Yu. I. Manin, Formal and algebraic commutative groups, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1962, Volume 17, Issue 2, 197–198 дифференциальной связности типа (8). Абсолютная производная поля любого геометрического объекта относительно такой связности является производной Ли этого поля. Отсюда вытекают результаты статьи [4].

Поступило в Правление Общества 10 октября 1961 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ф. Лаптев, Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований, Труды III Всесоюзного математического съезда **3** (1958).

[2] А. М. Васильев, Общие инвариантные методы в дифференциальной геометрии, ДАН **79**, № 1 (1951).

[3] В. В. Вагнер, Теория составного многообразия, Труды семин. по вект. и тенз. анализу **8** (1950).

[4] Л. Е. Евтушик, Производная Ли и дифференциальные уравнения поля геометрического объекта, ДАН **132**, № 5 (1960).

Ю. И. Манин «Формальные и алгебраические коммутативные группы».

1. Сопоставим каждой связной алгебраической группе G, определенной над полем k, ее локальное кольцо единичной точки o_e. Закон композиции $G\times G \to G$ индуцирует вложение T: $o_e \to o_{e\times e}$, удовлетворяющее аксиомам закона композиции коалгебры. Поскольку кольцо o_e регулярно, его пополнение o изоморфно кольцу формальных степенных рядов от $n=\dim G$ переменных над полем k. Вложение T индуцирует вложение $\overline{T}$: $o \to o\,\overline{\otimes}\,o$ кольца o в его пополненное тензорное произведение на себя. Пара $(o, \overline{T})$ определяет формальную группу G_*, которую мы назовем локализацией группы G (ср. Дьедонне [1]). Отображение, ставящее в соответствие всякой алгебраической группе ее локализацию, является функтором на категории алгебраических групп со значениями в категории формальных групп. Изучение функтора $G \to G_*$ над полем характеристики нуль равносильно изучению локальных групп Ли, соответствующих алгебраическим группам. Если группа G коммутативна, ее локализация G_* изоморфна прямой сумме аддитивных формальных групп; в некоммутативном случае Шевалле [2] удалось полностью описать алгебраические алгебры Ли и тем самым формальные группы, изоморфные локализации G_*. Если же характеристика p поля k отлична от нуля, вопрос описания формальных групп G_* нетривиален уже в коммутативном случае. Ниже мы будем считать, что k — алгебраически замкнутое поле характеристики $p>0$, а все рассматриваемые группы — коммутативны.

2. Нижеследующий результат позволяет свести вопрос о перечислении формальных групп вида G_* к вопросу об описании таких групп с точностью до изогении.

Теорема 1. *Пусть G — алгебраическая коммутативная группа; φ: $G_* \to H$ — некоторая изогения ее локализации. Тогда существует такая алгебраическая группа G' и такая изогения ψ: $G \to G'$, что локализация ψ_*: $G_* \to G'_*$ эквивалентна изогении φ. (Иначе говоря, существуют изоморфизмы ε: $G_* \to G_*$ и η: $H \to G'_*$ такие, что $\eta\circ\varphi=\psi_*\circ\varepsilon$.) Удовлетворяющая этому условию изогения ψ наименьшей возможной степени радикальна и определена однозначно с точностью до эквивалентности.*

Следствие 1. *Любая унипотентная формальная коммутативная группа изоморфна локализации некоторой алгебраической группы.*

(Этим дается положительный ответ на вопрос, поставленный Розенлихтом. См. Дьедонне [3].)

Следствие 2. *Если локализация A_* абелева многообразия A изогенна прямой сумме групп $G_{1,1}$, то существует абелево многообразие B, изогенное A, на котором все инвариантные одномерные дифференциальные формы точны.*

(Этот результат и его обращение были другим способом установлены в диссертации автора.)

Изучение локализации линейных алгебраических групп не представляет труда. Основной вопрос — это о строении локализации абелева многообразия. Нижеследующая теорема дает частичный ответ на этот вопрос.

Т е о р е м а 2. *Пусть A — абелево многообразие размерности $n>0$; p^f — число точек p-го порядка на нем. Тогда локализация A_* изогенна группе $fG_{1,0}+\sum_i G_{n_i,\, m_i}$, где $\sum n_i=\sum m_i = n-f$, $m_i\neq 0$; в сумму $\sum G_{n_i,\, m_i}$ любая группа $G_{n,m}$ входит с той же кратностью, что и группа $G_{m,n}$.*

(Предположение Барзотти, согласно которому всегда $m_i=1$, неверно. Из теоремы 2 вытекает, что оно справедливо при $n-f\leqslant 2$ — результат, высказанный Барзотти без доказательства: ср. [5].)

3. Представляет интерес выяснение того, насколько может быть обширен класс неизоморфных алгебраических групп, локализации которых изоморфны. Для решения этого вопроса требуется, однако, предварительно описать формальные группы с точностью до изоморфизма. Такое описание известно пока только для размерности 2 (Ю. Манин [4]). Поэтому мы ограничимся примерами. Они показывают, что ответы могут быть существенно разными.

П р и м е р 1. Существуют алгебраические системы ненулевой размерности двумерных алгебраических групп, обладающие тем свойством, что для каждой группы в этой системе есть только конечное число изоморфных ей членов этой же системы. В то же время среди локализаций этих групп может быть только конечное число попарно неизоморфных, если для общего члена системы $f=2$.

П р и м е р 2. Аналогичная алгебраическая система двумерных абелевых многообразий, локально изогенных группе $G_{1,1}+G_{1,1}$, при локализации переходит в целую алгебраическую систему той же (именно, единичной) размерности формальных групп.

Поступило в Правление Общества 17 октября 1961 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. D i e u d o n n e, Lie groups and Lie hyperblgebras over a field of characteristic $p>0$ (VI), Amer. Journ. Math. 89, № 2 (1957), 331—338.

[2] К. Ш е в а л л е, Теория групп Ли, т. II, М., ИЛ, 1958.

[3] J. D i e u d o n n é, Sur les groups formels abéliens unipotents, Rend. Circ. Mat. di Palermo, Ser. II, 5, № 2 (1956), 170—180.

[4] Ю. М а н и н, Двумерные формальные абелевы группы, ДАН 143, № 1 (1962).

[5] I. B a r s o t t i, Abelian varieties over fields of positive characteristic, Rend. Circ. Mat. di Palermo, ser. II, 5, IV, 2 (1956), 145—169.

А. К. Р ы б н и к о в «О пространствах аффинной связности без кручения 1-го класса».

В N-мерном аффинном пространстве R_N рассмотрим n-мерную поверхность. К каждой точке M этой поверхности присоединим n-мерную плоскость S (базовую плоскость), проходящую через эту точку, и $(N-n)$-мерную плоскость Σ (опорную плоскость), имеющую с S только одну общую точку M. В многообразии базовых плоскостей S устанавливается аффинная связность путем проектирования соседней базовой плоскости на исходную параллельно исходной опорной плоскости Σ. Задача погружения n-мерного пространства аффинной связности A_n в R_N состоит в отыскании в R_N такой n-мерной поверхности, оснащенной базовыми и опорными плоскостями, на которой связность, установленная путем проектирования, совпала бы со связностью в A_n. В такой постановке задача погружения рассматривалась в работах Г. Ф. Лаптева [1], [2], О. Гальвани [3] и автора [4], [5]. В настоящей работе мы рассматриваем пространства A_n без кручения 1-го класса. В этом случае реализующая поверхность является гиперповерхностью, базовые плоскости — гиперплоскостями, а опорные плоскости — прямыми.

Доказано, что если тензор Риччи невырожден, то при реализации пространства 1-го класса базовой гиперплоскостью является касательная гиперплоскость. Опираясь на это, мы доказываем 2 следующие теоремы.