w}'_0, \tag{2.25}$$

а $\mathbf{w}''$ — решение однородной задачи (2.1) с

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{a} - \mathbb{T}'(\mathbf{w}')\mathbf{n}_0, \\ b &= a - \mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{w}')\mathbf{n}_0 - \sigma D, \\ B &= A - \mathbf{n}_0\cdot\Delta_\Gamma\mathbf{w}' + \mathcal{D}_t D, \end{aligned} \tag{2.26}$$

D — некоторая гладкая функция.

Векторы $\mathbf{f}'$, $\mathbf{w}_0'$ в (2.25) — это продолжения $\mathbf{f}$ и $\mathbf{w}_0$ соответственно на все $\mathbb{R}^3$ с сохранением гладкости. В силу теоремы 4.10 из [3] задача (2.25) однозначно разрешима в $\mathbf{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}^3_T)$, $\mathbb{R}^3_T = \mathbb{R}^3 \times (0,T)$, и

$$|\mathbf{w}'|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_T} \leqslant c(|\mathbf{f}'|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_T} + |\mathbf{w}_0'|^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3}) \leqslant c(|\mathbf{f}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{Q_T} + |\mathbf{w}_0|^{(2+\alpha)}_{\Omega}).$$

Функцию D в (2.26) мы подберем с тем расчетом, чтобы краевые функции удовлетворяли нулевым начальным условиям. Это очевидно для вектора $\mathbf{b}$ в силу условий согласования (2.2), но функция $B = A - \mathbf{n}_0 \cdot \Delta_\Gamma \mathbf{w}'$, в общем случае, не обращается в нуль при $t = 0$. Поэтому добавим к ней $\mathcal{D}_t D$, где $D \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(G_T)$, $D|_{t=0} = 0$, $\mathcal{D}_t D|_{t=0} = \mathbf{n}_0 \cdot \Delta_\Gamma \mathbf{w}_0 - A|_{t=0}$ и

$$|D|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{G_t} \leqslant c(|A|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G_T} + |\mathbf{w}_0|^{(2+\alpha)}_{\Omega}),$$

при этом от b придется отнять σD.

Единственность решения следует из оценки (2.3) для разности двух гладких решений системы (2.1). •

§3. Однозначная разрешимость задачи (1.9)

Предваряя доказательство теоремы 1.1, сделаем некоторые преобразования в системе (1.9) и приведем вспомогательные оценки.

Преобразуем последнее граничное условие в (1.9), используя тождества

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_0 \cdot \Delta(t)\mathbf{X}_\mathbf{n}|_\Gamma &= \mathbf{n}_0 \cdot \Delta(t)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{n}_0 \cdot \Delta(t) \int_0^t \mathbf{u}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= H_0(\xi) + \mathbf{n}_0 \cdot \int_0^t \dot{\Delta}(\tau)\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}\tau + \mathbf{n}_0 \cdot \Delta(0) \int_0^t \mathbf{u}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&+ \mathbf{n}_0 \cdot \int_0^t \Big\{\dot{\Delta}(\tau) \int_0^\tau \mathbf{u}(\xi,\tau')d\tau' + (\Delta(\tau) - \Delta(0))\mathbf{u}(\xi,\tau)\Big\}\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

где $H_0(\xi) = \mathbf{n}_0(\xi) \cdot \Delta(0)\boldsymbol{\xi}$ — удвоенная средняя кривизна Γ, а $\dot{\Delta}(t) = \mathcal{D}_t\Delta(t)$.

Тогда мы можем записать задачу (1.9) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_t \mathbf{u} - \rho_0^{-1}(\xi)\nabla \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_\mathbf{u}, t) - \rho_0^{-1}(\xi)\mathbb{A}\nabla p(\rho_0 J_\mathbf{u}^{-1}) + \mathbf{F}_1(\mathbf{u}) \quad \text{на } \Omega,\ t>0, \\
\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \mu\Pi_0\mathbb{S}(\mathbf{u})\mathbf{n}_0|_\Gamma = \mathbf{F}_2(\mathbf{u}), \\
\begin{aligned}
&\mathbf{n}_0 \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{u})\mathbf{n}_0 - \sigma \mathbf{n}_0 \cdot \Delta(0)\int_0^t \mathbf{u}\,\mathrm{d}\tau|_\Gamma \\
&\quad = \sigma H_0(\xi) + (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})\{p(\rho_0 J_\mathbf{u}^{-1}) - p_e(X_\mathbf{u}, t)\}|_\Gamma \\
&\quad + F_3(\mathbf{u}) + \sigma F_4(\mathbf{u}) + \sigma \int_0^t F_5(\mathbf{u})\,\mathrm{d}\tau \quad \text{на } \Gamma,\ t>0.
\end{aligned}
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Здесь мы использовали обозначения

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F}_1(\mathbf{u}) = \rho_0^{-1}(\xi)(\nabla_\mathbf{u} \cdot \mathbb{T}'_\mathbf{u}(\mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{u})), \\
&\mathbf{F}_2(\mathbf{u}) = \mu\Pi_0[\Pi_0\mathbb{S}(\mathbf{u})\mathbf{n}_0 - \Pi\mathbb{S}_\mathbf{u}(\mathbf{u})\mathbf{n}]|_\Gamma, \\
&F_3(\mathbf{u}) = \mu\mathbf{n}_0 \cdot [\mathbb{T}'(\mathbf{u})\mathbf{n}_0 - \mathbb{T}'_\mathbf{u}(\mathbf{u})\mathbf{n}]|_\Gamma, \\
&F_4(\mathbf{u}) = \mathbf{n}_0 \cdot \int_0^t \dot{\Delta}(\tau)\xi|_\Gamma\,\mathrm{d}\tau, \\
&F_5(\mathbf{u}) = \mathbf{n}_0 \cdot \Big[\dot{\Delta}(t)\int_0^t \mathbf{u}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\tau + (\Delta(t) - \Delta(0))\mathbf{u}(\xi,t)\Big]|_\Gamma.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Обозначим через $N_t(f)$ норму $|f|_{Q_t}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}$. Для оценки функций (3.2) нам понадобятся следующие довольно очевидные утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть векторы* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{u}'$ *удовлетворяют неравенствам*

$$
N_t(\mathbf{u}) \leqslant \delta, \quad N_t(\mathbf{u}') \leqslant \delta. \tag{3.3}
$$

Тогда для соответствующих матриц кофакторов $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{A}'$ *матриц Якоби преобразований* (1.5) *верны оценки*

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{A} - \mathbb{A}'|_{x,Q_t}^{(1+\alpha)} &\leqslant c(1+\delta)\int_0^t |\mathbf{u} - \mathbf{u}'|_\Omega^{(2+\alpha)}\,\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant ctN_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}'), \\
\langle \mathbb{A} - \mathbb{A}'\rangle_{t,Q_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})} &\leqslant c(1+\delta)t^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}')|_{Q_t}, \\
\langle \mathbb{A} - \mathbb{A}'\rangle_{t,Q_t}^{(\alpha/2)} + \langle \nabla(\mathbb{A} - \mathbb{A}')\rangle_{t,Q_t}^{(\alpha/2)} &\leqslant ct^{1-\alpha/2}N_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}').
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

В частности,

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{A}-\mathbb{I}|^{(1+\alpha)}_{x,Q_T} &\leqslant ctN_t(\mathbf{u}),\\
\langle\mathbb{A}\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,Q_t} &\leqslant ct^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\mathbf{u}|_{Q_t},\\
\langle\mathbb{A}\rangle^{(\alpha/2)}_{t,Q_t}+\langle\nabla\mathbb{A}\rangle^{(\alpha/2)}_{t,Q_t} &\leqslant ct^{1-\alpha/2}N_t(\mathbf{u}).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Лемма 3.2. *Если* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{u}'$ *подчиняются неравенствам* (3.3) *и число* δ *столь мало, что*

$$|\mathbb{A}\mathbf{n}_0|,\quad |\mathbb{A}'\mathbf{n}_0|\geqslant c>0,$$

то для разности векторов $\mathbf{n}-\mathbf{n}'=\mathbb{A}\mathbf{n}_0/|\mathbb{A}\mathbf{n}_0|-\mathbb{A}'\mathbf{n}_0/|\mathbb{A}\mathbf{n}_0|$ *верны оценки*

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{n}-\mathbf{n}'|^{(1+\alpha)}_{x,G_t} &\leqslant c\int\limits_0^t |\mathbf{u}-\mathbf{u}'|^{(2+\alpha)}_{\Omega}\,\mathrm{d}\,\tau\\
&\leqslant ctN_t(\mathbf{u}-\mathbf{u}'),\\
\langle\mathbf{n}-\mathbf{n}'\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,G_t} &\leqslant ct^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}')|_{Q_t}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Следствие 3.1. *Если* $\mathbf{u}$ *удовлетворяет условиям леммы* 3.2, *то*

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{n}-\mathbf{n}_0|^{(1+\alpha)}_{G_t} &\leqslant c\int\limits_0^t |\mathbf{u}|^{(2+\alpha)}_{\Omega}\,\mathrm{d}\,\tau,\\
\langle\mathbf{n}-\mathbf{n}_0\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,G_t} &\leqslant ct^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\mathbf{u}|_{Q_t}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Аналогичные оценки будут верны и для коэффициентов операторов $\Delta(t)$ и $\dot{\Delta}(t)$. Приведем формулировки соответствующих утверждений, следуя работе [4].

Покроем Γ шарами достаточно малого радиуса d и с центрами в точках $\xi_k\in\Gamma$, $k=1,\ldots,M$, так, чтобы $\Gamma_k=\{\xi\in\Gamma,\ |\xi-\xi_k|<d\}$ в локальных декартовых координатах $\{\eta_i\}=\{\eta_i^{(k)}\}$, $i=1,2,3$, можно было задать в виде функции

$$\eta_3^{(k)}=\Phi^{(k)}(\eta_1^{(k)},\eta_2^{(k)}),\quad |\eta_1^{(k)}|^2+|\eta_2^{(k)}|^2\leqslant d^2,$$

где $\eta_1^{(k)}$, $\eta_2^{(k)}$ лежат в касательной плоскости к Γ в точке ξ_k, а третий орт, соответствующий $\eta_3^{(k)}$, направлен вдоль $\mathbf{n}_0(\xi_k)$.

Опуская индекс k, приведем выражение для оператора Бельтрами—Лапласа на $\Gamma_k(t)$ в координатах $\{\eta\}$:

$$\Delta(t)f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\beta,\gamma=1}^{2} \frac{\partial}{\partial\eta_\beta}\left(g^{\beta\gamma}\sqrt{g}\frac{\partial f}{\partial\eta_\gamma}\right) = \sum_{\beta,\gamma=1}^{2} g^{\beta\gamma}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta_\beta\partial\eta_\gamma} + \sum_{\gamma=1}^{2} h_\gamma \frac{\partial f}{\partial\eta_\gamma},$$

где $g = \det\{g_{\beta\gamma}\}_{\beta,\gamma=1}^{2}$, $g_{\beta\gamma} = \frac{\partial \mathbf{X_u}}{\partial\eta_\beta}\cdot\frac{\partial \mathbf{X_u}}{\partial\eta_\gamma}$, $g^{\beta\gamma}$ — это элементы обратной матрицы $\{g_{\beta\gamma}\}^{-1}$,

$$h_\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\eta_\beta}(g^{\beta\gamma}\sqrt{g}),$$

$$\mathbf{X_u}(\xi,t) = \left(\eta_1 + \int_0^t \omega_1(\eta,\tau)\,\mathrm{d}\tau, \eta_2 + \int_0^t \omega_2(\eta,\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ \Phi + \int_0^t \omega_3(\eta_1\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$
$$\equiv \boldsymbol{\xi} + \int_0^t \boldsymbol{\omega}(\eta,\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Здесь $\boldsymbol{\xi} = (\eta_1,\eta_2,\Phi(\eta_1,\eta_2))$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}(\eta_1,\eta_2,\Phi,t)$. Значит, для элементов метрического тензора и их производных по t на $\Gamma_k(t)$ мы имеем выражения

$$g_{\beta\gamma} = g_{\beta\gamma}^{(0)} + \frac{\partial\xi}{\partial\eta_\gamma}\cdot\int_0^t \frac{\partial\omega}{\partial\eta_\beta}\,\mathrm{d}\tau + \frac{\partial\xi}{\partial\eta_\beta}\cdot\int_0^t \frac{\partial\omega}{\partial\eta_\gamma}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \frac{\partial\omega}{\partial\eta_\beta}\,\mathrm{d}\tau\cdot\int_0^t \frac{\partial\omega}{\partial\eta_\gamma}\,\mathrm{d}\tau, \quad (3.8)$$

где $g_{\beta\gamma}^{(0)} = \frac{\partial\xi}{\partial\eta_\beta}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial\eta_\gamma}$, и

$$\dot{g}_{\beta\gamma} = \frac{\partial\xi}{\partial\eta_\gamma}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\eta_\beta} + \frac{\partial\xi}{\partial\eta_\beta}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\eta_\gamma} + \frac{\partial\omega}{\partial\eta_\beta}\cdot\int_0^t \frac{\partial\omega}{\partial\eta_\gamma}\,\mathrm{d}\tau + \frac{\partial\omega}{\partial\eta_\gamma}\cdot\int_0^t \frac{\partial\omega}{\partial\eta_\beta}\,\mathrm{d}\tau.$$

На основании последних формул нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

Лемма 3.3. *Пусть векторы* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{u}'$ *удовлетворяют неравенствам* (3.3) *с настолько малым* δ, *что определители* $g = \det(g_{\beta\gamma})$, $g' = \det(g_{\beta\gamma})$ *соответствующих им метрических тензоров* $\{g_{\beta\gamma}\}$, $\{g'_{\beta\gamma}\}$, *вычисленные по формуле* (3.8), *строго положительны:*

$$g \geqslant c > 0, \quad g' \geqslant c > 0.$$

Тогда для коэффициентов соответствующих операторов $\Delta(t)$ и $\Delta'(t)$ имеют место оценки

$$
\begin{aligned}
&|g^{\beta\gamma} - g'^{\beta\gamma}|^{(1+\alpha)}_{x,G^k_t} + |h_\gamma - h'_\gamma|^{(\alpha)}_{x,G^k_t} \\
&\qquad \leqslant c\int_0^t |\mathbf{u}-\mathbf{u}'|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_k}\,\mathrm{d}\,\tau, \\
&\langle g^{\beta\gamma} - g'^{\beta\gamma}\rangle^{(\alpha/2)}_{t,G^k_t} + \langle h_\gamma - h'_\gamma\rangle^{(\alpha/2)}_{t,G^k_t} \\
&\qquad \leqslant ct^{1-\alpha/2}(1+\delta)|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}')|_{G^k_t}, \\
&|\dot g^{\beta\gamma} - \dot g'^{\beta\gamma}|_{G^k_t} \leqslant c|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}')|_{G^k_t}, \\
&|\dot g^{\beta\gamma} - \dot g'^{\beta\gamma}|^{(1+\alpha)}_{x,G^k_t} + |\dot h_\gamma - \dot h'_\gamma|^{(\alpha)}_{x,G^k_t} \\
&\qquad \leqslant c|\mathbf{u}-\mathbf{u}'|^{(2+\alpha)}_{x,G^k_t}, \\
&\langle \dot g^{\beta\gamma} - \dot g'^{\beta\gamma}\rangle^{(\alpha/2)}_{t,G^k_t} + \langle \dot h_\gamma - \dot h'_\gamma\rangle^{(\alpha/2)}_{t,G^k_t} \\
&\qquad \leqslant c\{\langle\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}')\rangle^{(\alpha/2)}_{t,G^k_t} + t^{1-\alpha/2}|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}')|_{G^k_t}\},
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

где $G^k_t = \Gamma_k \times (0,t)$.

Следствие 3.2. *Если для* $\mathbf{u}$ *выполнены условия леммы* 3.3, *то*

$$
\begin{aligned}
&|g^{\beta\gamma} - g^{(0)\beta\gamma}|^{(1+\alpha)}_{x,G^k_t} + |h_\gamma - h^{(0)}_\gamma|^{(\alpha)}_{x,G^k_t} \leqslant c\int_0^t |\mathbf{u}|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_k}\,\mathrm{d}\,\tau, \\
&\langle g^{\beta\gamma}\rangle^{(\alpha/2)}_{t,G^k_t} + \langle h_\gamma\rangle^{(\alpha/2)}_{t,G^k_t} \leqslant ct^{1-\alpha/2}|\nabla\mathbf{u}|_{G^k_t}, \\
&|\dot g^{\beta\gamma}|^{(1+\alpha)}_{x,G^k_t} + |\dot h_\gamma|^{(\alpha)}_{x,G^k_t} \leqslant c|\mathbf{u}|^{(2+\alpha)}_{x,G^k_t}, \\
&\langle \dot g^{\beta\gamma}\rangle^{(\alpha/2)}_{t,G^k_t} + \langle \dot h_\gamma\rangle^{(\alpha/2)}_{t,G^k_t} \leqslant c\{\langle\nabla\mathbf{u}\rangle^{(\alpha/2)}_{t,G^k_t} + t^{1-\alpha/2}|\nabla u|_{G^k_t}\}.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Теперь на базе приведенных утверждений мы можем оценить функции, стоящие в правой части системы (3.1).

Лемма 3.4. *Допустим, что*

$$N_t(\mathbf{u}) \leqslant \delta, \quad N_t(\mathbf{u}') \leqslant \delta$$

и

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}'|_{t=0} = \mathbf{v}_0.$$

Тогда

$$|\mathbf{F}_1(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_1(\mathbf{u}')|_{Q_t}^{(\alpha,\alpha/2)} + |\mathbf{F}_2(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_2(\mathbf{u}')|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |F_3(\mathbf{u}) - F_3(\mathbf{u}')|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}$$
$$+ |F_4(\mathbf{u}) - F_4(\mathbf{u}')|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |F_5(\mathbf{u}) - F_5(\mathbf{u}')|_{G_t}^{(\alpha,\alpha/2)}$$
$$\leqslant c(t + t^{1-\alpha/2})N_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}'). \tag{3.11}$$

Доказательство. Начнем с оценок якобиана $J_\mathbf{u}$, который вычислим по формуле (1.7)

$$J_\mathbf{u} = 1 + \int_0^t \mathbb{A}\nabla \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}\tau.$$

Так как $|\int_0^t \mathbb{A}\nabla \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}\tau| \leqslant t|\mathbb{A}|_{Q_t}|\nabla\mathbf{u}|_{Q_t} \leqslant c_1\delta t$, то

$$1 - c_1\delta t \leqslant |J_\mathbf{u}| \leqslant 1 + c_1\delta t.$$

Принимая во внимание лемму 3.1, легко видеть, что для $J_\mathbf{u}$ верны неравенства

$$\begin{aligned}
|J_\mathbf{u}|_{x,Q_t}^{(1+\alpha)} &\leqslant |\mathbb{A}|_{x,Q_t}^{(1+\alpha)} \int_0^t |\nabla\mathbf{u}|_\Omega^{(1+\alpha)}\,\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant c\delta t, \\
\langle J_\mathbf{u}\rangle_{t,Q_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})} &\leqslant ct^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\mathbf{u}|_{Q_t}, \\
|J_\mathbf{u}^{-1}|_{Q_t}^{(\alpha,\alpha/2)} &\leqslant c\delta(t + t^{1-\alpha/2}), \\
\langle J_\mathbf{u}^{-1}\rangle_{t,Q_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})} &\leqslant |J_\mathbf{u}|^{-2}\langle J_\mathbf{u}\rangle_{t,Q_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \\
&\leqslant ct^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\mathbf{u}|_{Q_t}, \\
|J_\mathbf{u}^{-1}|_{x,Q_t}^{(1+\alpha)} &\leqslant ct\delta.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Для разности якобианов, соответствующих $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$, имеем

$$\begin{aligned}
&|J_\mathbf{u} - J_{\mathbf{u}'}|_{x,Q_t}^{(1+\alpha)} + |J_\mathbf{u}^{-1} - J_{\mathbf{u}'}^{-1}|_{x,Q_t}^{(1+\alpha)} + |J_\mathbf{u}^{-1} - J_\mathbf{u}^{-1}|_{Q_t}^{(\alpha,\alpha/2)} \\
&\quad\leqslant c(t + t^{1-\alpha/2})N_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}'), \\
&\langle J_\mathbf{u} - J_{\mathbf{u}'}\rangle_{t,Q_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + \langle J_\mathbf{u}^{-1} - J_{\mathbf{u}'}^{-1}\rangle_{t,Q_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \\
&\quad\leqslant ct^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}')|_{Q_t}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Приращения операторов $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, F_3 оцениваются похожим образом на основании (3.4), (3.13). Рассмотрим, для примера, приращение $\mathbf{F}_1$, которое можно записать так:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_1(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_1(\mathbf{u}') \\
&\quad = \rho_0^{-1}(\xi)\{(\nabla_{\mathbf{u}} - \nabla_{\mathbf{u}'}) \cdot \mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) - (\nabla_{\mathbf{u}} - \nabla) \cdot [\mathbb{T}'_{\mathbf{u}'}(\mathbf{u}') - \mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})] \\
&\qquad\qquad + \nabla \cdot [\mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) - \mathbb{T}'(\mathbf{u}) - (\mathbb{T}_{\mathbf{u}'}(\mathbf{u}') - \mathbb{T}'(\mathbf{u}'))]\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
&|(\nabla_{\mathbf{u}} - \nabla_{\mathbf{u}'}) \cdot \mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})|^{(\alpha/2)}_{t,Q_t} \leqslant \left|\frac{\mathbb{A}}{J_{\mathbf{u}}} - \frac{\mathbb{A}'}{J_{\mathbf{u}'}}\right|^{(\alpha/2)}_{t,Q_t} |\nabla \cdot \mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})|^{(\alpha/2)}_{t,Q_t} \\
&\qquad \leqslant c(t + t^{1-\alpha/2}) N_t(\mathbf{u}) N_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}'), \\
&|(\nabla_{\mathbf{u}} - \nabla) \cdot [\mathbb{T}'_{\mathbf{u}'}(\mathbf{u}') - \mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})]|^{(\alpha/2)}_{t,Q_t} \\
&\qquad \leqslant c(1 + \delta)\delta(t + t^{1-\alpha/2}) N_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}'), \\
&|\nabla \cdot [\mathbb{T}'_{\mathbf{u}'}(\mathbf{u}') - \mathbb{T}'(\mathbf{u}') - (\mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) - \mathbb{T}'(\mathbf{u})) \pm (\mathbb{T}'_{\mathbf{u}'}(\mathbf{u}) - \mathbb{T}'(\mathbf{u}))]|^{(\alpha/2)}_{t,Q_t} \\
&\qquad \leqslant c(t + t^{1-\alpha/2}) \delta N_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}').
\end{aligned}$$

Аналогично

$$|\mathbf{F}_1(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_1(\mathbf{u}')|^{(\alpha)}_{x,Q_t} \leqslant c\delta t N_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}').$$

Таким образом, (3.11) для приращения оператора $\mathbf{F}_1$ доказано.

С учетом леммы 3.2 для $\mathbf{F}_2$, F_3 получаем

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{F}_2(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_2(\mathbf{u}')|^{(1+\alpha)}_{x,G_t} + |F_3(\mathbf{u}) - F_3(\mathbf{u}')|^{(1+\alpha)}_{x,G_t} \\
&\qquad \leqslant c\delta t N_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}'), \\
&\langle \mathbf{F}_2(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_2(\mathbf{u}')\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,G_t} + \langle F_3(\mathbf{u}) - F_3(\mathbf{u}')\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,G_t} \\
&\qquad \leqslant c\delta\{t N_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}') + t^{\frac{1-\alpha}{2}} |\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}')|_{G_t}\} \\
&\qquad \leqslant c\delta t N_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}').
\end{aligned}$$

В самом последнем неравенстве мы смогли воспользоваться оценкой

$$|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}')|_{G_t} \leqslant t^{\frac{1+\alpha}{2}} \langle \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}')\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,G_t} \leqslant t^{\frac{1+\alpha}{2}} N_t(\mathbf{u} - \mathbf{u}'), \tag{3.14}$$

ввиду того что $\mathbf{u} - \mathbf{u}'|_{t=0} = 0$.

Далее, рассмотрим $F_4(\mathbf{u}) = \sigma\mathbf{n}_0 \cdot \int_0^t \dot{\Delta}(\tau)\xi|_\Gamma \,\mathrm{d}\,\tau$. Так как $\mathbf{n}_0 \cdot \frac{\partial\xi}{\partial\eta_\gamma}\big|_\Gamma = 0$, $\gamma = 1,2$, то младшие члены $\sum_{\gamma=1}^2 h_\gamma \frac{\partial\xi}{\partial\eta_\gamma}$ не будут давать никакого вклада в $F_4(\mathbf{u})$. Поэтому с учетом неравенств (3.9) выводим

$$\begin{aligned}
&|F_4(\mathbf{u}) - F_4(\mathbf{u}')|_{x,G_t}^{(1+\alpha)} + \langle F_4(\mathbf{u}) - F_4(\mathbf{u}')\rangle_{t,G_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\\
&\leqslant c\Big(\sum_k |\Gamma_k|_{C^{3+\alpha}}\Big)\{t|\mathbf{u}-\mathbf{u}'|_{x,G_t}^{(2+\alpha)} + t^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}')|_{G_t}\}\\
&\leqslant ctN_t(\mathbf{u}-\mathbf{u}').
\end{aligned}$$

Наконец, для оператора $F_5(\mathbf{u})$ лемма 3.3 дает

$$|F_5(\mathbf{u}) - F_5(\mathbf{u}')|_{G_t}^{(\alpha,\alpha/2)} \leqslant c\delta(t + t^{1-\alpha/2})N_t(\mathbf{u}-\mathbf{u}').$$

Значит, (3.11) полностью доказано. •

Лемма 3.5. *Для вектора* $\mathbf{u} \in \mathrm{C}^{2+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(Q_t)$ *такого, что* $N_t(\mathbf{u}) \leqslant \delta$ *и* $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{v}_0$, *верны оценки*

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{F}_1(\mathbf{u})|_{Q_t}^{(\alpha,\alpha/2)} + |\mathbf{F}_2(\mathbf{u})|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |F_3(\mathbf{u})|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |F_5(\mathbf{u})|_{G_t}^{(\alpha,\alpha/2)}\\
&\qquad\leqslant c\{tN_t^2(\mathbf{u}) + t^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\mathbf{v}_0|_\Omega^2\}, \qquad (3.15)\\
&|F_4(\mathbf{u})|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} \leqslant c(tN_t(u) + t^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\mathbf{v}_0|_\Gamma). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Доказательство этой леммы практически повторяет доказательство леммы 3.4, если вместо (3.14) использовать неравенство

$$|\nabla\mathbf{u}|_{G_t} \leqslant t^{\frac{1+\alpha}{2}}\langle\nabla\mathbf{u}\rangle_{t,G_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + |\nabla\mathbf{v}_0|_\Gamma.$$

Кроме операторов F_i, нам еще понадобится оценить приращения заданных функций, стоящих в правой части (3.1), а также плотность $\widehat{\rho}(\xi,t)$ в лагранжевых координатах.

Лемма 3.6. *Пусть векторы* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{u}'$ *удовлетворяют неравенствам* (3.3). *Тогда*

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\rho}(\xi,\tau) - \widehat{\rho}'(\xi,\tau)|_{Q_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}\\
&\qquad\leqslant c\{(t + t^{1-\alpha/2})N_t(\mathbf{u}-\mathbf{u}') + t^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}')|_{t=0}|_\Omega\}, \qquad (3.17)\\
&|\mathbf{f}(X_\mathbf{u},\tau) - \mathbf{f}(X'_\mathbf{u},\tau)|_{Q_t}^{(\alpha,\alpha/2)} + |\mathbb{A}\nabla p(\widehat{\rho}(\xi,\tau)) - \mathbb{A}'\nabla p(\widehat{\rho}')|_{Q_t}^{(\alpha,\alpha/2)}\\
&\quad + |p(\widehat{\rho}) - p(\widehat{\rho}')|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |p_e(X_\mathbf{u},\tau) - p_e(X_{\mathbf{u}'},\tau)|_{G_t}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}\\
&\qquad\leqslant c(tN_t(\mathbf{u}-\mathbf{u}') + t^{\frac{1-\alpha}{2}}(|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}')|_{t=0}|_\Omega + |(\mathbf{u}-\mathbf{u}')|_{t=0}|_\Omega)).
\end{aligned}$$

(3.18)

Доказательство. Учитывая представление для плотности

$$\widehat{\rho}(\xi,t)=\rho_0(\xi)J_{\mathbf{u}}^{-1}(\xi,t),$$

а также неравенства (3.13), получаем

$$\begin{aligned}
|\widehat{\rho}(\xi,\tau)-\widehat{\rho}'(\xi,\tau)|^{(1+\alpha)}_{\xi,Q_t} &\leqslant |\rho_0|^{(1+\alpha)}_{\Omega}|J_{\mathbf{u}}^{-1}-J_{\mathbf{u}'}^{-1}|^{(1+\alpha)}_{\xi,Q_t}\\
&\leqslant c(t+t^{1-\alpha/2})N_t(\mathbf{u}-\mathbf{u}'),\\
\langle\widehat{\rho}-\widehat{\rho}'\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,Q_t} &\leqslant |\rho_0|_{\Omega}\langle J_{\mathbf{u}}^{-1}-J_{\mathbf{u}'}^{-1}\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,Q_t}\\
&\leqslant c\{tN_t(\mathbf{u}-\mathbf{u}')+t^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}')|_{t=0}|_{\Omega}\}.
\end{aligned}$$

Неравенство (3.18) для приращений $\mathbf{f}$ и p_e непосредственно следует из представления

$$\mathbf{f}(X_{\mathbf{u}},t)-\mathbf{f}(X_{\mathbf{u}'},t)=\sum_{k=1}^{3}\int\limits_0^1\mathcal{D}_{x_k}\mathbf{f}(X_{\mathbf{u}_s},t)\,\mathrm{d}\,s\int\limits_0^t(u_k-u_k')\,\mathrm{d}\,\tau,$$

где $\mathbf{u}_s=\mathbf{u}+s(\mathbf{u}'-\mathbf{u})$.

Что касается оценки норм функций, содержащих давление p, то, кроме интегрального представления для приращения функции, надо использовать также неравенства (3.4), (3.5) и (3.17). •

Следствие 3.3. *Для вектора* $\mathbf{u}\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_t)$ *такого, что* $\mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{v}_0$, $N_t(\mathbf{u})\leqslant\delta$, *верны оценки*

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\rho}(\xi,\tau)-\rho_0(\xi)|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{Q_t}\\
&\qquad\leqslant c\{(t+t^{1-\alpha/2})N_t(\mathbf{u})+t^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\mathbf{v}_0|_{\Omega}\},\\
&|\mathbf{f}(X_{\mathbf{u}},\tau)-\mathbf{f}(\xi,\tau)|^{(\alpha,\alpha/2)}_{Q_t}+|\mathbb{A}\nabla p(\widehat{\rho})-\nabla p(\rho_0)|^{(\alpha,\alpha/2)}_{Q_t}\\
&+|p(\widehat{\rho})-p(\rho_0)|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{G_t}+|p_e(X_{\mathbf{u}},\tau)-p_e(\xi,\tau)|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{G_t}\\
&\qquad\leqslant c\{tN_t(\mathbf{u})+t^{\frac{1-\alpha}{2}}(|\nabla\mathbf{v}_0|_{\Omega}+|\mathbf{v}_0|_{\Omega})\}.
\end{aligned}\tag{3.19}$$

Завершив предварительные оценки, перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Перепишем систему (3.1) в эквивалентном виде

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{w}\equiv\mathcal{H}(\mathbf{u}).\tag{3.20}$$

Здесь $\mathbf{u}_0$ — решение линейной задачи, где в правой части стоят заданные функции:

$$
\begin{gathered}
D_t\mathbf{u}_0 - \rho_0^{-1}(\xi)\nabla\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{u}_0) = \mathbf{f}(\xi,t) - \rho_0^{-1}(\xi)\nabla p(\rho_0(\xi)) \quad \text{в } Q_T,\\
\mathbf{u}_0|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \mu\Pi_0\mathbb{S}(\mathbf{u}_0)\mathbf{n}_0|_{G_T} = 0,\\
\mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{u}_0)\mathbf{n}_0 - \sigma\mathbf{n}_0\cdot\Delta(0)\int\limits_0^t \mathbf{u}_0\,\mathrm{d}\,\tau|_{G_T} = \sigma H_0(\xi) + p(\rho_0(\xi)) - p_e(\xi,t)|_{G_T},
\end{gathered}
$$

а $\mathbf{w}$ — решение той же системы (2.1), но где в роли правых частей выступают функции от $\mathbf{u}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{f} = \mathbf{f}(X_{\mathbf{u},t}) - \mathbf{f}(\xi,t) + \rho_0^{-1}(\xi)\{\mathbb{A}\nabla p(\widehat{\rho}) - \nabla p(\rho_0)\} + F_1(\mathbf{u}),\\
&\mathbf{w}_0 = 0,\\
&\Pi_0\mathbf{a} = F_2(\mathbf{u}),\\
&a = p(\widehat{\rho})(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{n}) - p(\rho_0) + p_e(\xi,t) - p_e(X_{\mathbf{u}},t)|_{G_t} + F_3(\mathbf{u}) + F_4(\mathbf{u}),\\
&A = F_5(\mathbf{u}).
\end{aligned}
$$

Обозначим через $B_d(Q_{T_0})$ подмножество шара радиуса d в пространстве $\mathrm{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_{T_0})$ такое, что при $t = 0$ вектор-функции из него обращаются в $\mathbf{v}_0$.

Покажем, что оператор $\mathcal{H}(\mathbf{u})$ является сжимающим оператором на замкнутом множестве $B_\delta(Q_{T_0})$:

$$
N_{T_0}(\mathbf{u}) \leqslant \delta, \quad T_0 \ll 1, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{v}_0,
$$

с некоторым $\delta > 0$. Кроме того, он переводит это множество в себя.

Действительно, для любого элемента $\mathbf{u}$ из $B_\delta(Q_{T_0})$ в силу теоремы 2.1 и неравенств (3.15), (3.16), (3.19) имеем

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{H}(\mathbf{u})\|_{Q_{T_0}}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} &\leqslant N_{T_0}(\mathbf{u}_0) + N_{T_0}(\mathbf{w})\\
&\leqslant N_{T_0}(\mathbf{u}_0) + c_1N_{T_0}(\mathbf{u})(T_0 + T_0N_{T_0}(\mathbf{u})) + c_2T_0^{\frac{1-\alpha}{2}}(|\nabla\mathbf{v}_0|_\Omega^2 + |\nabla\mathbf{v}_0|_\Omega + |\mathbf{v}_0|_\Omega).
\end{aligned}
$$

(Заметим, что условия согласования (2.2) выполнены вследствие (1.10)). Если выбрать теперь δ из условия

$$
N_{T_0}(\mathbf{u}_0) + c_2T_0^{\frac{1-\alpha}{2}}(|\nabla\mathbf{v}_0|_\Omega^2 + |\nabla\mathbf{v}_0|_\Omega + |\mathbf{v}_0|_\Omega) \leqslant \frac{\delta}{2},
$$

а T_0 взять столь малым, что

$$c_1 T_0(1 + N_{T_0}(\mathbf{u})) \leqslant \frac{1}{2},$$

то $\mathcal{H}(\mathbf{u})$ будет принадлежать тому же множеству $B_\delta(Q_{T_0})$:

$$\|\mathcal{H}(\mathbf{u})\|_{Q_{T_0}}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leqslant \delta, \quad \mathcal{H}(\mathbf{u})|_{t=0} = \mathbf{v}_0.$$

Далее, из лемм 3.4 и 3.6 вытекает, что для произвольных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ из $B_\delta(Q_{T_0})$ верно неравенство

$$\|\mathcal{H}(\mathbf{u}) - \mathcal{H}(\mathbf{u}')\|_{Q_{T_0}}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leqslant c_3(1+\delta)(T_0 + T_0^{1-\alpha/2}) N_{T_0}(\mathbf{u} - \mathbf{u}'),$$

откуда при

$$c_3(1+\delta)(T_0 + T_0^{1-\alpha/2}) \leqslant 1$$

следует, что $\mathcal{H}(\mathbf{u})$ — оператор сжатия. Тогда по теореме Банаха уравнение (3.20) (а значит, и задача (1.9)) имеет единственное решение в $B_\delta(Q_{T_0})$.

Осталось доказать, что эта задача не может иметь двух решений с конечной нормой $\mathrm{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_{T_0})$. Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ — два таких решения. Для разности $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{v}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t \mathbf{v} - \rho_0^{-1}(\xi)\nabla \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{v}) \\
&\quad = \mathbf{f}(X_{\mathbf{u}}, t) - \mathbf{f}(X_{\mathbf{u}'}, t) - \rho_0^{-1}(\xi)[\mathbb{A}\nabla p(\rho_0 J_{\mathbf{u}}^{-1}) - \mathbb{A}'\nabla p(\rho_0 J_{\mathbf{u}'}^{-1})] \\
&\qquad + \mathbf{F}_1(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_1(\mathbf{u}') \\
&\quad \equiv \mathbf{G}_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}'),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = 0,$$

$$\mu \Pi_0 \mathbb{S}(\mathbf{v})\mathbf{n}_0|_\Gamma = \mathbf{F}_2(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_2(\mathbf{u}'),$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{n}_0 \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{v})\mathbf{n}_0 - \sigma \mathbf{n}_0 \cdot \Delta(0) \int_0^t \mathbf{v}\, \mathrm{d}\tau|_\Gamma \\
&\quad = \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')\{p(\rho_0 J_{\mathbf{u}}^{-1}) - p_e(X_{\mathbf{u}}, t)\} \\
&\qquad + (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{u}')\{p(\rho_0 J_{\mathbf{u}}^{-1}) - p(\rho_0 J_{\mathbf{u}'}^{-1}) - p_e(X_{\mathbf{u}}, t) + p_e(X_{\mathbf{u}'}, t)\} + F_3(\mathbf{u}) - F_3(\mathbf{u}') \\
&\qquad + \sigma(F_4(\mathbf{u}) - F_4(\mathbf{u}')) + \sigma \int_0^t F_5(\mathbf{u}) - F_5(\mathbf{u}')\, \mathrm{d}\tau \\
&\quad \equiv G_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}') + \sigma \int_0^t F_5(\mathbf{u}) - F_5(\mathbf{u}')\, \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Оценим $\mathbf{v}$ с помощью теоремы 2.1 на некотором интервале $(0,\tau)$, $\tau < T_0$. В силу (3.11), (3.18)

$$\begin{aligned}&|\mathbf{G}_1(\mathbf{u},\mathbf{u}')|_{Q_\tau}^{(\alpha,\alpha/2)} + |\mathbf{F}_2(\mathbf{u}) - \mathbf{F}_2(\mathbf{u}')|_{\Gamma_\tau}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}\\ &+ |G_2(\mathbf{u},\mathbf{u}')|_{\Gamma_\tau}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} + |F_5(\mathbf{u}) - F_5(\mathbf{u}')|_{\Gamma_\tau}^{(\alpha,\alpha/2)}\\ &\leqslant c_4\tau^{\frac{1-\alpha}{2}}|\mathbf{v}|_{Q_\tau}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}.\end{aligned}$$

Применяя неравенство (2.3), получаем

$$|\mathbf{v}|_{Q_\tau}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leqslant c_5\tau^{\frac{1-\alpha}{2}}|\mathbf{v}|_{Q_\tau}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)},$$

откуда заключаем, что $\mathbf{v} = 0$ на промежутке $(0,\tau)$, $\tau \leqslant c_5^{-2/(1-\alpha)}$. Повторяя это рассуждение, показываем, что $\mathbf{v} = 0$ при $t \in (0,T_0)$.

Теорема 1.1 полностью доказана. •

В заключение авторы благодарят РФФИ за финансовую поддержку.

Список литературы

[1] Solonnikov V. A., Tani A., *Free boundary problem for a viscous compressible flow with a surface tension*, Constantin Carathéodory: an International Tribute (Th. M. Rassias, ed.). Vol. 1, 2, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1991, pp. 1270–1303.

[2] Денисова И. В., Солонников В. А., *Классическая разрешимость модельной задачи в полупространстве, связанной с движением изолированной массы сжимаемой жидкости*, Зап. науч. семин. ПОМИ **271** (2000), 92–113.

[3] Солонников В. А., *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **83** (1965), 163 с.

[4] Mogilevskiĭ I. Sh., Solonnikov V. A., *On the solvability of an evolution free boundary problem for the Navier–Stokes equations in Hölder spaces of functions*, Mathematical Problems Relating to the Navier–Stokes Equation, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., vol. 11, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992, pp. 105–181.

[5] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.

Институт проблем машиноведения РАН
199178, Санкт-Петербург В. О., Большой пр, 61
Россия
E-mail: ira@wave.impe.ru

Поступило 11 мая 2001 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: solonnik@pdmi.ras.ru