Ю. Б. Фарфоровская, Двойные операторные интегралы и их оценки в равномерной норме,
*Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1996, том 232, 148–173

**Ю. Б. Фарфоровская**

# ДВОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ОЦЕНКИ В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ

## Введение

Пусть $H$ – сепарабельное гильбертово пространство, $A, B$ – самосопряженные ограниченные операторы в нем, $E_\lambda$ и $F_\mu$ – спектральные меры (считаем их, для определенности, непрерывными справа) операторов $A$ и $B$ соответственно, $T$ – ограниченный оператор в $H$. Пусть также имеется функция $f$, заданная на всей оси и удовлетворяющая условию Липшица, т.е. $|f(t_1)-f(t_2)| \leqslant [f]|t_1-t_2|$, где $[f]$ – константа Липшица.

Настоящая работа содержит четыре параграфа. В §1 мы на эвристическом уровне приводим несколько формул, содержащих двойные операторные интегралы $\iint \varphi(\lambda,\mu)dE_\lambda TdF_\mu$.

В §2 мы рассматриваем случай, когда двойной операторный интеграл можно определить как предел интегральных сумм и, тем самым, придать смысл эвристическим формулам §1. В частности, доказывается, что это возможно, если один из операторов $A$ или $B$ имеет конечный спектр. Из этих общих рассуждений вытекает "грубая" оценка нормы $\|f(A)T - Tf(B)\|$, также приведенная в этом параграфе. Более точной (по порядку) оценке посвящен §3. В нем, кроме того, приводится единое доказательство результатов, частично полученных автором в работах [1–5]. Унификация произошла из-за отказа явно использовать метрику Канторовича–Рубинштейна, обратившись непосредственно к "монотонно-ступенчатым фигурам", другими словами – к специальным интегральным суммам для двойных операторных интегралов, факт использования которых был несколько затемнен в предыдущих работах.

Разумеется, изучение разностей $f(A)-f(B)$ или $f(A)T-Tf(B)$ имеет самостоятельную ценность. Перечислим некоторые функции из класса Липшица, играющие важную роль в теории операторов. Это, во-первых, $f(t)=|t|$. (Оценка нормы $\||A|-|B|\|$ была получена независимо от автора в работе Т. Като [7] в 1972 году, а оценки нормы $\||A|T-T|B|\|$ в классах Шаттена Е. В. Дэвисом в [13]). Кроме того, упомянем функции $f$, равные постоянной вне некоторого интервала $[\alpha, \beta]$, например,

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [\alpha, \beta] \\ \alpha & t \leqslant \alpha \\ \beta & t \geqslant \beta \end{cases}$$

Функции такого типа используются при изучении неограниченного самосопряженного оператора $A$ и ограниченного возмущения $T = B - A$. Новое унифицированное доказательство из §3 позволяет улучшить оценки для конкретных функций, а также показывает, что происходит с нормой оператора $AT - TB$ при изменении спектра у операторов $A$ и $B$ на каком-нибудь участке вещественной оси (например, при отождествлении), обычно осуществляемом с помощью функций из класса Липшица указанного выше вида (см. основную лемму, доказательство теоремы 5, а также следствия из них).

Заключительный §4 посвящен замечаниям, уточнениям и дополнениям, где, в частности, мы приводим формулу производной по Фреше, в случае, когда основной оператор $A$ имеет конечный спектр.

Завершая введение, мы приведем сводку основных оценок двойных операторных интегралов и, тем самым, разностей $f(A) - f(B)$, $f(A)T - Tf(B)$ и т.п. Не все они принадлежат автору, например, 1а и 1б были известны ранее.

Пусть $\varphi(\lambda, \mu)$ ограниченная, измеримая по мерам $E_\lambda$, $F_\mu$ функция и $|\varphi(\lambda, \mu)| \leqslant M$. Тогда

1. Оператор $\Phi = \iint \varphi(\lambda, \mu) dE_\lambda T dF_\mu$ существует как предел интегральных сумм по крайней мере в одном из следующих трех случаев:

а) $T$ – оператор Гильберта–Шмидта. В этом случае $\Phi$ также является оператором Гильберта–Шмидта и его абсолютная норма удовлетворяет неравенству $\|\Phi\|_2 \leqslant M\|T\|_2$.

б) $A, T, B$ – самосопряженные перестановочные между собой операторы, при этом $\|\Phi\| \leqslant M\|T\|$

в) либо $A$, либо $B$ имеет конечный спектр. Если этот спектр состоит из $m$ точек, то $\|\Phi\| \leqslant M\sqrt{m}\|T\|$.

2. Если $A$ (или $B$) имеет не более $m$ точек спектра, то

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant [f](\log m + 2)^2 \, \|AT - TB\|$$

3. Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^m$ – разбиение интервала $[a, b]$, содержащего внутри себя спектры обоих операторов $A$ и $B$; $\delta$ – ранг разбиения

(точные определения разбиения и ранга разбиения см. ниже). Тогда существует оператор $A_1$ такой, что $\|A - A_1\| \leqslant \frac{\delta}{2}$, $A_1$ имеет не более $m$ точек спектра и

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant [f]\|A - A_1\|\,\|T\| + \|\iint (f(\lambda) - f(\mu))dE_\lambda^{A_1} T dF_\mu\|$$

4. Из п.п. 2 и 3 (а также п.2 и 1в) можно получить нелинейные оценки операторной нормы, в частности,

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant 2[f]\left(\log\left(\frac{(b-a)\|T\|}{\|AT - TB\|} + 1\right) + 2\right)^2 \|AT - TB\|$$

при условии, что спектр оператора $A$ лежит в $[a, b]$, причем $\|AT - TB\| \leqslant (b-a)\|T\|$.

5. Условие конечности спектра оператора $A$ является необходимым и достаточным для выполнения неравенства (при данном операторе $A$ и произвольном самосопряженном операторе $T$): $(\varepsilon > 0)$

$$\|f(A + \varepsilon T) - f(A)\| \leqslant C\varepsilon\|T\|$$

Необходимость конечности спектра доказана в [2]. Отметим в этой связи конструкцию п.2 §4, которая показывает, что при фиксированном $T$ и любой кусочно линейной функции $f$, $[f] \leqslant 1$ всего с одним изломом на графике можно подобрать оператор $A$ таким образом, что левая часть последнего неравенства будет "велика" по сравнения с правой.

6. В п.1 §4 мы приводим формулу производной по Фреше в конечномерном пространстве в случае, если $f \in C^1$, а оператор $A$ имеет различные собственные числа. Тогда самосопряженный оператор $T$ можно представить в виде $T = K + AX - XA$, где $K$ – оператор, коммутирующий с $A$, и в этом случае производная по Фреше вычисляется по формуле

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(A + \varepsilon T) - f(A)}{\varepsilon} = f'(A)K + f(A)X - Xf(A)$$

где $f'$ – производная $f$. Аналогичная формула имеет место в гильбертовом пространстве в случае, когда оператор $A$ имеет конечный спектр.

*Для большей полноты перечислим еще несколько известных результатов.*

7. М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяком [9] было показано, что если $f' \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ при некотором $\alpha > 0$, то

$$\|f(A) - f(B)\| \leqslant C[f]_\alpha \|A - B\|.$$

Этот результат был улучшен В. В. Пеллером [8]. Вообще, в фундаментальных работах по оценкам двойных операторных интегралов [9–11], а также в [8] большое внимание уделено рассмотрению вполне непрерывного оператора $T = B - A$, а также оценкам $f(B) - f(A)$ в классах Шаттена $\gamma_p$, при этом особое внимание уделялось классу ядерных операторов $\gamma_1$, так как эти вопросы связаны с формулой следов Крейна.

8. Если $f$ такова, что при достаточно больших $t$ ее производная $f'(t)$ (или ее константа Липшица) убывает таким образом, что $|f'(t)| \leqslant \frac{M}{\log^3 t}$, и если $A, B$ неограниченные самосопряженные операторы при ограниченном возмущении $T = B - A$, то для нормы $\|f(A) - f(B)\|$ можно написать нелинейную оценку, аналогичную (1) с более сложными постоянными и где вместо $b - a$ стоит 1 (см. подробности в [4]).

9. С помощью нормы Канторовича–Рубинштейна и расстояния, введенного на вещественной оси по формуле $\rho(t, t') = |t - t'|^\alpha$, где $0 < \alpha \leqslant 1$ можно получить нелинейные оценки $\|f(A) - f(B)\|$ через норму $\|A - B\|^\alpha$ для функции $f \in \operatorname{Lip}\alpha$ (см. [6]).

В заключение этого введения автор хочет поблагодарить С. В. Кислякова за ценные обсуждения, сделанные при подготовке этой статьи.

## § 1. Двойные операторные интегралы

Начнем с эвристических рассуждений (здесь и далее считаем, что если не указаны пределы интегрирования, то областью интегрирования является вся вещественная ось). Имеем

$$A = \int \lambda\, dE_\lambda \quad \text{и} \quad f(A) = \int f(\lambda) dE_\lambda.$$

Так как единичный оператор $I$ можно представить в виде $I = \int dF_\mu$, то $f(A) = \iint f(\lambda) dE_\lambda dF_\mu$ и $f(B) = \iint f(\mu) dE_\lambda dF_\mu$. Тогда

$$f(A) - f(B) = \iint [f(\lambda) - f(\mu)] dE_\lambda dF_\mu \tag{2}$$

Так как разложение единицы $E_\lambda$ перестановочно с $A$ и при этом $A\, dE_\lambda = d\, E_\lambda A = \lambda\, dE_\lambda$, то, умножая и деля в (2) на $\lambda - \mu$, получим

$$f(A) - f(B) = \iint \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} dE_\lambda (A - B) dF_\mu. \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем будем считать, что отношение двух функций (если оно ограничено) равно нулю там, где числитель равен нулю.

Далее, если $T$ – ограниченный оператор в $H$ (не обязательно самосопряженный), то аналогично предыдущему можно "получить" формулы

$$f(A)T - Tf(B) = \iint [f(\lambda) - f(\mu)] dE_\lambda T dF_\mu \quad \text{и}$$

$$f(A)T - Tf(B) = \iint \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} dE_\lambda (AT - TB) dF_\mu.$$

В самом общем виде для ограниченной функции $h(\lambda, \mu)$ можно записать следующий двойной интеграл

$$\Phi = \iint h(\lambda, \mu) dE_\lambda T dF_\mu. \tag{4}$$

Разумеется, в бесконечномерном пространстве смысл двух предыдущих формул (особенно, формулы (4)) требует уточнений. Однако, в конечномерном пространстве формула (4) имеет понятный смысл. В самом деле, пусть $\{\varphi_i\}$ – собственные векторы оператора $A$ с собственными числами $\{\lambda_i\}$, а $\{\psi_j\}$ – собственные векторы $B$ с собственными числами $\{\mu_j\}$. Тогда оператор $T$ можно определить с помощью билинейной формы

$$(Tx, y) = \sum\sum x_i \bar{y}_j t_{ij},$$

где $x_i = (x, \varphi_i)$, $y_j = (y_j, \psi_j)$ и $t_{ij} = (T\varphi_i, \psi_j)$. В этом случае формула (4) естественно интерпретируется следующим образом:

$$(\Phi x, y) = \sum\sum \varphi(\lambda_i, \mu_j) x_i \bar{y}_j t_{ij},$$

при этом $\Phi$ – ограниченный оператор. Если $T = I$, а основное пространство конечномерно, то $\Phi$ можно считать "функцией" операторов $A$ и $B$, то есть $\Phi = \varphi(A, B)$ (впрочем, может быть, более естественно положить $\varphi(A, B) = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi^*)$).

Отметим также, что если оператор $A - B$ "мал", а собственные числа основного оператора $A$ различны, то можно написать приближенное равенство

$$\Phi(x, y) \cong \sum\sum \varphi(\lambda_i, \lambda_j) x_i \bar{y}_j (T\varphi_i, \varphi_j). \tag{5}$$

(Считаем, что функция $\varphi$ непрерывна). Таким образом, в базисе собственных векторов оператора $A$ матрица оператора $\Phi$ приближенно равна $\{\varphi(\lambda_i, \lambda_j) t_{ij}\}$. Равенство (5) верно с точностью до бесконечно малых второго порядка. Заметим, что эта точность зависит от размерности пространства $n$ и от $\max\limits_{i \neq j} \frac{1}{|\lambda_j - \lambda_i|}$. Для формулы (5) можно написать достаточно точные оценки погрешности.

Случаи, когда формуле (4) удается придать смысл в бесконечномерной ситуации, будут обсуждаться в §2. Сейчас мы приведем еще несколько эвристических формул.

Если считать $A-B$ "малым" оператором, то можно получить дополнительные члены разложения [3]. Более подробно, следуя работе [12] – первоисточнику, где впервые появились двойные операторные интегралы, – положим $B-A=\varepsilon T$. Тогда формулу (3) можно переписать в виде

$$f(A+\varepsilon T)=f(A)+\varepsilon\iint\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}dE_\lambda T dF_\mu.$$

Заменив в последней формуле $F_\mu$ на $E_\mu$ и добавив соответствующую "невязку", мы получим с помощью манипуляций, подобных приведенным в начале параграфа:

$$f(A+\varepsilon T)=f(A)+\varepsilon\iint\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}\,dE_\lambda T dE_\mu+$$
$$+\varepsilon^2\iiint\frac{\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}-\frac{f(\lambda)-f(\nu)}{\lambda-\nu}}{\nu-\mu}\,dE_\lambda T dE_\nu T dF_\mu,$$

см. [12]. Продолжая аналогичным образом, придем как и в [12] к следующей формуле

$$\begin{aligned} f(A+\varepsilon T)=f(A)+\varepsilon\iint\bar{\nabla} f dE_{\lambda_1} T dE_{\lambda_2}+\\ +\varepsilon^2\iiint\bar{\nabla}^2 f dE_{\lambda_1} T dE_{\lambda_2} T dE_{\lambda_3}+\ldots+\\ +\varepsilon^n\iint\ldots\int\bar{\nabla}^n f dE_{\lambda_1} T dE_{\lambda_2} T\ldots T dE_{\lambda_n}+\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

где $\bar{\nabla}^k f$ – $k$-я разделенная разность функции $f$. В представлении (6) не участвует спектральная мера $F_\mu$. Однако на любом шаге можно написать точное равенство, если учитывать $K$ слагаемых и в последнем $k$-кратном интеграле вместе последней меры $E_{\lambda_k}$ записать меру $F_{\lambda_k}$. Заметим, что аналогичное разложение можно написать применительно и к $f(A)T-Tf(B)$, если считать малым оператор $AT-TB$. Далее, можно написать еще и формулу

$$f(A)T-Tf(B)=\iint\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{g(\lambda)-g(\mu)}\,dE_\lambda(g(A)T-Tg(B))dF_\mu$$

($g\in C^1$, $g'\neq 0$). Разумеется, полезность всех этих выражений определяется тем, удается ли придать смысл участвующим в них кратным операторным интегралам и допускают ли эти интегралы разумные оценки.

## § 2. "Грубые" оценки двойных операторных интегралов.

В дальнейшем будем считать, что $[a,b]$ – интервал, содержащий спектр обоих операторов $A$ и $B$, $\pi$ – основной прямоугольник $[a,b]\times[a,b]$. Мы будем обозначать также через $\{\Delta_i\}$ – разбиение интервала $[a,b]$ "по $\lambda$", то есть такой набор полуоткрытых интервалов $[\lambda_{i-1},\lambda_i[$, что $\lambda_0 = a < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b$. Аналогичное разбиение интервала $[a,b]$ "по $\mu$" будем обозначать через $\{\nabla_j\}$. Далее, при фиксированных элементах $x,y\in H$ будем обозначать $\varphi_i = \frac{E(\Delta_i)x}{\|E(\Delta_i)x\|}$ и $\varphi_i = 0$, если числитель равен нулю, аналогично вводятся векторы $\psi_j = \frac{F(\nabla_j)y}{\|F(\nabla_j)y\|}$. Таким образом, ненулевые векторы $\varphi_i$ и $\psi_j$ образуют две ортонормальные системы. Термином "прямоугольник" будем называть "полуоткрытый" прямоугольник, равный декартову произведению $\Delta\times\nabla$, где $\Delta$ и $\nabla$ – два полуоткрытых интервала, лежащих на $[a,b]$.

Любой оператор $T$ можно "разложить" по системе проекторов $E_\lambda$ и $F_\mu$, то есть представить $T$ в виде

$$T = \iint\limits_{\pi} dE_\lambda T dF_\mu \stackrel{\text{def}}{=} E([a,b])TF([a,b]).$$

Подобный интеграл можно определить для любого прямоугольника $\Pi = \Delta\times\nabla$:

$$\iint\limits_{\Pi} dE_\lambda T dF_\mu \stackrel{\text{def}}{=} E(\Delta)TF(\nabla). \tag{7}$$

Для интеграла из (7) естественно использовать еще и обозначение $\iint \chi(\Pi)dE_\lambda TdF_\mu$, где $\chi(\Pi)$ – характеристическая функция прямоугольника $\Pi$. Наш основной вопрос – можно ли придать смысл интегралу $\iint\limits_D dE_\lambda TdF_\mu$, где $D$ – "кривая" область или, в общем случае, интегралу $\iint\limits_{\pi} h(\lambda,\mu)dE_\lambda TdF_\mu$. (При $T = I$ это означает придание смысла оператору $h(A,B)$, где $A,B$ не перестановочные операторы). Вообще говоря, интегралы такого рода расходятся (даже слабо, что фактически было установлено в [14]).

Заметим также, что если $x,y\in H$ и функция $g(\lambda,\mu) = (E_\lambda TF_\mu y, x)$ является функцией ограниченной вариации, а функция $h(\lambda,\mu)$ измерима по мере (заряду), определяемой функцией $g(\lambda,\mu)$, и $h$ ограничена в прямоугольнике $\pi$, то $\iint h(\lambda,\mu)d^2\psi(\lambda,\mu)$ существует, является пределом интегральных сумм Лебега–Стилтьеса и

$$\left\|\iint h(\lambda,\mu)(dE_\lambda TdF_\mu y,x)\right\| \leqslant M\operatorname{Var} g(\lambda,\mu)$$

где $M = \sup |h(\lambda, \mu)|$.

(В дальнейшем считаем, что функция $h(\lambda, \mu)$ удовлетворяет вышеприведенным условиям). Если же $\mathrm{Var}(E_\lambda T F_\mu y, x)$ равномерно ограничена для всех $x, y$ таких, что $\|x\|$, $\|y\|$ не превосходит единицы, то, очевидно, "билинейная форма" $\iint h(\lambda, \mu)(dE_\lambda T dF_\mu y, x)$ определяет ограниченный линейный оператор $\Phi$ в $H$ и

$$\|\Phi\| \leqslant M \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} \mathrm{Var}(E_\lambda T F_\mu y, x). \tag{8}$$

Рассмотрим основные случаи выполнения неравенства (8).

Напомним, что оператор $T$ является оператором Гильберта–Шмидта, если для любых двух ортонормальных базисов $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_j\}$ в $H$ величина (норма Гильберта–Шмидта или абсолютная норма)

$$N(T) = \sqrt{\sum_{i,j} |(T\psi_j, \varphi_i)|^2}$$

конечна. Напомним также, что $N(T)$ не зависит от выбора базисов и оператор Гильберта–Шмидта является вполне непрерывным и сумма квадратов его $s$-чисел (т.е. собственных чисел оператора $\sqrt{T^*T}$) существует и равна $N^2(T)$.

**Теорема 1 (М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк).** *Если $T$ – оператор Гильберта–Шмидта, то оператор $\Phi$ определен, является оператором Гильберта–Шмидта и $N(\Phi) \leqslant MN(T)$, где $M = \sup |h(\lambda, \mu)|$.*

Эта теорема в более общем виде доказана в [9]. Проверим (ввиду простоты), что оператор $\Phi$ корректно определен. В соответствии с обозначениями, введенными в начале параграфа, оценим следующее выражение при $x, y \in H$: $(x_i = (x, \varphi_i),\ y_j = (y, \psi_j))$

$$L = \sum_i \sum_j \left|(E(\Delta_i) T F(\nabla_j) y, x)\right| = \sum_i \sum_j \left|\bar{x}_i y_j (T\psi_j, \varphi_i)\right|.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$L \leqslant \sqrt{\sum_i \sum_j |(T\psi_j, \phi_i)|^2} \sqrt{\sum_i \sum_j |x_i y_j|^2} \leqslant N(T)\|x\|\,\|y\|.$$

Таким образом, $L$, а значит, и вариация $g(\lambda, \mu) = (E_\lambda T F_\mu y, x)$, оцениваются величиной $N(T)\|x\|\,\|y\|$. Следовательно, оператор $\Phi$ определен и ограничен в $H$.

Однако с точки зрения определения функции от двух самосопряженных операторов эта теорема бесполезна, так как $T = I$ не является даже вполне непрерывным оператором.

Следующая теорема хорошо известна.

**Теорема 2.** *Если $A, B, T$ – три самосопряженных перестановочных между собой оператора, то оператор $\Phi$ определен, ограничен, $\|\Phi\| \leqslant M\|T\|$ и, кроме того, $\Phi = h(A, B)T$.*

Доказательство этой теоремы очевидно, так как из условия перестановочности операторов следует перестановочность $E_\lambda, F_\mu$ и $T$ (см., например, [15]). Тогда, если $x, y \in H$, то ненулевые элементы

$$g_{ij} = \frac{E(\Delta_i)F(\nabla_j)x}{\|E(\Delta_i)F(\nabla_j)x\|} = \frac{F(\nabla_j)E(\Delta_i)x}{\|F(\nabla_j)E(\Delta_i)x\|}$$

образуют ортонормальную систему. Поэтому вектор $x$ можно разложить по $g_{ij}$, т.е. $x = \sum c_{ij}g_{ij}$ и $\sum |c_{ij}|^2 = \|x\|^2$. Следовательно,

$$L = \sum_i \sum_j \big|(E(\Delta_i)TF(\nabla_j)y, x)\big| = \sum_{i,j} \big|(Ty, E(\Delta_i)F(\nabla_j)x)\big| =$$
$$= \sum |c_{ij}|\,|(Ty, g_{ij})|.$$

После применения неравенства Коши–Буняковского отсюда следует, что $L \leqslant \|T\|\,\|y\|\,\|x\|$, откуда, в свою очередь, и получается утверждение теоремы. Равенство $\Phi = h(A, B)T$ вполне очевидно после представления двойного операторного интеграла как повторного.

При $T = I$ мы получаем хорошо известный факт, что для перестановочных самосопряженных операторов можно определить $h(A, B)$, причем $\|h(A, B)\| \leqslant M$.

Наконец, рассмотрим самый важный для нас случай.

**Теорема 3.** *Пусть хотя бы один из операторов $A$ и $B$ имеет конечный спектр, состоящий из $m$ точек. Тогда оператор $\Phi$ определен, ограничен и*

$$\|\Phi\| \leqslant M\sqrt{m}\,\|T\|. \tag{9}$$

**Доказательство.** Пусть, для определенности, спектр оператора $A$ состоит из $m$ точек $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$. Пусть имеются 2 разбиения $\{\Delta_i\}$ и $\{\nabla_j\}$. Тогда по условию число не равных нулю проекторов $E(\Delta_i)$ не превышает $m$. (Считаем, что равно $m$). Введем, как и раньше, системы $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_j\}$. При этом для $x, y \in H$ считаем, что $x = \sum\limits_i x_i\varphi_i$ и $y = \sum\limits_j y_j\psi_j$. Оценим следующее выражение

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_j |(E(\Delta_i)TF(\nabla_j)y, x)| = \sum_{i=1}^m \sum_j |x_i|\,|y_j|\,|(T\psi_j, \varphi_i)| =$$
$$= \sum_{i=1}^m |x_i| \sum_j |y_j|\,|(\psi_j, T^*\varphi_i)|.$$

Так как система $\{\psi_j\}$ ортонормальна, то

$$L \leqslant \sum_{i=1}^{m} |x_i| \, \|y\| \cdot \|T\| \leqslant \sqrt{m}\|T\| \, \|x\| \, \|y\|,$$

и теорема доказана.

**Следствие.** *Если оператор $A$ имеет конечное число точек спектра, то определен ограниченный оператор $h_1(A,B) = = \sum\limits_{i=1}^{m} E(\Delta_i)h_1(\lambda_i, B)$, при этом $\|h_1(A,B)\| \leqslant \sqrt{m}\sup|h(\lambda,\mu)|$. Заметим, что сопряженный к оператору $h_1(A,B)$ оператор определяется формулой*

$$h_1^*(A,B) = \sum_{i=1}^{m} h_1(\lambda_i, B)E(\Delta_i).$$

Как нам кажется, оба этих оператора $h_1$, $h_1^*$, а также их среднее арифметическое являются естественными кандидатами на роль функции от двух не перестановочных самосопряженных операторов.

Разумеется, эти три случая не единственные, когда можно придать смысл двойному операторному интегралу. Например, если $h(\lambda,\mu) = h_1(\lambda) + h_2(\mu)$ или $h(\lambda,\mu) = h_1(\lambda)h_2(\mu)$, то для любого прямоугольника $\Pi = \Delta \times \nabla$ интеграл $\iint h(\lambda,\mu)dE_\lambda T dF_\mu$ определен во всяком случае как повторный. (В первом случае этот интеграл равен $E(\Delta)h_1(A)T + Th_2(B)F(\nabla)$, во втором – $E(\Delta)h_1(A)Th_2(B)F(\nabla)$).

**Теорема 4.** *Пусть имеется разбиение $\{\Delta_i\}_{i=1}^m$, $\Delta_i = [\lambda_{i-1}, \lambda_i[$, ранг которого $\delta = \max|\lambda_i - \lambda_{i-1}| > 0$. Пусть $\theta_i = \frac{\lambda_i + \lambda_{i-1}}{2}$ середина интервала $\Delta_i$. Введем кусочно постоянную функцию $\theta(t)$, такую, что $\theta(t) = \theta_i$ при $t \in \Delta_i$ ($\theta$ непрерывна справа). Тогда оператор $A_1 = \theta(A)$ обладает следующими свойствами:*

1) *$A_1$ перестановочен с $A$.*

2) *$A_1$ имеет конечный спектр $\{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$.*

3) $\|A - A_1\| \leqslant \frac{\delta}{2}$.

4) *Если интервал $\Delta'$ содержит одну из точек $\theta_i$, то $E^{A_1}(\Delta') = E^A(\Delta_i)$.*

**Доказательство.** 1, 2 очевидно. Свойство 3 следует из того, что $A - A_1 = h(A)$, где $h(t) = t - \theta(t)$. И значит при $t \in \Delta_i$ $h(t) = t - \theta_i$, т.е. $|h(t)| \leqslant \frac{\delta}{2}$, и $\|A - A_1\| \leqslant \frac{\delta}{2}$. Свойство 4 следует из равенства $A_1 = \sum\limits_i \theta_i E(\Delta_i)$.

Приведем следствия из теорем 3 и 4.

**Следствие 1.** *Пусть имеется разбиение* $\{\Delta_i\}_{i=1}^m$, *ранг которого равен* $\delta > 0$, *и пусть функция* $f$ *удовлетворяет условию* $[f] \leqslant 1$. *Если* $A_1$ *– оператор, построенный в теореме 4, то*

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant \frac{\delta}{2}\|T\| + \left\| \iint \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu}\, dE_\lambda^{A_1}(AT - TB)dF_\mu \right\| \tag{10}$$

*и значит*

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant \frac{\delta}{2}\|T\| + \sqrt{m}\left(\|AT - TB\| + \frac{\delta}{2}\|T\|\right), \tag{11}$$

*при этом определение двойного операторного интеграла справа в* (10) *имеет смысл.*

**Доказательство.** Очевидно, что

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant \|f(A) - f(A_1)\|\, \|T\| + \|f(A_1)T - Tf(B)\|.$$

Так как

$$f(A) - f(A_1) = \iint \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} dE_\lambda^A (A - A_1) dE_\lambda^{A_1}$$

и $A$ и $A_1$ перестановочны, то, по теореме 2, $\|f(A) - f(A_1)\| \leqslant \|A - A_1\| \leqslant \frac{\delta}{2}$.

Доказательство следствия завершается применением теоремы 3 и неравенства $\|A_1T - TB\| \leqslant \|AT - TB\| + \frac{\delta}{2}\|T\|$.

**Следствие 2.** (*"Грубая" оценка для* $\|f(A)T - Tf(B)\|$). *Если* $(b - a)\|T\| \geqslant \|AT - TB\|$, *то*

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant 2\sqrt{2}\sqrt{b-a}\,\sqrt{\|T\|}\sqrt{\|AT - TB\|}[f]. \tag{12}$$

**Доказательство.** Если разделить интервал $[a, b]$ на равные части с длинами $\delta \leqslant \frac{\|AT - TB\|}{\|T\|}$, то число точек разбиения $m$ удовлетворяет неравенству

$$m \leqslant \frac{(b-a)\|T\|}{\|AT - TB\|} + 1 \leqslant \frac{2(b-a)\|T\|}{\|AT - TB\|}, \qquad \frac{\sqrt{m}+1}{2} \leqslant \sqrt{m}.$$

Тогда из (11) следует оценка (12).

Представляется, что грубая оценка (12) может быть достаточной во многих конкретных случаях, однако нам кажется полезным понимание взаимосвязи структуры операторов $f(A)T - Tf(B)$ и $AT - TB$, которое обеспечивается новым доказательством более точной (по порядку) оценки в §3.

## § 3. Уточненная оценка величины $\|f(A)T - Tf(B)\|$

Будем называть фигуру (5) на плоскости ступенчатой, если она является объединением конечного числа прямоугольников. Считаем фигуру монотонно ступенчатой, если она является криволинейной трапецией, заданной условиями $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$ и $c \leqslant \mu \leqslant \varphi$, где $\varphi(\lambda)$ – ступенчатая функция (кусочно постоянная, монотонная, непрерывная справа функция, принимающая конечное число значений, которое будем называть числом ступеней). Далее, ступенчатую фигуру будем называть диагонализированным набором прямоугольников, если проекции любых двух составляющих прямоугольников на любую ось попарно не пересекаются. Очевидно, что интегралы $\iint dE_\lambda T dF_\mu$ определены на ступенчатых фигурах. Если $D$ – диагонализированный набор прямоугольников, то

$$\|\iint_D dE_\lambda T dF_\mu\| \leqslant \|T\|. \tag{13}$$

В самом деле, перенумеруем прямоугольники, входящие в $D$: $\Pi_i = \Delta_i \times \nabla_i$. Тогда

$$\left|\iint_D (dE_\lambda T dF_\mu y, x)\right| \leqslant \|T\| \sum_i \|F(\nabla_i)y\| \cdot \|E(\Delta_i)x\|.$$

Так как $\{\Delta_i\}$ (и $\{\nabla_j\}$) не пересекаются между собой, то (13) очевидно.

**Лемма 1.** *Если монотонно ступенчатая фигура $D$ имеет $r$ ступеней, то*

$$\|\iint_D dE_\lambda T dF_\mu\| \leqslant (\log 2r)\|T\| \tag{14}$$

*(все логарифмы здесь и далее берутся по основанию два).*

**Доказательство.** Заметим, что если $2^{k-1} \leqslant r \leqslant 2^k - 1$, то $D$ можно разбить на $k$ диагонализированных наборов прямоугольников. (см. Рис. 1). Поэтому $k \leqslant \log r + 1 = \log(2r)$ и из неравенства (13) следует доказываемое утверждение.

Следующая лемма является самой трудной в техническом отношении. Она показывает механизм образования монотонно ступенчатых фигур и в какой-то мере проясняет, как изменение спектра на одном участке влияет на другие участки. Эта лемма была подробно доказана в [1]; мы приведем (несколько сокращенное) доказательство ввиду важности этого результата.

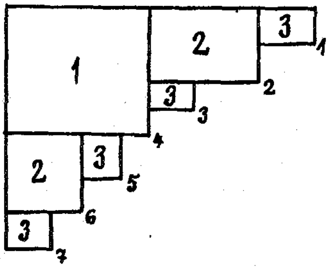

Рис. 1. $r = 7$. Число семейств (они указаны цифрами) равно 3.

**Техническая лемма.** *Предположим, что* $1 \leqslant r < q \leqslant n$ *и пусть* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ *и* $d_{ij}$ *– вещественные числа. Обозначим*

$$Q = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=q}^{n} \frac{\lambda_{r+1} - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} d_{ij}$$

*и пусть выполнено условие*

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=q}^{n} \frac{d_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i} \geqslant 0. \tag{15}$$

*Тогда существует такая последовательность чисел* $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_r \geqslant q$, *что*

$$Q \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=q}^{l_i} d_{ij}$$

**Доказательство.** Введем обозначения

$$Y_i^k = \sum_{j=k}^{n} \frac{d_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i} \quad \text{и} \quad Z_j = \sum_{i=1}^{r} \frac{d_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Рассмотрим выражения $\sum\limits_{j=t}^{n} Z_j = M_t$. При $t = q$ по условию (15) $M_t \geqslant 0$. Будем увеличивать $t$ до тех пор, пока $M_t$ не станет отрицательным. Если все $M_t \geqslant 0$, то полагаем $k - 1 = n$. Считаем $k$ таким, что

$$\sum_{j=k-1}^{n} Z_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=k}^{n} Z_j < 0 \tag{16}$$

Заметим, что $k-1 \geqslant q$. Число $k-1$ является вертикальной границей образуемой первой (нижней) ступени. (Если $k - 1 = n$, то вместо

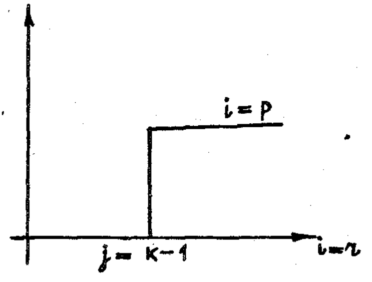


Рис. 2.

ступени получится прямоугольник). Тогда при любом $t$ таком, что $q \leqslant t \leqslant k-1$, верно неравенство

$$\sum_{j=t}^{k-1} Z_j = \sum_{j=t}^{n} Z_j - \sum_{j=k}^{n} Z_j \geqslant 0. \tag{17}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
Q_1 = \sum_{j=q}^{k-1} Z_j(\lambda_j - \lambda_{r+1}) = \sum_{j=q}^{k-1} Z_j(\lambda_j - \lambda_q + \lambda_q - \lambda_{r+1}) = \\
= \sum_{j=q}^{k-1} Z_j(\lambda_j - \lambda_q) + \sum_{j=q}^{k-1} Z_j(\lambda_q - \lambda_{r+1}) = \\
= \sum_{j=q}^{k-1} Z_j \left( \sum_{t=q+1}^{j} (\lambda_t - \lambda_{t-1}) \right) + \sum_{j=q}^{k-1} Z_j(\lambda_q - \lambda_{r+1}) = \\
= \sum_{t=q+1}^{k-1} \left( \sum_{j=t}^{k-1} Z_j \right) (\lambda_t - \lambda_{t-1}) + \sum_{j=q}^{k-1} Z_j(\lambda_q - \lambda_{r+1}) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Добавляя $Q_1$ к $Q$, получим

$$\begin{aligned}
Q \leqslant Q + Q_1 = \\
= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=q}^{n} \frac{d_{ij}(\lambda_{r+1} - \lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i} + \sum_{j=q}^{k-1} \sum_{i=1}^{r} \frac{d_{ij}(\lambda_j - \lambda_{r+1})}{\lambda_j - \lambda_i} = \\
= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=q}^{k-1} d_{ij} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=k}^{n} \frac{d_{ij}(\lambda_{r+1} - \lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Если $k-1 = n$, то последнее слагаемое отсутствует и лемма доказана при $l_1 = l_2 = \ldots = l_r = n$.

Пусть $k-1 < n$. Теперь нам надо найти горизонтальную границу нижней ступени (см. Рис. 2). Рассмотрим второе слагаемое в (18), которое обозначим через $Q_2$:

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=k}^{n} \frac{d_{ij}(\lambda_{r+1} - \lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{r} Y_i^k (\lambda_{r+1} - \lambda_i).$$

Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{r} Y_i^k = \sum\limits_{j=k}^{n} Z_j < 0$. Найдем наибольшее возможное $p$ такое, что $\sum\limits_{i=1}^{p} Y_i^k > 0$, а при всех $t \geqslant p$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{t} Y_i^k \leqslant 0$. Если такого $p$ нет, то аналогично предыдущему получаем, что $Q_2 \leqslant 0$ (так как $Q_2 = \sum\limits_{t=1}^{r} \left( \sum\limits_{i=1}^{t} Y_i^k \right) (\lambda_{t+1} - \lambda_t) \leqslant 0$). В этом случае можно отбросить второе слагаемое в (18) и лемма верна при $l_1 = l_2 = \ldots = l_r = k-1$.

Итак, пусть $p$ с указанными свойствами существует. Тогда $p < r$ и $\sum\limits_{i=p+1}^{t} Y_i^k = \sum\limits_{i=1}^{t} Y_i^k - \sum\limits_{i=1}^{p} Y_i^k \leqslant 0$ при любом $t$ таком, что $p+1 \leqslant t \leqslant r$. Следовательно,

$$Q_4 = \sum_{i=p+1}^{r} Y_i^k (\lambda_{r+1} - \lambda_i) = \sum_{t=p+1}^{r} \left( \sum_{i=p+1}^{t} Y_i^k \right) (\lambda_{t+1} - \lambda_t) \leqslant 0.$$

Из оценки (18) тогда получаем,

$$Q \leqslant Q + Q_1 - Q_4 \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=q}^{k-1} d_{ij} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=k}^{n} \frac{d_{ij}(\lambda_{r+1} - \lambda_i)}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Второе слагаемое в последнем выражении обозначим $Q_5$. $Q_5$ отличается от $Q$ тем, что здесь уменьшено $r$ до $p$, увеличено $q$ до $k$, а в роли $\lambda_{p+1}$ можно взять $\lambda_{r+1}$. Положим $l_{p+1} = l_{p+2} = \ldots = l_r = k-1$. Доказательство леммы завершается по индукции, а существование чисел $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_p \geqslant k > k-1$, очевидно, следует из применения индукционного предположения к $Q_5$.

**Замечание.** Мы будем применять эту лемму только к суммам, после чего и получаются монотонно ступенчатые фигуры. Однако с помощью теоремы Хэлли можно доказать следующий интегральный аналог этой леммы.

**Лемма 2.** *Пусть $\alpha < \beta < q < d$ и $\phi(\lambda, \mu)$ – функция ограниченной* *вариации. Тогда если*

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{q}^{d}\frac{d^2\phi(\lambda,\mu)}{\mu-\lambda}\geqslant 0,$$

*то для любого числа $p$, лежащего между $\beta$ и $q$, существует такая невозрастающая функция $l(\lambda)$, что*

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{q}^{d}\frac{(p-\lambda)d^2\phi(\lambda,\mu)}{\mu-\lambda}\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}\int_{q}^{l(\lambda)}d^2\phi(\lambda,\mu)=\int_{\alpha}^{\beta}[d\phi(\lambda,l(\lambda))-d\phi(\lambda,q)].$$

Докажем теперь следующее утверждение, которое показывает (говоря несколько упрощенно), как изменение спектра оператора $A$ на одном участке (под влиянием функции $f$) влияет на оценки нормы на других участках. Несколько похожее утверждение было нами доказано в [4] при рассмотрении неограниченных самосопряженных операторов.

Предварительно введем обозначения. Пусть $\Delta_1$ и $\Delta_2$ – разбиение интервала $[a,b]$, содержащего спектры $A$ и $B$. Обозначим $\Pi_{ij}=\Delta_i\times\Delta_j$, $i,j=1,2$. Если $x,y\in H$, то $\|x\|_i=\|\int_{\Delta_i}E_\lambda x\|$ и $\|y\|_j=\|\int_{\Delta_j}dF_\mu y\|$. Положим для ограниченного оператора $T_1$

$$G_{ij}=\iint_{\Pi_{ij}}\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}dE_\lambda T_1 dF_\mu \quad \text{и} \quad G=\iint_{\pi}\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}dE_\lambda T_1 dF_\mu$$

Тогда $G=G_{11}+G_{12}+G_{21}+G_{22}$.

**Основная лемма.** *Пусть $A$ имеет конечный спектр, состоящий из $m$ точек, и пусть $\Delta_1$ содержит $r$, а $\Delta_2$ – $m-r$ этих точек (считаем $1\leqslant r\leqslant m-1$). Пусть $\Delta_1=[a,\alpha[$, а $\Delta_2=[\alpha,b[$ и функция $f$, удовлетворяющая условию Липшица с константой Липшица $[f]\leqslant 1$, равна постоянной на $\Delta_2$. Тогда для $x,y\in H$*

$$|(Gy,x)|\leqslant$$
$$\leqslant\|G_{11}\|\|y\|_1\|x\|_1+\|T_1\|(\log(2r))\|x\|_1\|y\|_2+\log(2(m-r))\|x\|_2\|y\|_1). \tag{19}$$

**Доказательство.** Все $G_{ij}$ имеют смысл по Теореме 3, $G_{11}$ участвует в оценке (19), $G_{22}=0$. Нужно оценить нормы $G_{12}$ и $G_{21}$. Итак, пусть $\lambda\in\Delta_1$, $\mu\in\Delta_2$ и

$$(G_{12}y,x)=\iint_{\Pi_{12}}\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}(dE_\lambda T_1 dF_\mu y,x). \tag{20}$$

Напишем интегральные суммы для этого интеграла, при этом считаем, что число слагаемых по $\lambda$ равно $r$ и соответствует достаточно мелкому разбиению интервала $\Delta_1$ по $\lambda$. Очевидно, что интегральную сумму можно тогда записать в виде

$$Q(y,x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\lambda_i) - f(\alpha)}{\lambda_i - \mu_j} (T_1\psi_j, \varphi_i)\bar{x}_i y_j. \tag{21}$$

Здесь $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r$ – спектр $A$ на $\Delta_1$, а $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n$ – любые числа на $\Delta_2$. Будем оценивать $Q(y,x)$. Сначала мы хотим заменить $f(\lambda_i) - f(\alpha)$ на $\lambda_i - \alpha$. Однако, если непосредственно применить неравенство треугольника, то мы придем к оценке $\sqrt{r}$ (вместо логарифма). Но, оказывается, замену $f(\lambda_i) - f(\alpha)$ на $\lambda_i - \alpha$ все-таки можно сделать за счет рассмотрения вместо чисел $\bar{x}_i$ других чисел $u_i$. Итак, временно обозначим $\alpha = \lambda_{r+1}$ и запишем $Q(y,x)$ в виде

$$Q(y,x) = \sum_{i=1}^{r} [f(\lambda_i) - f(\lambda_{r+1})]\bar{x}_i \sum_{j=1}^{n} \frac{(T_1\psi_j, \varphi_i)}{\lambda_i - \mu_j} y_j.$$

Тогда

$$|Q(y,x)| \leqslant \sum_{i=1}^{r} |\lambda_{r+1} - \lambda_i|\, |\bar{x}_i| \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{(T_1\psi_j, \varphi_i)}{\mu_j - \lambda_i} y_j \right|. \tag{22}$$

Найдем такие числа $u_i$, что $|u_i| = |\bar{x}_i|$ и выражение

$$Y_i = \bar{x}_i \sum_{j=1}^{n} \frac{(T_1\psi_j, \varphi_i) y_j}{\mu_j - \lambda_i}$$

стало бы положительным (при замене $\bar{x}_i$ на $u_i$), сохранив свой модуль (можно взять, например, $u_i = \bar{x}_i e^{-i\alpha}$, где $\alpha = \arg Y_i$), при этом $\sqrt{|u_1|^2 + \ldots + |u_r|^2} \leqslant \|x\|_1$. Тогда в выражении (22) можно удалить модули (при замене $\bar{x}_i$ на $u_i$) и мы получим

$$|Q(y,x)| \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{r+1} - \lambda_i}{\mu_j - \lambda_i} (T_1\psi_j, \varphi_i) u_i y_j$$

Выражение справа вещественно и положительно, поэтому можно считать его суммой своих вещественных частей. Обозначим $d_{ij} = \mathrm{Re}[(T_1\psi_j, \varphi_i) u_i y_j]$. Тогда

$$|Q(y,x)| \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{r+1} - \lambda_i}{\mu_j - \lambda_i} d_{ij} \tag{23}$$

Далее, величина $\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{d_{ij}}{\mu_j-\lambda_i}$ является положительной (это следует из определения чисел $u_i$). Тогда с точностью до обозначений правая часть выражения (23) удовлетворяет технической лемме, и поэтому найдутся числа $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_r$ такие, что

$$|Q(y,x)| \leqslant \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{l_i} d_{ij} = \mathrm{Re}\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{l_i}(T_1\psi_j,\varphi_i)u_i y_j\right].$$

Очевидно, что выражение в квадратных скобках определяет монотонно-ступенчатую фигуру с числом ступеней, не превосходящим $r$ (ясно также, что это число не превосходит и $n$). Тогда применяя Лемму 1 и учитывая, что $|u_1|^2+\ldots+|u_r|^2 \leqslant \|x\|_1^2$, а $|y_1|^2+\ldots+|y_n|^2 \leqslant \|y\|_2^2$, получим $|Q(y,x)| \leqslant (\log 2r)\|x\|_1\|y\|_2$. Аналогичным образом оценивается $(G_{21}y,x)$, для которого число ступеней будет не превосходить $m-r$. Основная лемма доказана.

**Замечание.** Ясно, что основная лемма верна, если $f$ постоянна на левом интервале $\Delta_1$ (а не на $\Delta_2$). Кроме того, условие конечности спектра оператора $A$ на $\Delta_2$ можно заменить условием конечности спектра операторов $A, B$ на $\Delta_1$. Точнее, верно следующее утверждение.

**Следствие.** *Пусть каждый из операторов $A, B$ имеет конечный спектр, состоящий из не более чем $r$ точек на интервале $\Delta_1$. Тогда независимо от характера спектра операторов $A, B$ при $\lambda \geqslant \alpha$ и $\mu \geqslant \alpha$ и при условии, что функция $f(t)$ равна постоянной при $t \geqslant \alpha$, верна оценка*

$$|(Gy,x)| \leqslant |(G_{11}y,x)| + \log(2r)\|T_1\|(\|x\|_1\|y\|_2 + \|x\|_2\|y\|_1). \tag{24}$$

*(Эта оценка верна, даже если операторы $A, B$ неограничены).*

Докажем теперь основную теорему.

**Теорема 5.** *Пусть $A$ имеет конечный спектр, состоящий из $m$ точек: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$, $f$ – функция из класса Липшица с константой $[f] \leqslant 1$, $T_1$ – ограниченный оператор в $H$. Пусть $G_f = \iint \frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}\, dE_\lambda T_1 dF_\mu$. Тогда*

$$\|G_f\| \leqslant (\log m + 2)^2\|T_1\|. \tag{25}$$

**Доказательство.** Положим $r = \frac{m+1}{2}$, если $m$ – нечетно и $r = \frac{m}{2}$, если $m$ четно, и введем две функции:

$$f_1(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda) & \text{при} \quad a \leqslant \lambda \leqslant \lambda_r, \\ f(\lambda_r) & \text{при} \quad \lambda \geqslant \lambda_r, \end{cases}$$

$$f_2(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda_r) & \text{при} \quad a \leqslant \lambda \leqslant \lambda_r, \\ f(\lambda) & \text{при} \quad \lambda \geqslant \lambda_r. \end{cases}$$

Пусть, кроме того, $f_0 = f_1 + f_2$. Так как $f_0 = f + f(\lambda_r)$, то $G_{f_0} = G_f$ и $G_f = G_{f_1} + G_{f_2}$ (все три оператора определены). Будем доказывать теорему по индукции. Теорема очевидна при всех $m$, для которых $\sqrt{m} \leqslant (\log m + 2)^2$, т.е. по крайней мере для всех $m \leqslant 2^{16}$. Пусть оценка (25) верна для числа точек спектра $< m$ и докажем ее для $m$. Целое число $r$ удовлетворяет неравенствам $r \leqslant \frac{m}{2} + 1$ и $m - r \leqslant \frac{m}{2} + 1$. Используя основную лемму для $G_{f_1}$ и $G_{f_2}$, получим

$$\begin{gathered} |(Gy, x)| \leqslant \|G_{f_1}\| \|x\|_1 \|y\|_1 + \|G_{f_2}\| \|x\|_2 \|y\|_2 + \\ +2\log 2\left(\frac{m}{2} + 1\right) \|T_1\| (\|x\|_1 \|y\|_2 + \|x\|_2 \|y\|_1) \leqslant \\ \leqslant [\max(\|G_{f_1}\|, \|G_{f_2}\|) + 2\log(m+2)\|T_1\|] \|x\| \|y\|, \end{gathered}$$

(поскольку $\|x\|_1 \|y\|_1 + \|x\|_2 \|y\|_2 \leqslant \|x\| \|y\|$ и $\|x\|_1 \|y\|_2 + \|x\|_2 \|y\|_1 \leqslant \|x\| \|y\|$). Далее, так как нормы $\|G_{f_1}\|$ и $\|G_{f_2}\|$ оцениваются по индукционному предположению, то получим

$$|(G_f y, x)| \leqslant \left[\left(\log\left(\frac{m}{2} + 1\right) + 2\right)^2 + 2\log(m+2)\right] \|T_1\| \|x\| \|y\|. \quad (26)$$

Выражение в квадратных скобках равно $\log^2(m+2) + 4\log(m+2) + 1$. Очевидно тогда, что при $m \geqslant 18$ и тем более при $m \geqslant 2^{16}$ имеем $\log^2(m+2) + 4\log(m+2) \leqslant \log^2 m + 4\log m + 3$, т.е. выражение в квадратных скобках не превосходит $(\log m + 2)^2$. Теорема доказана.

**Замечание.** Мы в этой теореме, также как и в основной лемме, не требовали, чтобы оператор $T_1$ был равен $AT - TB$. Если существует оператор $X$ такой, что $AX - XB = T_1$, то $G_f = f(A)X - Xf(B)$. Но в общем случае смысл оператора $G_f$ неясен (см. также п.1 §4).

**Следствие 1.** *Если интервал $[a, b]$, содержащий спектр оператора $A$, может быть разбит на $m$ интервалов длины не больше $\delta$, то имеет место оценка, вытекающая из Теоремы* 5 *и формулы* (10):

$$\|f(A)T - Tf(B)\| \leqslant \frac{\delta}{2}\|T\| + (\log m + 2)^2 \left(\|AT - TB\| + \frac{\delta}{2}\|T\|\right). \quad (27)$$

*В предположении, что $(b-a)\|T\| \geqslant \|AT-TB\|$, существует разбиение, у которого $\delta \leqslant \frac{\|AT-TB\|}{\|T\|}$, а $m \leqslant \frac{(b-a)\|T\|}{\|AT-TB\|}+1$. Поэтому*

$$\|f(A)T-Tf(B)\| \leqslant 2\left[\log\left(\frac{(b-a)\|T\|}{\|AT-TB\|}+1\right)+2\right]^2\|AT-TB\|. \qquad (28)$$

*При $T=I$ отсюда получается оценка для $\|f(A)-f(B)\|$, а при $A=B$ - для $\|f(A)T-Tf(A)\|$.*

**Следствие 2.** *Пусть $f(t)=t$ при $t\in[a,\alpha[$ и $f$ постоянна и равна $f(\alpha)$ при $t>\alpha$. Тогда*

$$\|f(A)T-Tf(B)\| \leqslant 2\log\left(\frac{2(b-\alpha)\|T\|}{\|AT-TB\|}+2\right)\|AT-TB\|. \qquad (29)$$

*(Заметим, что аналогичная оценка верна для функции $f$, которая равна $t$ при $t\geqslant\alpha$ и $f(\alpha)$ при $t\leqslant\alpha$, с заменой $b-\alpha$ на $\alpha-a$).*

Докажем оценку (28). Построим оператор $A_1$, который отличается от оператора $A$ тем, что на интервале $[\alpha,b]$ имеет конечное число $m$ точек спектра. Как и в доказательстве Теоремы 4, можно подобрать $A_1$ так, что $\|A-A_1\| \leqslant \frac{\delta}{2}$, $m \leqslant \frac{(b-\alpha)\|T\|}{\|AT-TB\|}+1$ и $\delta \leqslant \frac{\|AT-TB\|}{\|T\|}$. Если применить к оператору $A_1$ оценку (24) и если учесть, что $|(G_{11}y,x)| \leqslant \|A_1T-TB\|\,\|x\|\,\|y\|$, то

$$\|f(A_1)T-Tf(B)\| \leqslant \log(2m)\|A_1T-TB\|+\|A_1T-TB\|.$$

Применяя оценку (10), а также используя оценки для $\delta$ и $m$, мы придем к оценке (29).

**Следствие 3.** *Имеет место следующая оценка*

$$\||A|T-T|B|\| \leqslant 4\left(\log\frac{(b-a)\|T\|}{\|AT-TB\|}+2\right)\|AT-TB\|. \qquad (30)$$

Эта оценка вытекает из того, что функцию $|t|$ можно представить в виде суммы двух функций, каждая из которых удовлетворяет условиям следствия 2.

Заметим, что оценка (30) при $T=I$ совпадает по порядку с оценкой, полученной Т. Като в [7]. Отметим также, что постоянные в (30) можно улучшить.

**Замечание.** Во всех предыдущих оценках должна присутствовать (линейно) константа Липшица функции $f$. В [4] получены оценки для $\|f(A)-f(B)\|$ в случае неограниченного оператора $A$ и ограниченного возмущения за счет того, что константа Липшица (производная) убывает с увеличением $|t|$. Ясно, что аналогичная оценка должна быть выполнена и для $\|f(A)T-Tf(B)\|$ при ограниченном операторе $AT-TB$.

## § 4. Некоторые замечания и дополнения

1. В этом пункте мы выведем формулу для производной по Фреше $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{f(A+\varepsilon T)-f(A)}{\varepsilon}$ в $n$-мерном пространстве при условии, что оператор $A$ имеет различные собственные числа, а $f\in C^1$. Итак, пусть $A$ – диагональная матрица: $A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$, $T=\{t_{ij}\}$ – самосопряженная матрица (т.е. матрица оператора $T$, записанная в базисе собственных векторов $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ оператора $A$). Введем матрицу $X=\{x_{ij}\}$, где $x_{ii}=0$, а $x_{ij}=\frac{t_{ij}}{\lambda_i-\lambda_j}$ при $i\neq j$. Заметим, что матрица $AX-XA$ имеет нулевые диагональные элементы, а ее не диагональные элементы равны $(\lambda_i-\lambda_j)x_{ij}=t_{ij}$ при $i\neq j$. Обозначим также $K=\operatorname{diag}\{t_{11},\dots,t_{nn}\}$, $A_1=A+\varepsilon K$ и $A_2=A+\varepsilon T=A+\varepsilon K+\varepsilon(AX-XA)$. В этих обозначениях $T=K+AX-XA$. Тогда $f(A+\varepsilon T)-f(A)=f(A_2)-f(A_1)+f(A_1)-f(A)$. Рассмотрим сначала матрицу $f(A_1)-f(A)=f(A+\varepsilon K)-f(A)$; $f(A)=\operatorname{diag}\{f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n)\}$, а $f(A+\varepsilon K)=\operatorname{diag}\{f(\lambda_1+\varepsilon t_{11}),\dots,f(\lambda_n+\varepsilon t_{nn})\}$. Тогда, так как $f(\lambda_i+\varepsilon t_{ii})-f(\lambda_i)=f'(\lambda_i)\varepsilon t_{ii}+o(\varepsilon)$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{f(A_1)-f(A)}{\varepsilon}=f'(A)K$.

Рассмотрим теперь выражение $f(A_2)-f(A_1)=f(A+\varepsilon K+\varepsilon(AX-XA))-f(A+\varepsilon K)$. Матрицы $A_1$ и $A_2$ имеют одинаковые диагональные элементы. Поэтому эти матрицы с точностью до $o(\varepsilon)$ имеют одинаковые собственные числа (см., например, [16], с. 275). Следовательно, с той же точностью диагональные элементы матрицы $f(A_2)-f(A_1)$ будут равны 0. С другой стороны, как установлено было в [12], с точностью до $o(\varepsilon)$ $((f(A_2)-f(A_1))\varphi_i,\varphi_j)=f_{ij}=\frac{f(\lambda_i+\varepsilon t_{ii})-f(\lambda_j+\varepsilon t_{jj})}{\lambda_i-\lambda_j+\varepsilon(t_{ii}-t_{jj})}\varepsilon t_{ij}$. Легко видеть, что последнее выражение с точностью до $\varepsilon^2$ совпадает с $\frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}\varepsilon t_{ij}=[f(\lambda_i)-f(\lambda_j)]\varepsilon x_{ij}$ при $i\neq j$. Тогда ясно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{f(A_2)-f(A_1)}{\varepsilon}=\{[f(\lambda_i)-f(\lambda_j)]x_{ij}\}=f(A)X-Xf(A)$. И, значит,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(A+\varepsilon T)-f(A)}{\varepsilon}=f'(A)K+f(A)X-Xf(A). \tag{31}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае оператор $K$ единственен, $X$ же определяется с точностью до диагональных элементов. Матрица $X$ не является самосопряженной, ее элементы удовлетворяют условию $x_{ij}=-\bar{x}_{ji}$. Однако матрицы $AX-XA$ и $f(A)X-Xf(A)$ являются самосопряженными.

Заметим также, что если оператор представлен в виде $T=K+AX-XA$, то эвристические формулы, подобные формулам в §1, приводят нас к следующей цепочке равенств

$$f(A+\varepsilon T)-f(A)=\iint \frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu} dE_\lambda(\varepsilon K+\varepsilon(AX-XA))dF_\mu.$$

Если можно заменить с точностью до $o(\varepsilon)$ проекторы $F_\mu$ на $E_\mu$, то получим

$$\frac{1}{\varepsilon}[f(A+\varepsilon T)-f(A)]=$$
$$=\iint \frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu} dE_\lambda K dE_\mu+\iint \frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu} dE_\lambda(AX-XA)dE_\mu \tag{32}$$

Так как $K$ коммутирует с $A$, а значит и с $E_\lambda$, и так как $dE_\lambda dE_\mu=0$ при $\lambda\neq\mu$ и $\lim\limits_{\mu\to\lambda}\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}=f'(\lambda)$, то первый интеграл в (32) будет равен $\iint f'(\lambda)KdE_\lambda dE_\lambda=f'(A)K$. Второй же интеграл в формуле (32) в точности равен $f(A)X-Xf(A)$. Разумеется, в гильбертовом пространстве все это имеет смысл только если оператор $A$ имеет конечный спектр. В этом случае (об этом автору рассказал проф. T. J. Laffey) представление $T=AX-XA+K$ существует и операторы $X$ и $K$ могут быть найдены в явном виде. Поэтому ясно, что формула (31) будет также верна. Заметим также, что представление $T=AX-XA+K$ используется и в других вопросах теории матриц.

2. Пусть задан оператор $T$ в конечномерном пространстве. В этом пункте для фиксированной "монотонно-ступенчатой вырезки" $B$ определенного вида из матрицы оператора $\varepsilon T$ (см. Рис. 3) мы подберем диагональную матрицу $A$ и кусочно-линейную функцию $f,[f]\leqslant 1$, с единственным изломом на графике, для которых матрица $f(A+\varepsilon T)-f(A)$ близка по норме к $B$. Эта конструкция используется для контрпримеров (некоторые из них обсуждаются ниже). Итак, пусть $A=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$, $\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n$ (значения $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ будут уточнены ниже). Зафиксируем число $r$ и пусть $f(t)=t$ при $t\leqslant\lambda_r$ и $f(t)=\lambda_r$ при $t\geqslant\lambda_r$. Очевидно, $[f]\leqslant 1$. Пусть $T=\{t_{ij}\}$ симметричная вещественная матрица в $n$-мерном пространстве. Будем рассматривать матрицу $\varepsilon T$ как возмущение матрицы $A$. Обозначим $F=\{f_{ij}\}=f(A+\varepsilon T)-f(A)$. По формулам Ю. Л. Далецкого и С. Г. Крейна [12], элементы $f_{ij}$, $i\neq j$, можно вычислить по формуле

$$f_{ij}\approx\frac{f(\lambda_j)-f(\lambda_i)}{\lambda_j-\lambda_i}\varepsilon t_{ij} \tag{33}$$

Погрешность этой формулы имеет порядок $\varepsilon^2$. Образуем монотонно-ступенчатую вырезку в блоке, опирающемся на $r$-ую диагональ, параллельную главной. Такая вырезка определяется последовательностью чисел

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_s \leqslant r < r+1 \leqslant q_s \leqslant q_{s-1} < \ldots < q_1$$

(см. Рис. 3). Заметим, что во всей области $i \leqslant r$, $j \geqslant r+1$ мы имеем

$$f_{ij} \approx \frac{\lambda_r - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \varepsilon t_{ij}. \tag{34}$$

Временно обозначим $p_s = p$ и $q_s = q$. Строим спектр матрицы $A$ (как и при доказательстве технической леммы, начиная с левого нижнего угла). Выбираем $\lambda_r < \lambda_{r+1} < \ldots < \lambda_q$ произвольно. Выберем также достаточно малое число $\delta > 0$. Число $\lambda_p$ берем настолько "далеко" от $\lambda_r$, что $\lambda_p < \lambda_r$ и

$$1 \geqslant \frac{\lambda_r - \lambda_p}{\lambda_q - \lambda_p} > 1 - \frac{\delta}{2} \tag{35}$$

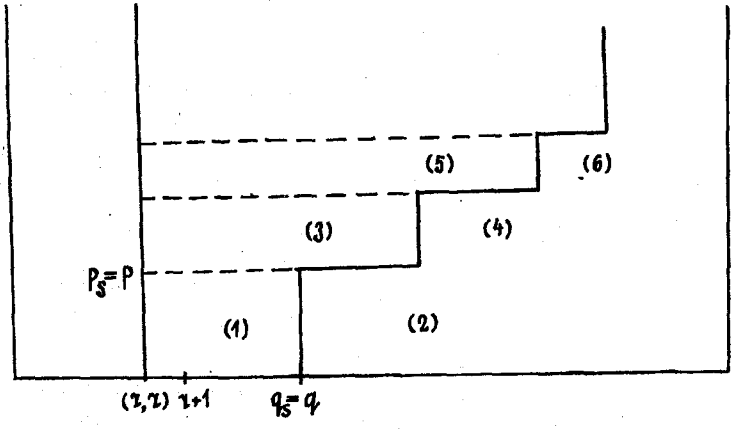


Рис. 3.

Затем выбираем $\lambda_{r-1}$ настолько близко к $\lambda_p$, чтобы

$$1 \geqslant \frac{\lambda_r - \lambda_{r-1}}{\lambda_r - \lambda_p} \geqslant 1 - \frac{\delta}{2}. \tag{36}$$

(Заметим, что если $r-1=p$, то $\lambda_p = \lambda_{r-1}$.) После этого выбираем произвольные числа $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{r-2}$ таким образом, что $\lambda_p < \lambda_{p+1} < \ldots < \lambda_{r-2} < \lambda_{r-1}$. Далее берем $\lambda_{q+1}$ настолько "далеко" от $\lambda_q$, что

$$\frac{\lambda_r - \lambda_p}{\lambda_{q+1} - \lambda_p} < \delta. \tag{37}$$

Тогда, если $(i, j)$ находятся в области (1), т.е. $p+1 \leqslant i \leqslant r$, $r+1 \leqslant j \leqslant q$, то

$$\frac{\lambda_r - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \geqslant \frac{\lambda_r - \lambda_{r-1}}{\lambda_q - \lambda_p} = \frac{\lambda_r - \lambda_{r-1}}{\lambda_r - \lambda_p} \frac{\lambda_r - \lambda_p}{\lambda_q - \lambda_p} \geqslant \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 > 1 - \delta. \quad (38)$$

А для области (2), т.е. для случая $p + 1 \leqslant i < r$, $j \geqslant q$, имеем

$$\frac{\lambda_r - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \leqslant \frac{\lambda_r - \lambda_p}{\lambda_{q+1} - \lambda_i} < \delta. \quad (39)$$

Следовательно, для области индексов (1) получим, что с точностью до $\varepsilon^2$ верно неравенство

$$|f_{ij} - \varepsilon t_{ij}| = \left| \frac{\lambda_r - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \varepsilon t_{ij} - \varepsilon t_{ij} \right| \leqslant \varepsilon\delta |t_{ij}|, \quad (40)$$

а из неравенства (39) для области (2) следует, что

$$|f_{ij}| \leqslant \delta\varepsilon |t_{ij}|. \quad (41)$$

После этого снова возвращаем индексы $p_s = p$, $q_s = q$ и $\lambda_{q_s} < \lambda_{q_s+1} < \ldots < \lambda_{q_{s-1}}$ выбираем произвольно. Полагаем $q_{s-1} = q$ и $p_{s-1} = p$, а в роли $\lambda_r$ берем $\lambda_{p_s}$. Повторяем ту же процедуру. Тогда для области индексов (3) будут выполнены оценки (40), а для области (4) – оценки (41) и так далее. Разумеется, фиксированное число $\varepsilon > 0$ может оказаться слишком большим для выбранного $\delta > 0$. Однако, умножая все собственные числа оператора $A$ на достаточно большое число, мы получим, что левые части оценок (35)–(39) не меняются, а точность, с которой выполняются формулы (34), увеличивается. Поэтому при достаточно большой норме оператора $A$ (или при достаточно малом $\varepsilon > 0$) можно добиться того, что $f_{ij} \approx \varepsilon t_{ij}$ для областей индексов, входящих в выбранную вырезку, а вне ее $f_{ij} \approx 0$, причем точность этих приближенных равенств будет как угодно велика.

**3.** Возьмем в построениях п.2 $r = \frac{n+1}{2}$ (считаем $n$ нечетным). Тогда ясно, что можно "разрезать" матрицу $\varepsilon T$ по побочной диагонали, т.е. добиться того, чтобы при некоторой функции $f$ матрица $f(A+\varepsilon T) - f(A)$ была бы сколь угодно близка к матрице $F = \{f_{ij}\}$, где $f_{ij} = t_{ij}$, $j \leqslant n - i$ и $f_{ij} = 0$ при $j + i > n$. Более того, функция $f$ имеет вид, описанный в п.2. Ясно также, что если в качестве $f$ рассмотреть функции вида $f = |t - \lambda_r|$, то $f(A + \varepsilon T) - f(A)$ может быть сколь угодно близка к матрице $G = \{g_{ij}\}$, где $g_{ij} = t_{ij}$ при $i+j \leqslant n+1$ и $g_{ij} = -t_{ij}$ при $i+j > n+1$. Разумеется, $F$ и $G$ – самосопряженные матрицы. В общем случае результат "разрезания" оператора $T$ по побочной диагонали (если $T$ записан через спектральные проекторы оператора $A$) будет, очевидно, определяться формулой

$$R_1 = \iint \operatorname{sign}(b + a - \lambda - \mu) dE_\lambda T dE_\mu, \tag{42}$$

в случае, если $b = \max\sigma(A)$, а $a = \min\sigma(A)$, где $\sigma(A)$ – спектр оператора $A$. Мы видим, что оператор, определяемый формулой (42), имеет такой же вид, как и оператор "треугольного усечения", подробно рассмотренный в книге [14] и определяемый формулой

$$R = \iint \operatorname{sign}(\lambda - \mu) dE_\lambda T dF_\mu. \tag{43}$$

Заметим, что оператор $R$ при $E_\lambda = F_\mu$ представляет собой "разрезку" оператора $T$ по главной диагонали. (Обычно считают $\operatorname{sign}(\lambda - \mu) = 1$ при $\lambda \geqslant \mu$ и $\operatorname{sign}(\lambda - \mu) = -1$ при $\lambda < \mu$.) Если $T$ – оператор Гильберта–Шмидта, то $R_1$ и $R$ также являются операторами Гильберта–Шмидта с той же абсолютной нормой. Из результатов п. 2 следует, что если $T = A - B$ и $f = |t - \lambda_0|$, то в конечномерном случае при подходящем выборе спектра $A$ и числа $\lambda_0$ двойной операторный интеграл $\iint \frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu} dE_\lambda T dF_\mu$ может быть сделан сколь угодно близким по норме к оператору $R_1$. Однако оператор $R$ не удается приблизить двойными операторными интегралами с ядрами типа $\frac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu}$.

## Литература


1. Ю. Б. Фарфоровская, *Оценка нормы $\|f(B) - f(A)\|$ для самосопряженных операторов $A$ и $B$.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **56** (1976), 143–162.
2. Ю. Б. Фарфоровская, *О липшицевых функциях самосопряженных операторов в теории возмущений.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **141** (1985), 176–182.
3. Ю. Б. Фарфоровская, *Коммутаторы функций операторов в теории возмущений.* — Сб. Проблемы матем. анализа, вып.12 (1992), 234–247.
4. Ю. Б. Фарфоровская, *О разности $f(B) - f(A)$ для неограниченных самосопряженных операторов в теории возмущений.* — Зап. научн. семин. Л О М И **107** (1982), 213–221.
5. Ju. B. Farforovskaya, *Functions of operators and their commutators in perturbation theory.* — Funct. Anal. **30** (1994), Warszawa.
6. Ю. Б. Фарфоровская, *О связи метрики Канторовича–Рубинштейна для спектральных разложений самосопряженных операторов с функциями от операторов.* — Вестн. ЛГУ сер. матем., мех., астр. No. 19, вып. 4, (1968), 94–97.
7. T. Kato, *Continuity of the map $S \to |S|$ for linear operators.* — Proc. Japan. Acad. **49** (1973), 157–160.

8. В. В. Пеллер, *Операторы Ганкеля в теории возмущений унитарных и самосопряженных операторов.* — Функц. анал. и его прил. **19**, No. 2 (1985), 37–51.
9. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Двойные операторные интегралы Стилтьеса.* — Сб. Пробл. мат. физики, вып. 1 (1966), 33–67, ЛГУ.
10. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Двойные операторные интегралы Стилтьеса II.* — Сб. Пробл. мат. физики, вып. 2 (1967), 26–60, ЛГУ.
11. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Операторное интегрирование, возмущение и коммутаторы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **170** (1989), 34–66.
12. Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн, *Формулы дифференцирования по параметру функций эрмитовых операторов.* — Докл. АН СССР **76**, No. 1 (1951), 13–16.
13. E. B. Davis, *Lipshitz continuity of functions of operators in the Shatten classes.* — J. London Math. Soc. **37** (1988), 147–157.
14. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.* М, 1967, с. 508.
15. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* М, Наука, 1966, с. 543.
16. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры.* М.-Л., 1963, с. 734.

Farforovskaya Yu. B. Double operator integrals and their estimates in the uniform norm.

In the paper the conditions are considered for the existence of the double operator integral $\iint \varphi(\lambda,\mu)dE_\lambda T dF_\mu$, where $E_\lambda, F_\mu$ are the spectral functions of two selfadjoint operators $A, B$ on a Hilbert space and $T$ is a bounded operator. In principal, the case where $A$ has finite spectrum is studied. Non-linear estimates of $\|f(A)T - Tf(B)\|$ in terms of the norm of $\|AT - TB\|$ for $f \in \mathrm{Lip}1$ are deduced. Also, a formula for the Fréchet derivative is presented.

Государственный университет
телекоммуникаций
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 30 ноября 1995 г.