



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Караваев, С. П. Копысов, А. С. Сармакеева, Моделирование динамики произвольных тел методом дискретных элементов,  
*Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2015, том 25, выпуск 4, 473–482

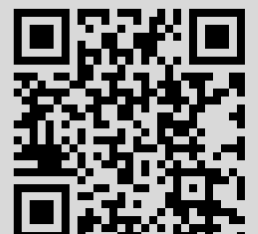
<https://www.mathnet.ru/vuu501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

29 апреля 2025 г., 10:40:12



УДК 519.63

© А. С. Караваев, С. П. Копысов, А. С. Сармакеева

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ <sup>1</sup>**

Рассматриваются постановка и тестовые решения задачи динамического взаимодействия твердых тел произвольной формы в рамках дискретно-элементного моделирования. При дискретизации используется описание тел произвольной формы, составленных из элементов-сфер, жестко связанных между собой. Агломераты строились на нескольких сетках с разной размерностью, что позволило оценить влияние параметров при построении агломератов сфер и гладкости получаемой поверхности. Представлена система уравнений движения агломерата сфер относительно глобальной системы координат, интегрирование которой выполняется на модифицированной схеме Верле. Силы взаимодействия между сферами определяются на основе контактной модели Герца–Миндлина с учетом вязкого демпфирования. Тестирование метода проводилось на задаче взаимодействия двух сфер. Вычислялись траектории движения сфер, представленные агломератом сферических частиц. Полученные результаты сравнивались со случаем движения и взаимодействия сфер в одночастичном приближении.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, динамика твердых тел, метод дискретных элементов, агломерат сфер.

**Введение**

Перспективными представителями класса численных методов в механике деформируемого твердого тела, активно развивающимися в настоящее время, являются бессеточные методы: метод дискретных элементов МДЭ (DEM — discrete element method) и его модификации [1], метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH — Smoothed-particle hydrodynamics) [2, 3], метод анализа разрывных деформаций (DDA — Discontinuous Deformation Analysis) [4]. При рассмотрении движения многих тел с большими перемещениями и вращениями определение контактных поверхностей и контактных сил занимает основную часть вычислительных затрат анализа.

МДЭ широко используется для моделирования деформационных процессов в гранулированных и слабосвязанных средах, впервые был предложен и рассмотрен в статье [5]. Возможности МДЭ постоянно расширяются [6]. До последнего времени возможности применения МДЭ для моделирования динамики соударения ограничивались рассмотрением взаимодействий частиц простейшей сферической формы. Однако тело сложной формы можно представить множеством элементов-сфер, жестко связанных между собой, которое будем называть их мульти-сферным агломератом. В динамике взаимодействий будем учитывать только внешние контакты агломератов. Внутренние контакты между сферами, входящими в агломераты, не рассматриваются. Допускается, что сферы в агломератах могут иметь перекрытия без контактного взаимодействия и, соответственно, относительное положение сфер в агломератах остается неизменным, т. е. агломераты остаются жесткими. Таким образом, появляется возможность представления тела произвольной формы для использования в методе дискретных элементов и оценки влияния аппроксимации формы тела полисферическими агломератами. Один из таких алгоритмов построения агломерата сфер из воксельных данных, используемый в работе, рассмотрен в [7].

Работа направлена на оценку влияния параметров, используемых при построении мультисферного агломерата сложной формы, на его динамику взаимодействия. Численный эксперимент производился на примере моделирования соударения мультисферных агломератов, состоящих из разного числа дискретных элементов.

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке комплексной программы УрО РАН (проект № 15-7-1-11).

### § 1. Уравнение движения

В МДЭ уравнения движения интегрируются по явным схемам для всего множества частиц. Будем полагать, что определены результирующая сила и момент, полученные при суммировании всех сил и моментов, вызванных контактным взаимодействием между частицами и ее контактирующими соседями. Рассмотрим сначала поступательное движение центра масс агломерата

$$\ddot{u}^t = F_c/m_c + g.$$

$m_c$  — масса мультисферного агломерата,  $F_c$  — суммарные силы, действующие на сферы.

Для численного интегрирования уравнений движения используем схему Верле

$$\ddot{u}^t \cong \frac{u^{t-\Delta t} - 2u^t + u^{t+\Delta t}}{(\Delta t)^2},$$

из которой можно выразить

$$u^{t+\Delta t} = 2u^t - u^{t-\Delta t} + \ddot{u}^t(\Delta t)^2 = u^t + \Delta t \left( \frac{u^t - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} + \ddot{u}^t \Delta t \right). \quad (1.1)$$

Как правило,  $u^{t-\Delta t}$  еще не известно (известно только  $u^t$ ). Однако отметим, что скорость на полшаге  $t - \Delta t/2$  можно записать как

$$\dot{u}^{t-\Delta t/2} \simeq \frac{u^t - u^{t-\Delta t}}{\Delta t},$$

то есть средняя скорость на шаге  $t - \Delta t$  известна. Подставляя эту аппроксимацию в правую часть (1.1), вычислим

$$u^{t+\Delta t} = u^t + \Delta t \left( \dot{u}^{t-\Delta t/2} + \ddot{u}^t \Delta t \right).$$

Тогда

$$\dot{u}^{t+\Delta t/2} \simeq \dot{u}^{t-\Delta t/2} + \ddot{u}^t(\Delta t),$$

таким образом, первым вычисляется текущее значение скорости  $\dot{u}^{t+\Delta t/2}$ , которая должна быть известна для определения скорости на следующем шаге (так как используется значение  $\dot{u}^{t-\Delta t/2}$ ), затем находится перемещение для следующего временного шага  $u^{t+\Delta t}$ :

$$u^{t+\Delta t} = u^t + \dot{u}^{t+\Delta t/2}(\Delta t).$$

Таким же образом интегрируются рассматриваемые далее угловые скорости.

#### 1.1. Вычисление вращения для мультисферного агломерата

Вычисление поворота агломерата сфер значительно сложнее, чем вычисление его положения, так как отсчетная система координат не инерциальная. Рассмотрим поворот агломерата в локальной системе координат  $(\tilde{\cdot})$ , где матрица инерции  $I$  диагональная.

Уравнения Эйлера для агломерата частиц имеют вид

$$T_i = I_{ii}\dot{\omega}_i + (I_{kk} - I_{jj})\omega_j\omega_k, \quad (1.2)$$

где  $\dot{\omega}_i$ ,  $\omega_i$  — векторы угловых ускорения и скорости соответственно, а  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ .

В данной работе использовался один самых простых алгоритмов решения уравнений Эйлера вида (1.2). Метод основан на модификации схемы Верле с перешагиванием и применением метода «предиктор–корректор» [8, 9]. Метод Верле не может быть использован здесь непосредственно, так как правая часть уравнения Эйлера (1.2) зависит от  $\omega$ .

Каждый агломерат имеет свою локальную систему координат, образованную главными осями. Ориентацию агломерата относительно неподвижной системы координат удобно задавать с помощью кватерниона  $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$  [9, 10]. Представим вектор угловой скорости через

кватернион с нулевой скалярной частью  $q_\omega = (0, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$ . Формула дифференцирования кватерниона связывает производные по времени кватерниона с вектором угловых скоростей  $\omega$ :

$$\dot{q}^t = \frac{1}{2}\omega q^t. \tag{1.3}$$

Важно отметить, что в (1.3) угловая скорость  $\omega$  представлена в проекциях на оси отсчетной системы координат. Ориентацию агломерата в локальной системе координат можно определить через кватернион  $q^t$ , который представим и как матрицу вращения  $A$ .

Таким образом, произвольный вектор  $v$  представляется в локальной системе координат как  $\tilde{v} = vq^* = Av$ , где  $q^*$  — сопряженный кватернион;  $A$  — матрица поворота, которая имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}.$$

В свою очередь, компоненты кватерниона также можно представить через углы Эйлера

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}(\phi + \psi), & q_1 &= \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}(\phi - \psi), \\ q_2 &= \sin \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}(\phi - \psi), & q_3 &= \cos \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}(\phi + \psi), \end{aligned}$$

а  $\theta, \phi, \psi$  — углы Эйлера.

Для рассматриваемого агломерата сфер в момент времени  $t$  будем считать, что нам известны:  $\tilde{I}^t$  — диагональная матрица инерции в локальной системе координат;  $T^t$  — момент инерции;  $q^t$  — текущая ориентация, определяемая кватернионом (эквивалент матрицы поворота  $A$ );  $\omega^{t-\Delta t/2}$  — угловая скорость на промежуточном шаге;  $L^{t-\Delta t/2}$  — вспомогательная переменная на промежуточном шаге, соответствующая угловому моменту и на первом шаге равная нулю.

Для вычисления новых значений трех переменных  $L^{t+\Delta t/2}$ ,  $q^{t+\Delta t}$ ,  $\omega^{t+\Delta t/2}$  определим угловой момент и текущую угловую скорость:

$$\begin{aligned} L^t &= L^{t-\Delta t/2} + T^t \left( \frac{\Delta t}{2} \right), & \tilde{L}^t &= AL^t, \\ L^{t+\Delta t/2} &= L^{t-\Delta t/2} + T^t \Delta t, & \tilde{L}^{t+\Delta t/2} &= AL^{t+\Delta t/2}, \\ \tilde{\omega}^t &= \frac{\tilde{L}^t}{\tilde{I}^t}, & \tilde{\omega}^{t+\Delta t/2} &= \frac{\tilde{L}^{t+\Delta t/2}}{\tilde{I}^t}. \end{aligned}$$

Из соотношения (1.3), связывающего  $\dot{q}^t$  и  $q^t$ ,  $\tilde{\omega}^t$  равенством

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_w^t \\ \dot{q}_x^t \\ \dot{q}_y^t \\ \dot{q}_z^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_w^t & -q_x^t & -q_y^t & -q_z^t \\ q_x^t & q_w^t & -q_z^t & q_y^t \\ q_y^t & q_z^t & q_w^t & -q_x^t \\ q_z^t & -q_y^t & q_x^t & q_w^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_x^t \\ \tilde{\omega}_y^t \\ \tilde{\omega}_z^t \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

получим значения параметров кватерниона  $q^t$ , используя разностную аппроксимацию производных кватерниона и решая систему уравнений (1.4).

Получим оценку ориентации  $q^{t+\Delta t/2}$  с учетом изменения системы отсчета для углового момента на полушаге:

$$q^{t+\Delta t/2} = q^t + \dot{q}^t \left( \frac{\Delta t}{2} \right).$$

Вычислим  $\dot{q}^{t+\Delta t/2}$  через  $q^{t+\Delta t/2}$  и  $\tilde{\omega}^{t+\Delta t/2}$  аналогично системе (1.4). После этого определяем новую ориентацию и угловую скорость:

$$q^{t+\Delta t} = q^t + \dot{q}^{t+\Delta t/2} \Delta t, \quad \omega^{t+\Delta t/2} = A^{-1}\tilde{\omega}^{t+\Delta t/2}.$$

Далее вычисляется новое положение радиуса-вектора сфер агломерата.

## § 2. Вычисление сил

Выбор функции, описывающей силовое взаимодействие контактирующих сфер, является одним из важнейших в МДЭ. Сила взаимодействия между сферами играет такую же роль, что и определяющие уравнения в механике сплошной среды, однако ее структура намного проще, чем у определяющих уравнений, и представляет собой скалярную функцию расстояния.

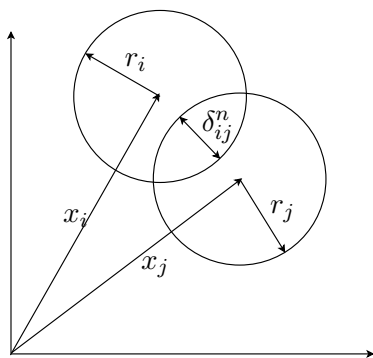


Рис. 1. Взаимодействие сфер при деформации

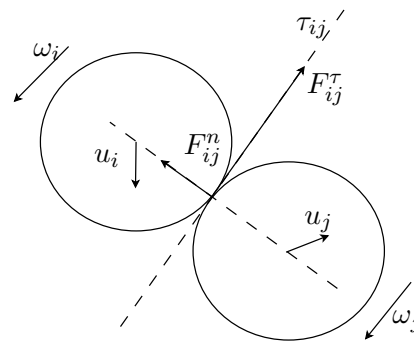


Рис. 2. Силовое взаимодействие в точке контакта между сферами с номерами  $i$  и  $j$

В модели дискретных элементов форма сфер на протяжении всего времени контакта остается неизменной, а степень их деформации представляется величиной перекрытия  $\delta_{ij}^n$  между контактирующими сферами (рис. 1). При этом предполагается, что размер такого перекрытия намного меньше размеров самих частиц. В реальной ситуации взаимодействие между частицами приводит к их деформации и искажению формы, и для этого полагается, что форма сфер на протяжении всего времени контакта остается неизменной, но допускаются их перекрытия в нормальном и касательном направлениях, составляющие которых связаны с нормальной  $F_{ij}^n$  и касательной  $F_{ij}^\tau$  силами (рис. 2). Силовое взаимодействие в точке контакта между сферами с номерами  $i$  и  $j$  можно представить в векторной форме следующим образом:

$$F_{ij} = F_{ij}^n \cdot n_{ij} + F_{ij}^\tau \cdot \tau_{ij} = (F_{ij}^{n,e} + F_{ij}^{n,v}) \cdot n_{ij} + (F_{ij}^{\tau,e} + F_{ij}^{\tau,v}) \cdot \tau_{ij},$$

где  $F_{ij}^n$  и  $F_{ij}^\tau$  — нормальная и касательная компоненты контактной силы, каждая из которых состоит из вязкой  $F^{*,v}$  и упругой  $F^{*,e}$  сил, их вычисление рассмотрено ниже и определяется в данном случае на основе контактной модели Герца–Миндлина [11];  $n_{ij}$  — единичный вектор, определяющий плоскость контакта между двумя сферами, а именно вектор нормали к плоскости пересечения сфер;  $\tau_{ij}$  — единичный вектор, принадлежащий плоскости контакта. В данной работе рассматриваются случаи контакта с вязкоупругим взаимодействием контактирующих тел.

## § 3. Контактная модель Герца–Миндлина

Упругое взаимодействие сфер состоит из нормальной (3.1) и касательной (3.2) компонент и определяется следующим образом:

$$F_{ij}^{n,e} = \frac{4}{3} E_{ij} \sqrt{R_{ij}} (\delta_{ij}^n)^{3/2}, \quad \frac{1}{E_{ij}} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_j^2}{E_j}, \quad (3.1)$$

$$F_{ij}^{\tau,e} = 8 G_{ij} \sqrt{R_{ij}} \delta_{ij}^n \delta_{ij}^\tau, \quad \frac{1}{G_{ij}} = \frac{2 - \nu_i}{G_i} + \frac{2 - \nu_j}{G_j}, \quad (3.2)$$

где  $1/R_{ij} = 1/r_i + 1/r_j$ ,  $\delta_{ij}^n$  и  $\delta_{ij}^\tau$  — перекрытия в нормальном и касательном направлениях;  $E_i$ ,  $G_i$ ,  $\nu_i$  — модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона для  $i$ -ой сферы соответственно.

Определим перекрытие сфер по нормали  $\delta_{ij}^n$  как

$$\delta_{ij}^n = (r_i + r_j) - l_{ij} > 0,$$

где  $l_{ij}$  — расстояние между центрами частиц. В приращениях по времени  $\Delta t$  выражение для приращения  $\Delta\delta_{ij}^n$  формулируется следующим образом:

$$\Delta\delta_{ij}^n = -\Delta l_{ij}.$$

Приращение касательной составляющей определяется скалярным произведением

$$\Delta\delta_{ij}^\tau = (\Delta u_i - \Delta u_j) \cdot \tau_{ij},$$

где вектор  $t_{ij}$  направлен вдоль вектора относительного смещения частиц в плоскости контакта;  $\Delta u_i$  и  $\Delta u_j$  — приращения смещений частиц.

Вязкое взаимодействие, так же как и упругое взаимодействие, состоит из нормальной (3.3) и касательной (3.4) компонент [12], которые вычисляются следующим образом:

$$F_{ij}^{n,v} = \eta^n \dot{u}^n, \tag{3.3}$$

$$F_{ij}^{\tau,v} = \eta^\tau \dot{u}^\tau, \tag{3.4}$$

где  $\eta_n, \eta_\tau$  — коэффициенты демпфирования, определяемые как

$$\eta^n = 2\sqrt{m \cdot 2E_{ij}\delta_{ij}^n \sqrt{R_{ij}\zeta^n}}, \quad \eta^\tau = 4\sqrt{m \cdot 2G_{ij}\delta_{ij}^n \sqrt{R_{ij}\zeta^\tau}},$$

а  $\zeta^n$  и  $\zeta^\tau$  — параметры, определяющие демпфирование. Численное демпфирование в конечно-разностной схеме не использовалось.

#### § 4. Численное моделирование

В настоящей работе рассматривалось несколько математических моделей: соударения двух сфер и двух агломератов сфер, столкновение агломерата и сферы. Эксперимент состоит в соударении двух сфер/агломератов, которым в начальный момент времени задается скорость 2 м/с по направлению друг к другу. Радиус сфер и агломератов — 0.03 метра. Они находятся на расстоянии двух метров и на высоте 0.5 метра. Модели помещены в бокс длиной 4 метра. Основные характеристики материалов сфер и бокса ( $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона и  $\rho$  — плотность): сфера/агрегат —  $E = 10^5$  Па,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 500$  кг/м<sup>3</sup>; стенки бокса —  $E = 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

На рисунке 3, а представлена объемная модель агломерата, построенная с использованием алгоритмов, предложенных в [7]. Обозначим агломераты сфер как  $\mathcal{P}(dim, \mathcal{R})$ , где  $dim$  — размерность сетки, на которой строилась модель, и  $\mathcal{R}$  — разреженность, значение, характеризующее расстояние между центрами сфер в агломерате. Агломераты строились на сетках с разной размерностью и разреженностью. Примеры проекции агломератов с размерностью  $dim = 16$  и  $\mathcal{R}$  показаны на рисунке 3.

Ниже (см. рис. 3) приведены агломераты  $\mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{P}_4$  с числом сфер 1639 и 747 соответственно, зависящим от разреженности и размерности агломерата. В работе представлены результаты численных экспериментов с разреженностью  $R = 30$ , при которой вычислительные затраты были достаточно умеренны, а траектория движения агломератов оставалась симметричной. Из проекций видно, что чем меньше число разреженности  $\mathcal{R}$ , тем больше строится сфер и точнее описывается поверхность, однако построение такого агломерата становится более затратным по времени.

Что касается формы агломерата  $\mathcal{P}_4(16, 85)$ , то можно сказать, что он, агломерат, асферичен (см. рис. 3, в). Поэтому для оценки гладкости поверхности  $Q_r$  агломератов была использована мера качества, введенная в [13]. Для агломерата  $\mathcal{P}_2$  мера гладкости принимает значение  $Q_r = 0.705$ , а для  $\mathcal{P}_4$  — значение  $Q_r = 0.854$ . Меньшее значение  $Q_r$  соответствует более гладкой

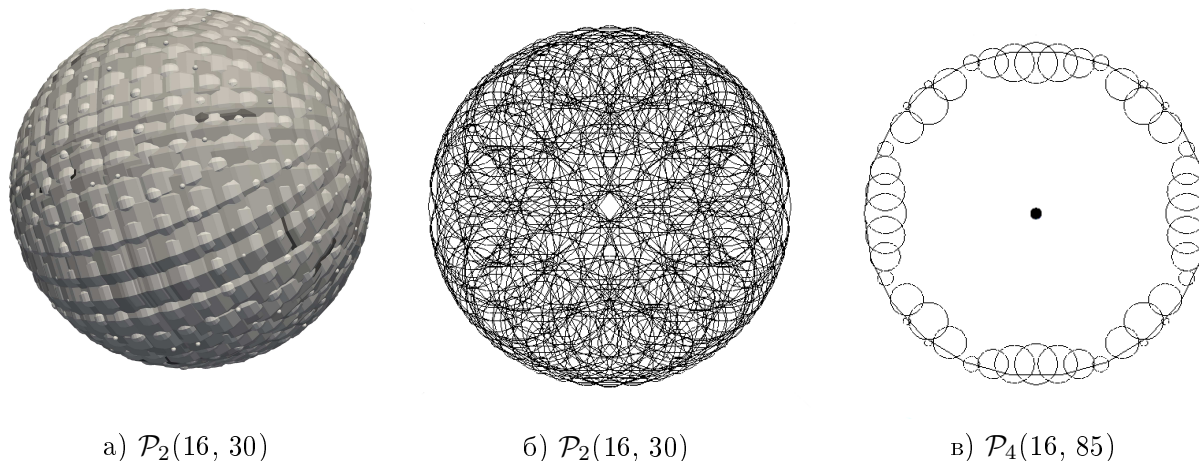


Рис. 3. Примеры построения агломератов для сферического тела

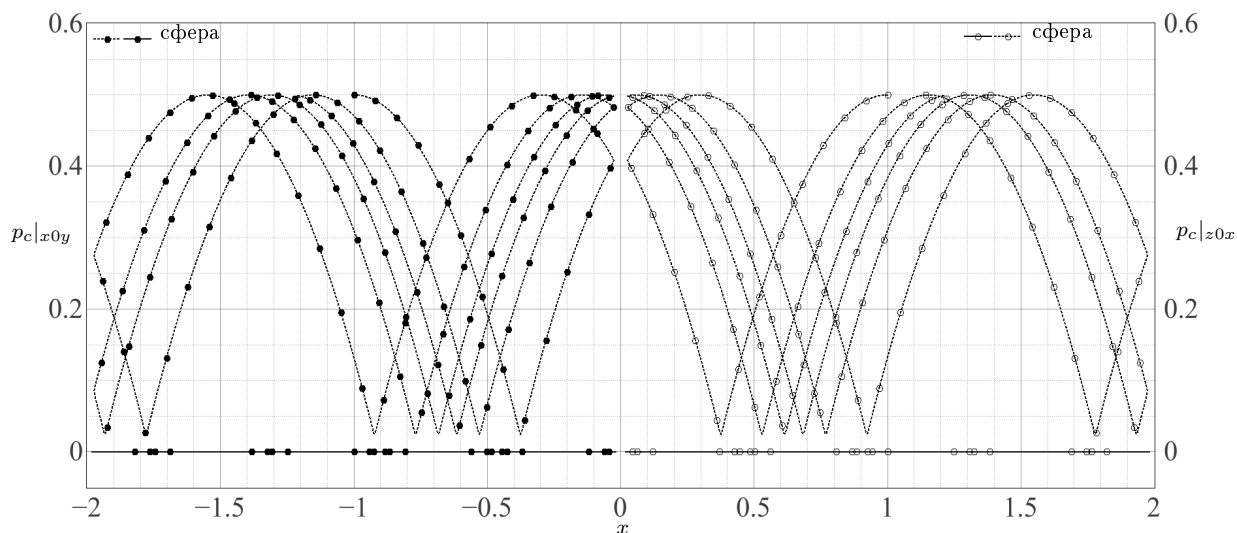


Рис. 4. Соударение двух сфер

поверхности. Результаты сравнения взаимодействия агломератов с разными значениями меры гладкости представлены в виде графика положения центра масс агломератов при соударении друг с другом и со стенками бокса, в котором они находятся.

На рисунке 4 изображен график движения сфер в двух плоскостях. Начальное положение для сфер соответствует координатам  $(-1, 0, 0.5)$  и  $(1, 0, 0.5)$  для первой и второй сферы соответственно. В начальный момент сферам задается скорость 2 м/с по направлению друг к другу. После чего сферы ударяются о нижнюю стенку бокса, затем отскакивают и, подлетев на определенную высоту, соударяются друг с другом. Далее отлетают в противоположных направлениях, продолжая движение до удара о боковую стенку бокса, и изменяют направление. Показана траектория движения в течение 5 секунд в двух плоскостях. Нижняя прямая показывает отклонения движения сфер по оси  $y$ , а периодически повторяющаяся кривая описывает движение сфер по  $z$ . На рисунке 5 показан график движения агломератов  $\mathcal{P}_2(16, 30)$  при аналогичных рисунку 4 условиям и точности вычисления массы и моментов инерции агломерата с параметром  $h = 3$  (см. [13]). В этом случае наблюдается отклонение движения центра масс по оси  $y$ . При увеличении точности вычисления массы ( $h = 7$ ) отклонений по оси  $y$  не наблюдается и графики совпадают со случаем двух сфер (рис. 4).

Моделирование движения агломератов производилось на сетках с разной размерностью и разреженностью, однако наилучшие результаты были получены при меньшем  $\mathcal{R}$ . Поэтому

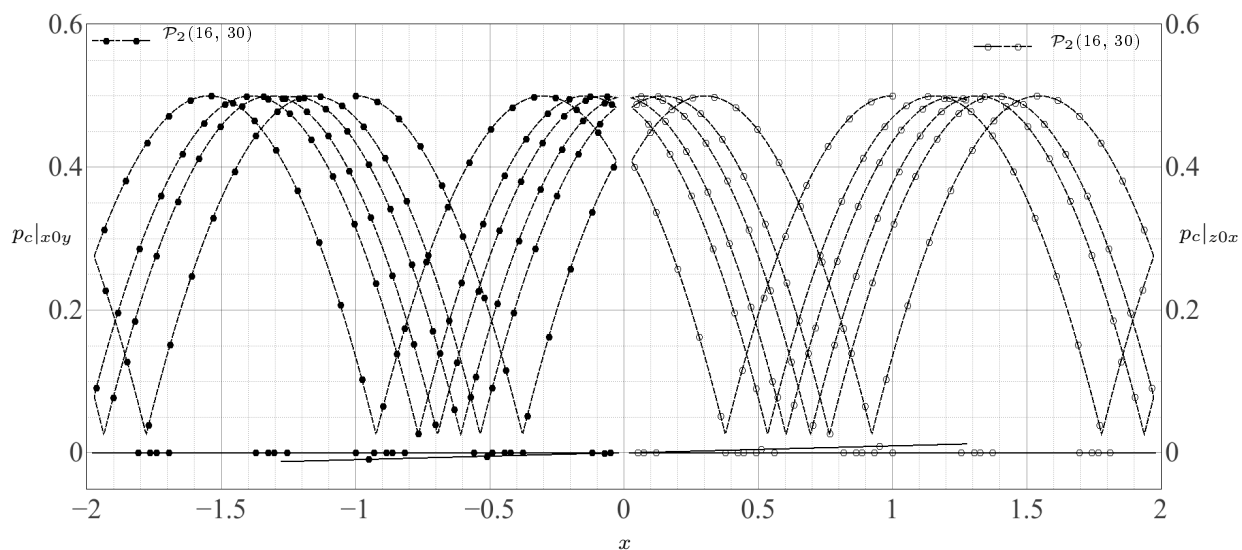


Рис. 5. Соударение двух агломератов сфер  $\mathcal{P}_2(16, 30)$  ( $h = 3$ )

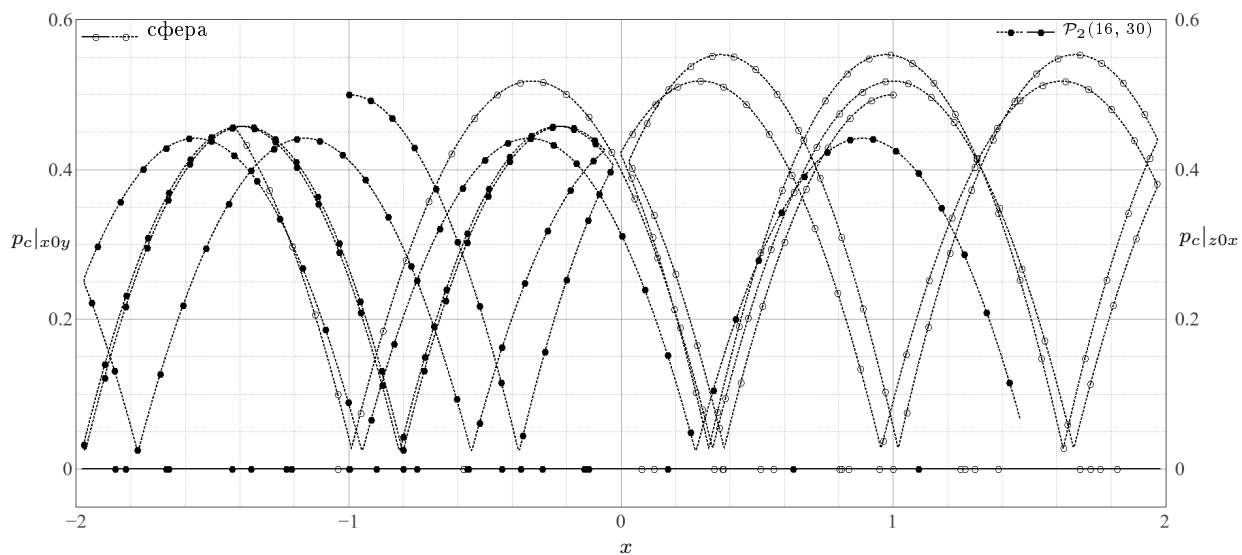


Рис. 6. Соударение сферы и агломерата  $\mathcal{P}_2(16, 30)$  ( $h = 7$ )



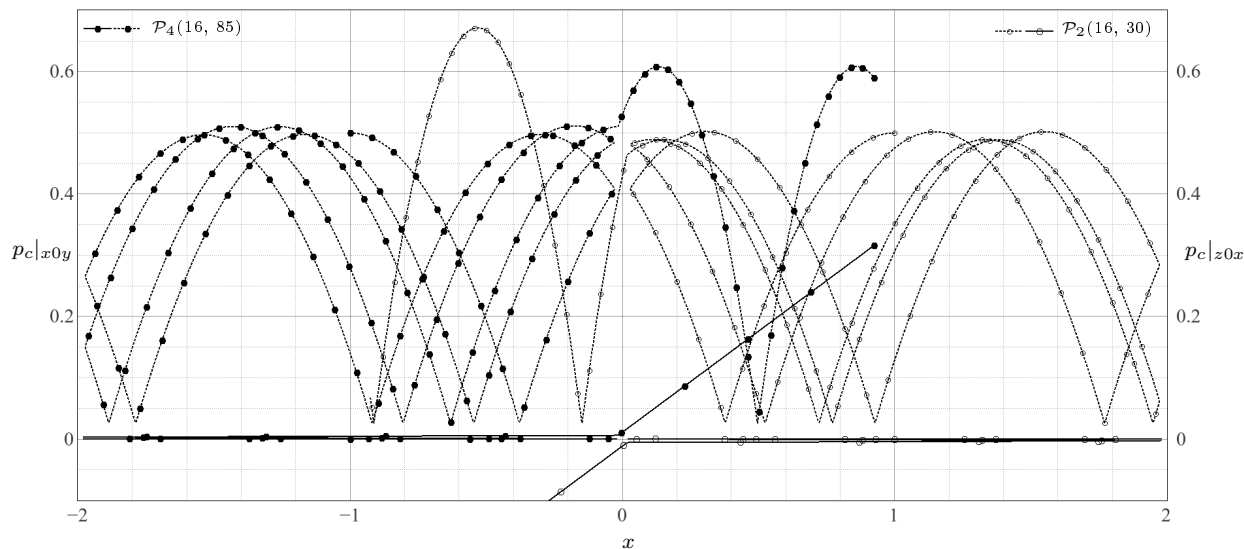


Рис. 7. Соударение агломератов  $\mathcal{P}_4(16, 85)$  и  $\mathcal{P}_2(16, 30)$  ( $h = 3$ )

в статье в основном приведены графики с использованием агломерата  $\mathcal{P}_2(16, 30)$ . Это связано как с точностью получаемых результатов, так и с вычислительными затратами на построение и расчет движения агрегатов.

При моделировании движения сферы и агломерата  $\mathcal{P}_2(16, 30)$ , при  $h = 7$  (рис. 6), наблюдаются значительные отличия в траекториях. При изменении тангенциального параметра демпфирования  $\zeta^T = 0.5$  изменения в траекториях еще более заметны.

Случай столкновения несимметричных агломератов  $\mathcal{P}_4(16, 85)$  и  $\mathcal{P}_2(16, 30)$ , где мультисферный агломерат  $\mathcal{P}_4(16, 85)$  еще повернут на угол  $90^\circ$ , представлен на рисунке 7. При использовании одинаковых агломератов  $\mathcal{P}_2(16, 30)$  и повороте одного из них на  $90^\circ$  тела двигаются так, что только по оси  $z$  возникают отклонения в амплитуде колебаний. При изменении параметров демпфирования и недостаточной точности вычисления массы несферических агломератов с параметром  $h = 3$  траектория движения агломератов также не соответствует идеальному случаю.

Таким образом, при моделировании произвольных твердых тел методом дискретных элементов важно учитывать параметры построения агломератов сфер и гладкость получаемой поверхности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Luding S. Introduction to discrete element methods: basic of contact force models and how to perform the micro-macro transition to continuum theory // *European Journal of Environmental and Civil Engineering*. 2008. Vol. 12. № 7-8. P. 785–826.
2. Gray J.P., Monaghan J.J., Swift R.P. SPH elastic dynamics // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001. Vol. 190. № 49-50. P. 6641–6662.
3. Потапов А.П., Ройз С.И., Петров И.Б. Моделирование волновых процессов методом сглаженных частиц (SPH) // *Математическое моделирование*. 2009. Т. 21. № 7. С. 20–28.
4. Jing L. Formulation of discontinuous deformation analysis (DDA) — an implicit discrete element model for block systems // *Int. J. Eng. Geol.* 1998. Vol. 49. P. 371–381.
5. Cundall P., Starck O. A discrete numerical-model for granular assemblies // *Geotechnique*. 1979. Vol. 29. № 1. P. 47–65.
6. Ferrellec J.-F., McDowell G.R. A method to model realistic particle shape and inertia in DEM // *Granular Matter*. 2010. Vol. 12. № 5. P. 459–467.
7. Копысов С.П., Караваев А.С. Построения расчетных моделей из воксельных данных для методов конечных и дискретных элементов // *Труды Института механики УрО РАН «Проблемы механики и материаловедения»*. Ижевск. 2015. С. 85–108.

8. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 640 с.
9. Дорофеев С.О. Моделирование сыпучих сред методом дискретных элементов: дис. ... канд. физ.-матем. наук / ИПХВ РАН. Черноголовка, 2008. 115 с.
10. Амелькин Н.И. Кинематика и динамика твердого тела. М.: МФТИ, 2000. 62 с.
11. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact // *Journal of Applied Mechanics*. 1949. № 16. P. 259–344.
12. Kuwabara G., Kono K. Restitution coefficient in collision between two spheres // *Japanese Journal of Applied Physics*. 1987. Vol. 26. P. 1230–1233.
13. Караваев А.С., Копысов С.П. Метод построения неструктурированных шестигранных сеток из объемных данных // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2013. Т. 5. № 1. С. 11–24.

Поступила в редакцию 02.10.2015

Караваев Александр Сергеевич, аспирант, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.

E-mail: karavaev-alexander@yandex.ru

Копысов Сергей Петрович, д.ф.-м.н., заведующий лабораторией, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.

E-mail: s.kopysov@gmail.com

Сармакеева Анастасия Семеновна, младший научный сотрудник, Институт механики УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.

E-mail: asarmakeeva@gmail.com

***A. S. Karavaev, S. P. Kopysov, A. S. Sarmakeeva***

**A discrete element method for dynamic simulation of arbitrary bodies**

*Keywords:* mathematical modeling, rigid body dynamics, discrete element method, clumps.

MSC: 65M55

The paper deals with the statement of a problem of dynamic interaction of arbitrary solid bodies and its test solutions in the context of discrete element modeling. For discretization we use description of bodies with arbitrary shapes, composed of rigidly bound spheres. The clumps were built with different characteristics, which allowed to estimate their influence on the process of clump construction and the smoothness of obtained surface. A system of equations of motion relative to global axes for a clump of spheres is presented. The forces of interaction between the spheres are determined based on the Hertz–Mindlin contact model with due account for viscous damping. A problem of interaction of two spheres was chosen as a test case. Spheres' trajectories composed of clumps of spheres were calculated. The results were compared with the results for the case of motion and interaction of spheres in one-particle approximation.

#### REFERENCES

1. Luding S. Introduction to discrete element methods: basic of contact force models and how to perform the micro-macro transition to continuum theory, *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 2008, vol. 12, no. 7-8, pp. 785–826.
2. Gray J.P., Monaghan J.J., Swift R.P. SPH elastic dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, vol. 190, no. 49-50, pp. 6641–6662.
3. Potapov A.P., Royz S.I., Petrov I.B. Modeling of wave processes with smoothed particle hydrodynamics method, *Mat. Model.*, 2009, vol. 21, no. 7, pp. 20–28 (in Russian).
4. Jing L. Formulation of discontinuous deformation analysis (DDA) — an implicit discrete element model for block systems, *Int. J. Eng. Geol.*, 1998, vol. 49, pp. 371–381.
5. Cundall P., Starck O. A discrete numerical-model for granular assemblies, *Geotechnique*, vol. 29, no. 1, 1979, pp. 47–65.

6. Ferrellec J.-F., McDowell G.R. A method to model realistic particle shape and inertia in DEM, *Granular Matter*, 2010, vol. 12, no. 5, pp. 459–467.
7. Kopysov S.P., Karavaev A.S. Construction of computational models from voxel data for finite and discrete element method, *Tr. Inst. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk "Problemy mekhaniki i materialovedeniya"*, Izhevsk, 2015, pp. 85–108 (in Russian).
8. Hockney R.W., Eastwood J.W. *Computer simulation using particles*, McGraw-Hill, 1981. Translated under the title *Chislennoe modelirovanie metodom chastits*, Moscow: Mir, 1987, 640 p.
9. Dorofeenko S.O. Simulation of granular materials by discrete element method, *Dr. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Chernogolovka, 2008, 115 p. (In Russian).
10. Amel'kin N.I. *Kinematika i dinamika tverdogo tela* (Kinematics and dynamics of a rigid body), Moscow: Moscow Institute of Physics and Technology, 2000, 62 p.
11. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact, *Journal of Applied Mechanics*, 1949, vol. 16, pp. 259–344.
12. Kuwabara G., Kono K. Restitution coefficient in collision between two spheres, *Japanese Journal of Applied Physics*, 1987, vol. 26, pp. 1230–1233.
13. Karavaev A.S., Kopysov S.P. The method of unstructured hexahedral mesh generation from volumetric data, *Komp. Issled. Model.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 11–24 (in Russian).

Received 02.10.2015

Karavaev Aleksandr Sergeevich, post-graduate student, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.  
E-mail: karavaev-alexander@yandex.ru

Kopysov Sergei Petrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Laboratory, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.  
E-mail: s.kopysov@gmail.com

Sarmakeeva Anastasiya Semenovna, Junior Researcher, Institute of Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.  
E-mail: asarmakeeva@gmail.com