



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Макин, О некоторых свойствах собственных и присоединенных функций эллиптического оператора второго порядка, *Дифференц. уравнения*, 1988, том 24, номер 1, 116–123

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

3 декабря 2024 г., 11:34:54



А. С. МАКИН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В настоящей работе для общего несамосопряженного эллиптического оператора второго порядка с произвольными краевыми условиями устанавливаются оценки антиаприорного типа, связывающие L_2 -нормы собственных и присоединенных функций.

Рассмотрим эллиптический оператор

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad (1)$$

заданный в произвольной области G пространства R^N . Коэффициенты $a_{ij}(x)$ будем считать вещественнозначными функциями, все остальные коэффициенты, вообще говоря, — комплекснозначными. Следуя В. А. Ильину [1], под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ , будем понимать любую не равную тождественно нулю комплекснозначную функцию $u(x)$ из класса $C^{(2)}(G)$, являющуюся регулярным решением уравнения $Lu + \lambda u = 0$.

Аналогично под присоединенной функцией порядка n , $n=1, 2, \dots$, отвечающей тому же λ и собственной функции $u(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $u^n(x)$ из класса $C^{(2)}(G)$, являющуюся регулярным решением уравнения $Lu + \lambda u = u^n$.

Пусть выполнены следующие условия:

1) коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора (1) удовлетворяют условию эллиптичности, т. е. $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ и для любого компакта K области G

$$\inf_{|\xi|=1, x \in K} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0,$$

где ξ — вещественный вектор с обычной нормой;

2) функции $a_{ij}(x)$, $\partial a_{ij}(x)/\partial x_i$, $b_i(x)$, $c(x)$ непрерывны в области G . Обозначим через μ тот квадратный корень из λ , действительная часть которого неотрицательна.

Теорема 1. Для любого комплексного λ , любого номера n , $n=1, 2, \dots$, и любых компактов K и K' области G , первый из которых лежит строго внутри второго, справедлива оценка

$$\|u^n\|_{L_2(K)} \leq C(K, K') (n + \operatorname{Re} \mu)^2 \|u\|_{L_2(K')}. \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $z(y) = y^m e^{-\mu y}$, где $m = [\operatorname{Re} \mu / 2]$. Если $\operatorname{Re} \mu \geq 2$, то функция $|z(y)|$ монотонно возрастает на отрезке $[0, y_0]$ и монотонно убывает на отрезке $[y_0, 1]$, где $y_0 = m / \operatorname{Re} \mu$. Отсюда следует, что для любого интервала (a, b) такого, что $(a, b) \subset (0, 1)$, $y_0 \in (a, b)$, имеет место неравенство

$$\|z\|_{L_2(0,1)}^m \leq c_1 \|z\|_{L_2(a,b)}^m, \quad (3)$$

где постоянная c_1 зависит лишь от a и b . Очевидно, что при $0 \leq \operatorname{Re} \mu < 2$ оценка (3) справедлива для любого интервала $(a, b) \subset (0, 1)$. Заметим также, что всегда $1/4 \leq y_0 \leq 1/2$. Кроме того, при выполнении условия $3m \leq a|\mu|$ для любого интервала $(a, b) \subset (0, 1)$ имеет место неравенство

$$|\mu| \|z\|_{L_2(a, b)}^m \leq \frac{3}{2} \|z'\|_{L_2(a, b)}^m. \quad (4)$$

Из определения функции $z(y)$ следует, что она является присоединенной функцией порядка m оператора $L_0 z = z''$, отвечающей собственному значению $-\lambda$, т. е. имеют место равенства $L_0 z - \lambda z = z$ ($i = m, \dots, 1$), $L_0 z - \lambda z = 0$.

Лемма 1. Пусть $L_1 u$ и $L_2 v$ — дифференциальные операторы, заданные соответственно в области G_1 пространства R^{N_1} и в области G_2 пространства R^{N_2} , функция $u(x)$ является присоединенной функцией порядка n оператора L_1 , отвечающей собственному значению λ_1 , а функция $v(y)$ — присоединенной функцией порядка m оператора L_2 , отвечающей собственному значению λ_2 . Тогда функция $u(x)v(y)$ является присоединенной функцией порядка $n+m$ оператора $L_1 + L_2$, заданного в области $G_1 \times G_2$ пространства $R^{N_1} \times R^{N_2}$, отвечающей собственному значению $\lambda_1 + \lambda_2$.

Лемма доказывается по индукции. Пусть $n+m=k$. Если $k=0$, то утверждение леммы проверяется непосредственно. Предположим, что лемма справедлива при $k=p$. Пусть $n+m=p+1$. Имеем

$$\begin{aligned} L_1(u(x)v(y)) + L_2(u(x)v(y)) + (\lambda_1 + \lambda_2)u(x)v(y) = \\ = u(x)v(y) + u(x)v(y) \end{aligned}$$

($u(x) \equiv 0$, если $n=0$; $v(y) \equiv 0$, если $m=0$). Функции $u(x)v(y)$ и $u(x)v(y)$, согласно предположению индукции, являются присоединенными функциями порядка p оператора $L_1 + L_2$, откуда вытекает справедливость леммы.

Из леммы 1 следует, что функция $v(x, y) = u(x)z(y)$ является присоединенной функцией оператора $L + L_0$ порядка $n+m$, отвечающей собственному значению $\lambda = 0$. Обозначим $v = (L_1 + L_0)v$ ($k=0, 1, \dots, n+m-1$).

Продолжим коэффициенты оператора (1) на все пространство R^N так, чтобы полученные функции $\tilde{a}_{ij}(x)$, $\tilde{b}_i(x)$, $\tilde{c}(x)$ совпадали соответственно с функциями $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ на компакте K' , удовлетворяли во всем R^N тем же условиям на гладкость и чтобы оператор \tilde{L} с коэффициентами $\tilde{a}_{ij}(x)$, $\tilde{b}_i(x)$, $\tilde{c}(x)$ удовлетворял условию

$$\inf_{|\xi|=1, x \in R^N} \sum_{i, j=1}^N \tilde{a}_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \delta > 0.$$

Пусть компакт K лежит строго внутри компакта K_1 , лежащего строго внутри компакта K' , а числа a, a_1, b, b_1 удовлетворяют неравенствам $0 < a_1 < a < 1/4$, $1/2 < b < b_1 < 1$. Обозначим символом $\eta(x, y)$ так называемую «срезку», т. е.

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \in K_1 \times [a_1, b_1], \\ 0 & \text{при } (x, y) \in K' \times [0, 1], \end{cases}$$

$0 \leq \eta(x, y) \leq 1$, $\eta(x, y) \in C^{(2)}(R^N \times (-\infty, \infty))$. Введем в рассмотрение оператор \hat{L} :

$$\hat{L}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \hat{L}\varphi - L_0\varphi, \quad (5)$$

действующий в пространстве $R^{N+2}(x, y, t)$. Обозначим

$$P(x, y, t) = \sum_{k=0}^{n+m} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} v^{n+m-k}(x, y).$$

Рассмотрим две задачи Коши для оператора (5):

$$\hat{L}\varphi = \hat{L}(\eta(x, y)P(x, y, t)),$$

$$\varphi|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \eta(x, y) v^{n+m}(x, y); \quad (6)$$

$$\hat{L}\varphi = 0, \quad \varphi|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \eta(x, y) v^{n+m}(x, y). \quad (7)$$

Поскольку оператор (5) гиперболический, то (см. [2]) решение задачи (7) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \left(\|\varphi(x, y, t)\|_{W_2^1(R^{N+1})} + \left\| \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, t) \right\|_{L_2(R^{N+1})} \right) &\leq \\ &\leq C(T) \left\| \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, 0) \right\|_{L_2(R^{N+1})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как $\hat{L}(\eta(x, y)P(x, y, t)) = 0$ при $(x, y, t) \in K_1 \times [a_1, b_1] \times (-\infty, \infty)$, то по теореме об области зависимости (см. [2]) решения задач (6) и (7) совпадают при $(x, y, t) \in K \times [a, b] \times [0, T_0]$, где T_0 — некоторое достаточно малое число ($T_0 > 0$), стало быть, на этом множестве $\varphi(x, y, t) = P(x, y, t)$. Из последнего равенства, оценки (8) и нечетности по t функции $P(x, y, t)$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \max_{|t| \leq T_0} \left(\|P(x, y, t)\|_{W_2^1(K \times [a, b])} + \left\| \frac{\partial}{\partial t} P(x, y, t) \right\|_{L_2(K \times [a, b])} \right) &\leq \\ &\leq c_2 \|v\|_{L_2(K' \times (0, 1))}^{n+m}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) следует, что

$$\max_{|t| \leq T_0} \left\| \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, t) \right\|_{L_2(K \times [a, b])}^2 \leq c_3 \|v\|_{L_2(K' \times (0, 1))}^{n+m}, \quad (10)$$

$$\max_{|t| \leq T_0} H(t) \leq c_4 \|v\|_{L_2(K' \times (0, 1))}^{n+m}, \quad (11)$$

где $H(t) = \left\| \frac{\partial}{\partial t} P(x, y, t) - v^{n+m}(x, y) \right\|_{L_2(K \times [a, b])}^2$. Легко видеть, что $H(t)$ есть многочлен степени $2(n+m)$, причем

$$H^{(4)}(0) = 6 \|v\|_{L_2(K \times [a, b])}^{n+m-1}.$$

Согласно неравенству Маркова, $|H^{(4)}(0)| \leq c_5 (n+m)^4 \max_{|t| \leq T_0} H(t)$, откуда в соединении с (11) следует, что

$$\|v\|_{L_2(K \times [a, b])}^{n+m-1} \leq c_6 (n+m)^2 \|v\|_{L_2(K' \times (0, 1))}^{n+m}. \quad (12)$$

Так как $v = u z^{n+m-1} + u z^{n-1} m$, то из (12) получаем

$$\|u z\|_{L_2(K \times [a, b])}^{n-1} m \leq \|u z\|_{L_2(K \times [a, b])}^{n-1} + c_6 (n+m)^2 \|u z\|_{L_2(K' \times (0, 1))}^{n-1}. \quad (13)$$

Поскольку $z^m(y) = m(m-1)y^{m-2}e^{-\mu y} - 2m\mu e^{-\mu y}$, то из (13) имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(K)}^{n-1} \|z\|_{L_2(a, b)}^m &\leq m^2 \|y^{m-2}e^{-\mu y}\|_{L_2(a, b)} \times \\ &\times \|u\|_{L_2(K)}^n + 2m|\mu| \|y^{m-1}e^{-\mu y}\|_{L_2(a, b)} \|u\|_{L_2(K)}^n + \\ &+ c_7 (n+m)^2 \|u\|_{L_2(K)}^n \|z\|_{L_2(0, 1)}^m. \end{aligned} \quad (14)$$

Из оценки (10) при помощи аналогичных рассуждений, связанных с применением неравенства Маркова, легко получить следующее неравенство:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \right\|_{L_2(K \times [a, b])}^{n+m} \leq c_8 (n+m)^2 \|v\|_{L_2(K' \times (0, 1))}^{n+m}, \quad (15)$$

откуда следует, что $\|u\|_{L_2(K)}^n \|z'\|_{L_2(a, b)}^m \leq c_9 (n+m) \|u\|_{L_2(K')}^n \|z\|_{L_2(0, 1)}^m$. Отсюда и из неравенств (3), (4) имеем

$$\|u\|_{L_2(K)}^n \leq c_{10} \frac{(n+m)}{|\mu|+1} \|u\|_{L_2(K')}^n. \quad (16)$$

Из неравенств (3), (14), (16) сразу вытекает оценка (2). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если $n \geq c_0 \operatorname{Re} \mu$, где c_0 — некоторая постоянная ($c_0 > 0$), то имеет место неравенство $\|u\|_{L_2(K)}^{n-1} \leq C(K, K') n^2 \|u\|_{L_2(K')}^n$.

Следствие 2. Если $c'_0 \sqrt{\operatorname{Re} \mu} \leq n \leq c_0 \operatorname{Re} \mu$, где c_0, c'_0 — некоторые постоянные ($c_0 > 0, c'_0 > 0$), то справедлива оценка $\|u\|_{L_2(K)}^{n-1} \leq C(K, K') n^2 \operatorname{Re} \mu \|u\|_{L_2(K')}^n$.

Замечание. Из неравенства (9) аналогичным способом устанавливается следующая оценка для производных присоединенной функции:

$$\|u\|_{W_2^1(K)}^n \leq C(K, K') (n + \operatorname{Re} \mu) \|u\|_{L_2(K')}^n,$$

справедливая при любых значениях n и μ .

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1) $|\operatorname{Im} \mu| \leq M_1$;

2) $n \leq M_2 \sqrt{|\mu|}$, где M_2 — некоторая постоянная, зависящая лишь от коэффициентов оператора (1) и компактов K и K' .

Тогда для любых номеров n и k , таких, что $0 < k \leq n$, справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_2(K)}^{n-k} \leq C(K, K') \sqrt[n]{n} (n|\mu|)^k \|u\|_{L_2(K')}^n. \quad (17)$$

Доказательство. Определим функцию $H_n(x, t)$ равенством

$$H_n(x, t) = \sum_{j=0}^n u^{n-j}(x) \int_0^t v^j(\tau) d\tau,$$

где

$$v^j(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tau^2}{2} \right)^j \frac{J_{j-1/2}(\mu\tau)}{(\mu\tau)^{j-1/2}}. \quad (18)$$

Исходя из свойств функций Бесселя, нетрудно проверить, что $H_n(x, 0) = 0$, $(\partial/\partial t)H_n(x, 0) = u^n(x)$ при $x \in G$, $(\partial^2/\partial t^2 - L)H_n(x, t) = 0$ при $(x, t) \in G \times (-\infty, \infty)$. Используя энергетические оценки для решения задачи Коши для гиперболического уравнения, рассуждениями, аналогичными тем, которые проводились при доказательстве теоремы 1 (см. также [3]), легко получить следующее неравенство:

$$\max_{0 \leq t \leq T_0} \left(\|H_n(x, t)\|_{W_2^1(K)} + \left\| \frac{\partial}{\partial t} H_n(x, t) \right\|_{L_2(K)} \right) \leq c_1 \|u^n\|_{L_2(K')}.$$

Отсюда и из нечетности по t функции $H_n(x, t)$ следует неравенство

$$\max_{|t| \leq T_0} \| \overset{n}{W}(x, t) \|_{L_2(K)}^2 \leq c_2 \|u^n\|_{L_2(K')}^2, \quad (19)$$

где

$$\overset{n}{W}(x, t) = \sum_{j=0}^n v^j(t) u^{n-j}(x).$$

Из равенств (18) вытекает, что функции $v^j(t)$ ($j=1, \dots, n$) образуют цепочку присоединенных функций оператора $L_0 v = v''$, отвечающих собственному значению $\lambda = \mu^2$ и собственной функции $v^0(t)$, т. е. $L_0 v^j + \lambda v^j = v^{j-1}$ ($j=n, \dots, 1$), $L_0 v^0 + \lambda v^0 = 0$.

Отсюда следует, что функция $\overset{n}{W}(x, t)$ является присоединенной функцией порядка n оператора L_0 , отвечающей тому же собственному значению λ , т. е. справедливы равенства $L_0 \overset{k}{W} + \lambda \overset{k}{W} = \overset{k-1}{W}$ ($k=n, \dots, 1$), $L_0 \overset{0}{W} + \lambda \overset{0}{W} = 0$. Заметим также, что $\overset{k}{W}(x, 0) = u^k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$).

Зафиксируем произвольное $x \in G$. Тогда из представления для функций Бесселя полуцелого индекса следует, что $\overset{n}{W}(x, t) = P_n(t)e^{i\mu t} + Q_n(t)e^{-i\mu t}$, где $P_n(t)$ и $Q_n(t)$ являются многочленами степени не выше n . Обозначим $\overset{n}{\varphi}(t) = P_n(t)e^{i\mu t}$, $\overset{n}{\psi}(t) = Q_n(t)e^{-i\mu t}$. Тогда $\overset{n}{\varphi}(t)$ и $\overset{n}{\psi}(t)$ — присоединенные функции порядка не выше n оператора L_0 , отвечающие тому же собственному значению λ . Соответствующие им цепочки обозначим $\overset{k}{\varphi}(t)$ и $\overset{k}{\psi}(t)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$). Легко видеть, что

$$\overset{n-k}{W}(x, t) = \overset{n-k}{\varphi}(t) + \overset{n-k}{\psi}(t) \quad (k=0, 1, \dots, n). \quad (20)$$

По индукции докажем, что

$$\overset{n-k}{\varphi}(t) = e^{i\mu t} \sum_{m=0}^k C_k^m P_n^{(k+m)}(t) (2i\mu)^{k-m}. \quad (21)$$

При $k=1$ равенство (21) проверяется непосредственно. Предположим, оно верно при $k=k_0$. Докажем его справедливость при $k=k_0+1$. Используя свойства биномиальных коэффициентов, будем иметь

$$\begin{aligned}
 \varphi &= L_0 \varphi + \lambda \varphi = e^{i\mu t} \left(\sum_{m=0}^{k_0} C_{k_0}^m P_n^{(k_0+m+2)}(t) \right) \times \\
 &\times (2i\mu)^{k_0-m} + \sum_{m=0}^{k_0} C_{k_0}^m P_n^{(k_0+m+1)}(t) (2i\mu)^{k_0-m+1} = \\
 &= e^{i\mu t} (P_n^{(2k_0+2)}(t) + \sum_{m=0}^{k_0-1} C_{k_0}^m P_n^{(k_0+m+2)}(t) (2i\mu)^{k_0-m} + \\
 &+ P_n^{(k_0+1)}(t) (2i\mu)^{k_0+1} + \sum_{m=1}^{k_0} C_{k_0}^m P_n^{(k_0+m+1)}(t) (2i\mu)^{k_0-m+1}) = \\
 &= e^{i\mu t} (P_n^{(k_0+1)}(t) (2i\mu)^{k_0+1} + \sum_{m=1}^{k_0} (C_{k_0}^{m-1} + C_{k_0}^m) P_n^{(k_0+m+1)}(t) (2i\mu)^{k_0-m+1} + \\
 &+ P_n^{(2k_0+2)}(t)) = e^{i\mu t} \sum_{m=0}^{k_0+1} C_{k_0+1}^m P_n^{(k_0+m+1)}(t) (2i\mu)^{k_0-m+1}.
 \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\psi(t) = e^{-i\mu t} \sum_{m=0}^k C_k^m P_n^{(k+m)}(t) (-2i\mu)^{k-m}.$$

Из неравенств для производных многочлена (см., например, [4, 5]) следует, что

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{m=0}^k C_k^m P_n^{(k+m)}(0) (2i\mu)^{k-m} \right| \leq \\
 & \leq \sum_{m=0}^k c_3^{k+m} C_k^m n^{k+m} (2|\mu|)^{k-m} \max_{|t| \leq T_0/2} |P_n(t)| \leq \\
 & \leq c_3^{2k} \max_{|t| \leq T_0/2} |P_n(t)| \sum_{m=0}^k C_k^m n^{2m} (2n|\mu|)^{k-m} = \\
 & = c_3^{2k} (n^2 + 2n|\mu|)^k \max_{|t| \leq T_0/2} |P_n(t)| \leq c_4^k \sqrt[n]{n} (n^2 + 2n|\mu|)^k \|P_n\|_{L_2(-T_0, T_0)}.
 \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и условия 1) теоремы получаем

$$\left| \varphi(0) \right| \leq c_5^k \sqrt[n]{n} (n^2 + 2n|\mu|)^k \|\varphi\|_{L_2(-T_0, T_0)}. \quad (22)$$

Аналогичное неравенство имеет место для функции $\psi(t)$:

$$\left| \psi(0) \right| \leq c_6^k \sqrt[n]{n} (n^2 + 2n|\mu|)^k \|\psi\|_{L_2(-T_0, T_0)}. \quad (23)$$

Из (20), (22), (23) вытекает, что

$$\begin{aligned}
 |W(x, 0)| &= \left| \varphi(0) + \psi(0) \right| \leq \left| \varphi(0) \right| + \left| \psi(0) \right| \leq \\
 & \leq c_7^k \sqrt[n]{n} (n^2 + 2n|\mu|)^k (\|\varphi\|_{L_2(-T_0, T_0)} + \|\psi\|_{L_2(-T_0, T_0)}). \quad (24)
 \end{aligned}$$

Подчеркнем, что постоянная c_7 не зависит от точки x .

Из известных свойств многочленов [4, 5] следует, что

$$\begin{aligned}
 |(\varphi, \psi)_{L_2(-T_0, T_0)}| &= \left| \int_{-T_0}^{T_0} P_n(t) \overline{Q_n(t)} e^{2i\mu t} dt \right| \leq \\
 &\leq |P_n(t) \overline{Q_n(t)} e^{2i\mu t}|_{-T_0}^{T_0} / 2|\mu| + \frac{1}{2|\mu|} \int_{-T_0}^{T_0} |(P_n(t) \overline{Q_n(t)})' e^{2i\mu t}| dt \leq \\
 &\leq c_8 \frac{n^2}{|\mu|} \|P_n\|_{L_2(-T_0, T_0)} \|Q_n\|_{L_2(-T_0, T_0)} \leq \\
 &\leq c_9 \frac{n^2}{|\mu|} \|\varphi\|_{L_2(-T_0, T_0)} \|\psi\|_{L_2(-T_0, T_0)} \leq \\
 &\leq c_9 \frac{n^2}{2|\mu|} (\|\varphi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2 + \|\psi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2).
 \end{aligned}$$

Постоянная c_9 в последнем неравенстве зависит лишь от постоянной M_1 из условия 1) теоремы и числа T_0 , которое зависит только от коэффициентов оператора (1) и компактов K и K' . Выбирая в условии 2) теоремы постоянную $M_2 = c_9/2$, получим

$$|(\varphi, \psi)_{L_2(-T_0, T_0)}| \leq (\|\varphi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2 + \|\psi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2) / 4. \quad (25)$$

Используя неравенство (25), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \|\varphi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2 + \|\psi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2 &\leq \|\varphi + \psi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2 + 2|(\varphi, \psi)_{L_2(-T_0, T_0)}| \leq \\
 &\leq \|\varphi + \psi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2 + (\|\varphi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2 + \|\psi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2) / 2,
 \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\|\varphi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2 + \|\psi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2 \leq 2\|\varphi + \psi\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2. \quad (26)$$

Из (20), (24), (26) вытекает

$$|\overline{W}^{n-k}(x, 0)|^2 \leq c_{10}^{2k} n(n^2 + 2n|\mu|)^{2k} \|\overline{W}^n(x, t)\|_{L_2(-T_0, T_0)}^2. \quad (27)$$

Интегрируя неравенство (27) по компакту K и сопоставляя с оценкой (19), получаем неравенство

$$\|\overline{u}^{n-k}\|_{L_2(K)}^2 \leq c_{11}^{2k} n(n^2 + 2n|\mu|)^{2k} \|\overline{u}^n\|_{L_2(K')}^2,$$

откуда следует утверждение теоремы 2.

Далее рассмотрим произвольную полную в $L_2(G)$ и минимальную систему $\{u_n\}$ собственных и присоединенных функций оператора (1). Тогда существует и притом единственная биортогонально сопряженная к ней в $L_2(G)$ система $\{v_n\}$. Считая, что числа λ_n не имеют конечных точек сгущения, занумеруем их в порядке неубывания $|\lambda_n|$ и для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ составим спектральное разложение ее в биортогональный ряд $\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_n| < \lambda} (f, v_n) u_n(x)$.

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1) система $\{v_n\}$ состоит из собственных и присоединенных функций оператора L^*v , формально сопряженного к оператору (1) в области G , отвечающих собственным значениям $\overline{\lambda}_n$;

2) для любого компакта K области G существует постоянная $C(K)$ такая, что для всех номеров n $\|u_n\|_{L_2(G)}\|v_n\|_{L_2(K)} \leq C(K)$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(\lambda_n)}{|\lambda_n|^{1/4}} = 0$, где $h(\lambda_n)$ — максимальный порядок присоединенных функций системы $\{v_n\}$, отвечающих собственным значениям, равным $\bar{\lambda}_n$;

4) $|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda_n}| \leq C$, для любого $\lambda > 0$ $\sum_{|\lambda_n| \leq \lambda} 1 \leq M\lambda^{N/2}$;

5) коэффициенты $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ оператора (1) принадлежат классу $C^{(N+1)}(G)$;

6) функция $f(x)$ имеет в области G компактный носитель и принадлежит классу $S. Л. Соболева W_2^{N+1}(G)$.

Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\sigma_\lambda(x, f) - f(x)\|_{L_2(G)} = 0.$$

Данная теорема при условии равномерной ограниченности порядка присоединенных функций системы $\{v_n\}$, являющемся более сильным, чем условие 3), была доказана В. А. Ильиным в работе [6]. Там же были установлены достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости биортогонального ряда $\sigma_\lambda(x, f)$ к функции $f(x)$. При наличии оценки (17) доказательство теоремы 3 проводится так же, как и в работе [6].

Отметим, что справедливость оценки $\|u\|_{L_2(K)}^{n-1} \leq C(K, K', \varepsilon) (4 + \varepsilon)^n (|\mu| + 1) \|u\|_{L_2(K)}$ при произвольном $\varepsilon > 0$ была установлена в работе [1].

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Ильину за постановку задачи и полезное обсуждение ее результатов.

Литература

1. Ильин В. А. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 30—37.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
3. Макин А. С. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 6. С. 1314—1318.
4. Тиман А. Ф. Теория приближений функций действительного переменного. М., 1960.
5. Лебедь Г. К. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1975. Т. 134. С. 142—160.
6. Ильин В. А. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274, № 1. С. 19—22.

Всесоюзный заочный
машиностроительный институт

Поступила в редакцию
9 июля 1987 г.

УДК 517.947

Е. И. МОИСЕЕВ

О РАСПОЛОЖЕНИИ СПЕКТРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Введение. В работе рассматривается следующая краевая задача на собственные значения:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } D, \quad (1)$$

$$u|_{\gamma} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=0, 0 < x < 1} = 0, \quad (2)$$

где D — область на двумерной плоскости, ограниченная сегментом