УДК 514.764.25

ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ АФФИННО-СВЯЗНЫХ И РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н. С. Синюков

ВВЕДЕНИЕ

Теория почти геодезических отображений аффинно-связных и римановых пространств (Н. С. Синюков [14], [17], [18]) является широким и в то же время геометрически естественным обобщением теории геодезических отображений. Она охватывает теорию n—2 проективных пространств (В. Ф. Каган [5], Г. Врайчану [36]), теорию голоморфно-проективных отображений келеровых и гиперболических келеровых пространств, конциркулярную геометрию (Яно [38]), теорию пространств, допускающих сходящиеся (П. А. Широков [24]) и геодезические (З. Я. Шапиро [23]) векторные поля, имеет интересные пересечения с теорией квазигеодезических отображений (А. З. Петров [10]).

В данной статье сначала излагаются основные факты теории почти геодезических отображений пространств аффинной связности без кручения, затем — с кручением.

Изложение ведется в тензорной форме, локально в классе вещественных достаточно гладких функций.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. В пространстве аффинной связности $\overline{A}_n$ без кручения, отнесенном к некоторой локальной системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ с объектом связности $\overline{\Gamma}^h_{ij}(x)$ $(h, i, j = 1, 2, \ldots, n)$, рассмотрим кривую $\overline{L}$ в параметрическом представлении

$$x^h = x^h(t), \quad \frac{dx^h}{dt} = \lambda^h \ (\neq 0). \tag{1}$$

Двумерное распределение E_2, заданное на $\overline{L}$, называется компланарным вдоль $\overline{L}$, если каждый вектор ξ_0^h, принадлежащий в произвольно фиксированной точке $M_0 \in \overline{L}$ распределению $\underset{0}{E_2}$, после параллельного перенесения в $\overline{A}_n$ вдоль $\overline{L}$ в любую другую точку $M \in \overline{L}$, также принадлежит распределению E_2 в точке M.

Если $\xi^h_{1|}(t)$ и $\xi^h_{2|}(t)$ — базисные векторы распределения E_2, определенного на $\overline{L}$, необходимые и достаточные условия компланарности E_2 вдоль $\overline{L}$, очевидно, таковы:

$$\xi^h_{p||\alpha}\lambda^\alpha = a^q_p \xi^h_{q|} \quad (p, q = 1, 2). \tag{2}$$

Здесь «|» — символ ковариантного дифференцирования в $\overline{A}_n$, a^q_p — некоторые функции параметра t, относительно которого (2) имеют тождественный характер.

Легко видеть, что свойство компланарности распределения E_2 вдоль $\overline{L}$ в $\overline{A}_n$ носит чисто геометрический характер и поэтому инвариантно как относительно выбора ее параметризации, так и системы координат в $\overline{A}_n$.

Кривая $\overline{L} \subset \overline{A}_n$ называется почти геодезической линией пространства $\overline{A}_n$ (Н. С. Синюков [14], [18]), если существует компланарное вдоль $\overline{L}$ распределение E_2, проходящее в каждой точке $\overline{L}$ через ее касательный вектор $\lambda^h(t)$. На основании этого определения из (2) нетрудно видеть, что функциями (1) определяется почти геодезическая линия $\overline{L}$ пространства $\overline{A}_n$ тогда и только тогда, когда они удовлетворяют уравнениям

$$\lambda^h_{2|} = a\lambda^h + b\lambda^h_{1|}, \tag{3}$$

где $\lambda^h_{1|} = \lambda^h_{|\alpha}\lambda^\alpha$, $\lambda^h_{2|} = \lambda^h_{1|\alpha}\lambda^\alpha$, a и b — некоторые функции t.

Свойство кривой $\overline{L}$ представлять собою почти геодезическую линию пространства $\overline{A}_n$, естественно, также инвариантно как относительно преобразования координат в $\overline{A}_n$, так и параметра на кривой. Поэтому для каждой почти геодезической линии $\overline{L}$ пространства $\overline{A}_n$ всегда можно выбрать канонический параметр τ, относительно которого определяющие кривую функции

$$\tilde{x}^h = \tilde{x}^h(t), \quad \frac{d\tilde{x}^h}{d\tau} = \tilde{\lambda}^h \tag{4}$$

удовлетворяют условиям

$$\tilde{\lambda}^h_{2|} = \tilde{e}(\tau)\tilde{\lambda}^h, \tag{5}$$

т. е. так, чтобы $\tilde{b}(\tau) \equiv 0$. Отсюда следует, что с точки зрения теории кривизны в пространствах афинной связности (Схоутен, Стройк [21]) почти геодезические линии характеризуются тем, что для них существует только первая кривизна $K_1 = \tilde{a}(\tau)$ и может быть произвольной, но не существует последующих кривизн $K_2, K_3, \ldots, K_{n-1}$. Из (5) на основании известной теоремы теории дифференциальных уравнений приходим к следующей теореме

Теорема 1 (Н. С. Синюков [14], [18]). В каждом пространстве аффинной связности $\bar{A}_n$ через любую точку M_0 в любом направлении $\underset{0}{\tilde{\lambda}^h}$ при заданном векторе первой нормали $\underset{0}{\lambda^h_{1|}}$ можно провести и притом единственную почти геодезическую линию $\bar{L}$, имеющую заданную первую кривизну $K_1=\tilde{a}(\tau)$.

В плоском пространстве почти геодезические линии (и только они) принадлежат двумерным плоскостям.

2. Отображение π пространства аффинной связности без кручения A_n на пространство $\bar{A}_n$, при котором каждая геодезическая линия A_n переходит в почти геодезическую $\bar{A}_n$, называется почти геодезическим (Н. С. Синюков [14], [18]) и обозначается так: $\pi : A_n \to \bar{A}_n$.

На основании этого определения из (3) вытекает, что в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ почти геодезическое отображение $\pi : A_n \to \bar{A}_n$ характеризуется следующими условиями

$$(P^h_{\alpha\beta,\gamma}+P^h_{\delta\alpha}P^\delta_{\beta\gamma})\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = a\lambda^h + bP^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta \tag{6}$$

на тензор P^h_{ij} деформации объекта связности $\Gamma^h_{ij}(x)$ пространства A_n

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x)=\Gamma^h_{ij}(x)+P^h_{ij}(x), \tag{7}$$

которые должны выполняться тождественно относительно координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ текущей точки и компонент касательного вектора $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$.

Здесь a и b — некоторые инварианты, зависящие как от $x^1, x^2, \ldots, x^n$, так и от $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$. В соответствии со спецификой зависимости a и b от $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$ из уравнений (6) приходим к заключению о том, что справедлива теорема.

Теорема 2 (Н. С. Синюков [14], [18]). Существует три типа почти геодезических отображений π_1, π_2 и π_3 пространств аффинной связности A_n без кручения, характеризующиеся следующими основными уравнениями

$$\pi_1 : P^h_{(ij,k)}+P^h_{\alpha(i}P^\alpha_{jk)}=a_{(ij}\delta^h_{k)}+b_{(i}P^h_{jk)}; \tag{8}$$

$$\pi_2 : P^h_{ij}=\psi_{(i}\delta^h_{j)}+\sigma_{(i}F^h_{j)}, \tag{9}$$

$$F^h_{(i,j)}+\sigma_{(i}F^\alpha_{j)}F^h_\alpha=\mu_{(i}F^h_{j)}+\nu_{(i}\delta^h_{j)};$$

$$\pi_3 : P^h_{ij}=\psi_{(i}\delta^h_{j)}+\sigma_{ij}F^h, \tag{10}$$

$$F^h_{,i}=\nu\delta_i{}^h+\mu_i F^h.$$

Здесь a_{ij} и σ_{ij} — симметрические тензоры типа (0.2), $F_i{}^h$ — тензор типа (1.1), b_i, ψ_i, σ_i, ν_i, μ_i — ковекторы, F^h — контравариантный вектор, ν — инвариант, «,» — символ ковариантного дифференцирования в A_n, (...) обозначает симметрирование без деления.

Как указывалось ранее, в плоском пространстве $\bar{A}_n$ почти геодезические линии являются кривыми, принадлежащими двумерным плоскостям. Поэтому пространства A_n, допускающие почти геодезическое отображение π на плоское пространство $\bar{A}_n$, $n-2$ проективны (Г. Вранчану [36], В. Ф. Каган [5]). В дальнейшем будем их называть $n-2$ проективными пространствами первого, второго или третьего типа, в соответствии с типами отображений π_1, π_2 и π_3.

§ 2. ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПЕРВОГО ТИПА π_1

На основании теоремы 2 пространство A_n допускает отображение π_1 на некоторое пространство $\bar{A}_n$, если в A_n существует симметричный тензор P^h_{ij}, удовлетворяющий уравнениям (8) при некотором симметричном тензоре a_{ij} и векторе b_i. Образом каждой геодезической линии L пространства A_n при отображении $\pi_1: A_n \to \bar{A}_n$ будет почти геодезическая линия $\bar{L}$ пространства $\bar{A}_n$ с компланарным распределением $E_2\{\lambda^h, P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta\}$, где λ^h — касательный вектор.

Если для отображения $\pi_1: A_n \to \bar{A}_n$ вектор b_i тождественно равен нулю, будем называть такое отображение каноническим и обозначать $\tilde{\pi}_1$. Легко видеть, что каждое отображение π_1 можно представить в виде произведения канонического отображения $\tilde{\pi}_1$ на геодезическое отображение. Последнее можно считать тривиальным почти геодезическим отображением, которым можно пренебречь.

Итак, при отображении $\tilde{\pi}_1: A_n \to \tilde{A}_n$ в общей по отображению системе координат

$$\tilde{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + P^h_{ij}, \tag{11}$$

$$P^h_{(ij,k)} + P^h_{\delta(i}P^\delta_{jk)} = a_{(ij}\delta^h_{k)}. \tag{12}$$

Из уравнений (12) и зависимости между тензорами Римана $\tilde{R}^h_{ijk}$ и R^h_{ijk} пространств $\tilde{A}_n$ и A_n, вытекающей из (11), эквивалентно получаем

$$3(P^h_{ij,k} + P^h_{k\alpha}P^\alpha_{ij}) = R^h_{(ij)k} - \tilde{R}^h_{(ij)k} + a_{(ij}\delta^h_{k)}. \tag{13}$$

Рассматривая (13) как систему типа Коши в A_n относительно тензора P^h_{ij}, находим условия их интегрируемости в виде

$$\begin{aligned} \tilde{R}^h_{(ij)[k,l]} = {} & R^h_{(ij)[k,l]} + \delta^h_{(i}a_{jk),l} - \delta^h_{(i}a_{jl),k} - \\ & -3(-P^\alpha_{ij}R^h_{\alpha kl} + P^h_{\alpha j}R^\alpha_{ikl} + P^h_{i\alpha}R^\alpha_{jkl}) - \\ - P^h_{\alpha k}(R^\alpha_{(ij)l} - \tilde{R}^\alpha_{(ij)l} + \delta^\alpha_{(i}a_{jl)}) & + P^h_{\alpha l}(R^\alpha_{(ij)k} - \tilde{R}^\alpha_{(ij)k} + \delta^\alpha_{(i}a_{jk)}) - \\ & -3P^\alpha_{ij}(R^h_{\alpha kl} - \tilde{R}^h_{\alpha kl}). \end{aligned} \tag{14}$$

После перехода здесь в левой части от ковариантной производной тензора $\tilde{R}^h_{ijk}$ в A_n к его ковариантной производной в $\tilde{A}_n$ на основании (11) находим, что

$$\tilde{R}^h_{(ij)[k\zeta l]} = \delta^h_{(i} a_{jk),l} - \delta^h_{(i} a_{jl),k} + \theta^h_{ijkl}, \tag{15}$$

где

$$\theta^h_{ijkl} = R^h_{(ij)[k,l]} - 3\left(P^h_{\alpha l} R^\alpha_{jkl} + P^h_{\alpha j} R^\alpha_{ikl}\right) + 3P^\alpha_{ij} \tilde{R}^h_{\alpha kl} -$$
$$- P^h_{\alpha k}\left(R^\alpha_{(ij)l} + \delta^\alpha_{(i} a_{jl)}\right) + P^h_{\alpha}\left(R^\alpha_{(ij)k} + \delta^\alpha_{(i} a_{jk)}\right) - P^\alpha_{l(i} \tilde{R}^h_{|\alpha|j)k} -$$
$$- \dot{P}^\alpha_{l(i} \tilde{R}^h_{j)\alpha k} + P^\alpha_{k(i} \tilde{R}^h_{|\alpha|j)l} + \dot{P}^\alpha_{k(i} \tilde{R}^h_{j)\alpha l}. \tag{16}$$

Если $\tilde{A}_n$ является Риччи-симметрическим, т. е.

$$\tilde{R}_{ij\zeta k} = 0, \tag{17}$$

где, как и раньше, «ζ» — символ ковариантного дифференцирования в $\tilde{A}_n$, из (15) следует, что

$$(n-1)\, a_{ij,k} = \theta^\alpha_{ijk,\alpha} - \frac{1}{n+2}\, \theta^\alpha_{\alpha(ij)k}. \tag{18}$$

Когда $\tilde{A}_n$ представляет собою риманово пространство с метрическим тензором $\tilde{g}_{ij}$, из (15) после опускания индекса h в $\tilde{V}_n$ и применения тождества Бианки получим

$$-3\tilde{R}_{hikl\zeta j} = \tilde{g}_{j[h} a_{i][k,l]} + \tilde{g}_{k[h} a_{i]j,l} - \tilde{g}_{l[h} a_{i]j,k} + \tilde{g}_{\alpha[h} \theta^\alpha_{i]jkl}.$$

Поднимая здесь индекс h в $\tilde{V}_n$ и возвращаясь к ковариантной производной тензора $\tilde{R}_{hijk}$ в A_n, в соответствии с (11) отсюда находим, что

$$3\tilde{R}^h_{ikl,\,j} = \tilde{g}^{h\beta} \tilde{g}_{i(\beta} a_{j[k),\,l]} - \delta^h_{(i} a_{j[k),\,l]} + S^h_{ijkl}, \tag{19}$$

при тензоре

$$S^h_{ijkl} = -\theta^h_{ijkl} - \tilde{g}^{h\beta} \tilde{g}_{i\alpha} \theta^\alpha_{\beta jkl} +$$
$$+ 3\left(-P^h_{j\alpha} \tilde{R}^\alpha_{ikl} + P^\alpha_{ji} \tilde{R}^h_{\alpha kl} + P^\alpha_{jk} \tilde{R}^h_{i\alpha l} + P^\alpha_{jl} \tilde{R}^h_{ik\alpha}\right), \tag{20}$$

причем ковариантную производную тензора a_{ij} здесь мы считаем выраженной в соответствии с уравнениями (18).

Наконец, из (11) следует, что

$$\tilde{g}_{ij,\,k} = P^\alpha_{ki} \tilde{g}_{\alpha j} + P^\alpha_{kj} \cdot \tilde{g}_{\alpha i}. \tag{21}$$

Очевидно, уравнения (21), (13), (18), (19) в данном пространстве A_n представляют собою систему типа Коши относительно функций

$$\tilde{g}_{ij}(x),\ P^h_{ij}(x),\ a_{ij}(x),\ \tilde{R}^h_{ijk}(x), \tag{22}$$

которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера

$$\tilde{g}_{ij}(x)=\tilde{g}_{ji}(x), \quad |\tilde{g}_{ij}|\neq 0,$$
$$P^h_{ij}(x)=P^h_{ji}(x), \quad a_{ij}(x)=a_{ji}(x).$$
$$\tilde{g}_{h\alpha}\tilde{R}^\alpha_{ijk}+\tilde{g}_{i\alpha}\tilde{R}^\alpha_{hjk}=0, \tag{23}$$
$$\tilde{R}^h_{i(jk)}=\tilde{R}^h_{(ijk)}=0.$$

Тем самым доказывается

Теорема 3. Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало каноническое почти геодезическое отображение $\tilde{\pi}_1$ на Риччи-симметрическое риманово пространство $\tilde{V}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши (21), (13), (18), (19) и (23) относительно функций (22).

Если пространство $\tilde{A}_n$ плоское, из (13), (18) и (16) имеем

$$\begin{aligned} 3P^h_{ij,k}&=-3P^\alpha_{ij}P^h_{k\alpha}+R^h_{(ij)k}+a_{(ij}\delta^h_{k)}, \\ (n-1)\,a_{ij,k}&=T^\alpha_{ijk,\alpha}-\frac{1}{n+2}T^\alpha_{\alpha(ij)k}, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} T^h_{ijk}&=R^h_{(ij)[k,l]}-3\,(P^h_{\alpha l}R^\alpha_{jkl}+P^h_{\alpha j}R^\alpha_{ikl})- \\ &-P^h_{\alpha k}(R^\alpha_{(ij)l}+\delta^h_{(l}a_{j)l})+P^h_{\alpha l}\,(R^\alpha_{(ij)k}+\delta^h_{(l}+\delta^h_{(l}a_{jk)}). \end{aligned} \tag{25}$$

Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 4 (Н. С. Синюков [16]). Пространство аффинной связности A_n является n—2 проективным первого типа, если в нем существует решение системы типа Коши (24) относительно симметричных тензоров $P_{ij}{}^h$ и a_{ij}.

Эта теорема дает достаточный тензорный признак для n—2 проективных пространств аффинной связности первого типа.

Однако, как отмечалось ранее, все n—2 проективные пространства первого типа получаются из пространств, удовлетворяющих теореме 4, при помощи, может быть, только геодезического преобразования их объектов связности.

§ 3. ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ВТОРОГО ТИПА π_2

а) При почти геодезическом отображении $\pi_2: A_n\to\bar{A}_n$, в соответствии с уравнениями (9), каждая геодезическая линия A_n переходит в почти геодезическую $\bar{A}_n$, для которой поле компланарного двумерного распределения E_2 определяется касательным вектором λ^h и вектором $F^h_\alpha\lambda^\alpha$, являющимся результатом воздействия на касательный вектор аффинора F_i^h.

1. Отображение $\pi_2: A_n \to \overline{A}_n$ называется удовлетворяющим условию взаимности, если обратное ему отображение $\pi_2^{-1}: \overline{A}_n \to \to A_n$ также представляет собою почти геодезическое отображение второго типа π_2 (соответствующее тому же аффинору) (Н. С. Синюков [17], [18]).

Из (9) и аналогичных им уравнений в пространстве $\overline{A}_n$ следует, что не нарушая общности исследования, можно считать, что, $\pi_2: A_n \to \overline{A}_n$ удовлетворяет условию взаимности тогда и только тогда, когда

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = e\delta^h_i \, (e = \pm 1, 0). \tag{26}$$

Вследствие этого, уравнения (9) принимают вид

$$P^h_{ij} = \overline{\Gamma}^h_{ij} - \Gamma^h_{ij} = \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \sigma_{(i}F^h_{j)}, \tag{27}$$

$$F^h_{(i,\,j)} = \mu_{(i}F^h_{j)} + \nu_{(i}\delta^h_{j)}, \tag{28}$$

где ковекторы ψ_i, σ_j, μ_k и ν_l, вообще говоря, уже другие. Таким образом, (26), (27) и (28) представляют собою основные уравнения почти геодезических отображений второго типа, удовлетворяющих условию взаимности, которые мы будем обозначать $\pi_2(e) : A_n \to \overline{A}_n$.

Аффинорную структуру на дифференцируемом многообразии, удовлетворяющую условиям (26), для краткости назовем e-структурой (Н. С. Синюков [17]). Если $e = +1$, мы имеем структур почти произведения, при $e = -1$ — почти комплексную структуру и, наконец, при $e = 0$ — почти контактную структуру.

Легко видеть, что в пространстве A_n, в котором существует e-структура F_i^h, удовлетворяющая условиям (28), кривые, заданные функциями вида (1), для которых выполняются уравнения

$$\lambda^h_{,\alpha}\lambda^\alpha = a\lambda^h + bF^h_\alpha\lambda^\alpha,$$

при некоторых функциях $a(t)$ и $b(t)$, являются почти геодезическими линиями A_n. Для каждой из этих, так называемых F-кривых, компланарное двухмерное распределение E_2 определяется векторами λ^h и $\lambda^\alpha F^h_\alpha$. Из (26), (27) и (28) следует, что отображение $\pi_2(e): A_n \to \overline{A}_n$ каждую F-кривую пространства A_n переводит в F-кривую $\overline{A}_n$. Более того, инвариантность F-кривых является характеристическим свойством отображения $\pi_2(e): A_n \to \overline{A}_n$.

При $e \neq 0$ уравнения (28) эквивалентно представляются форме

$$F^h_{i,j} = \nu_i \delta_j^h + \mu_i F_j^h + \frac{e}{4} N^h_{i\alpha} F^\alpha_j, \tag{29}$$

где N^h_{ij} — тензор Нейенхейса e-структуры F_i^h, причем

$$\nu_i + \mu_\alpha F^\alpha_i = 0. \tag{30}$$

Итак, пространство A_n допускает отображение $\pi_2(e)$ при $e \neq 0$ тогда и только тогда, когда в нем существует аффинорная структура $F_i^h (\neq \pm \delta_i^h)$, удовлетворяющая условиям (26) и (28) или (29), при μ_i и ν_i, связанных соотношениями (30).

Описание всех пространств, допускающих отображения $\pi_2(e)$ дает следующая теорема.

Теорема 5 (Н. С. Синюков [17], [18]). Совокупность объектов связности всех пространств A_n, допускающих отображения $\pi_2(e)$ $(e \neq 0)$, соответствующих данной e-структуре F_i^h, определяется формулой

$$\Gamma^h_{ij} = \underset{0}{\Gamma}{}^h_{ij} + e\tau^h_{ij} + \tau^\beta_{\alpha(i} F^\alpha_{j)} F^h_\beta + \tau^h_{\alpha\beta} F^\alpha_i F^\beta_j, \tag{31}$$

$$\underset{0}{\Gamma}{}^h_{ij} = \check{\Gamma}^h_{ij} - \frac{1}{2}\left(\mu_{(i}\delta^h_{j)} + e\nu_{(i} F^h_{j)}\right) -$$

$$- \frac{1}{8} e \left[F^\alpha_i \left(3F^h_{\alpha \vee j} - F^h_{j \vee \alpha}\right) + F^\alpha_j \left(3F^h_{\alpha \vee i} - F^h_{i \vee \alpha}\right)\right]. \tag{32}$$

Здесь $\check{\Gamma}^h_{ij}$ — некоторая (произвольная) связность без кручения, «$\vee$» — символ ковариантного дифференцирования по этой связности, μ_i и ν_i — некоторые ковекторы, удовлетворяющие соотношениям (30), τ^h_{ij} — произвольный симметричный по нижним индексам тензор.

Подчеркнем, что при произвольной связности $\check{\Gamma}^h_{ij}$ в (32) тензор τ^h_{ij} в (31) можно считать равным нулю и, наоборот, при произвольном тензоре τ^h_{ij} в (31) связность $\check{\Gamma}^h_{ij}$ в (32) можно считать фиксированной.

2. Отображение $\tilde{\pi}_2(e): A_n \to \tilde{A}_n$ называется каноническим, если в общей по отображению системе координат между объектами связности Γ^h_{ij} и $\tilde{\Gamma}^h_{ij}$ данных пространств имеет место зависимость

$$\tilde{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \sigma_{(i} F^h_{j)}. \tag{33}$$

Аффинор F_i^h здесь предполагается удовлетворяющим условиям (26) естественно.

Очевидно, любое отображение $\pi_2(e): A_n \to \bar{A}_n$ можно представить в виде произведения канонического отображения $\tilde{\pi}_2(e): A_n \to \tilde{A}_n$ на геодезическое отображение $\gamma: \tilde{A}_n \to \bar{A}_n$.

Из (33) и (26) вытекает

Теорема 6 (Н. С. Синюков [17], [18]). При каноническийких почти геодезических отображениях $\tilde{\pi}_2(e)$ $(e\neq 0)$ инвариантны следующие геометрические объекты

$$\underset{1}{T}{}^h_{ij}=\Gamma^h_{ij}+\frac{1}{e-F^2}\left[(F\Gamma^\alpha_{\alpha j}-F^\gamma_j\Gamma^\beta_{\beta\alpha})F_i{}^h+(F\Gamma^\alpha_{\alpha i}-F^\gamma_i\Gamma^\beta_{\beta\alpha})F_j{}^h\right],$$

$$(e-F^2\neq 0),$$

$$\underset{2}{T}{}^h_{ij}=T^h_{ij}+eF^h_\alpha F^\alpha_{(i,j)}-\frac{e}{n+1}F^\beta_\alpha(F^\alpha_{(\beta,j)}\delta_i{}^h+F^\alpha_{(\beta,i)}\delta_j{}^h),$$

$$\hat{W}^h_{ijk}=\hat{R}^h_{ijk}+\frac{1}{n+1}\hat{R}_{[jk]}\delta_i{}^h-$$

$$-\frac{1}{n^2-1}\left[(n\hat{R}_{ij}+\hat{R}_{ji})\delta_k{}^h-(n\hat{R}_{ik}+\hat{R}_{ki})\delta_j{}^h\right]. \qquad (34)$$

Здесь T^h_{ij} — проективные параметры Томаса A_n,

$$F=F^\alpha_\alpha,\quad \hat{R}_{ij}=\hat{R}^\alpha_{ij\alpha},$$

$$\hat{R}^h_{ijk}=-R^h_{ijk}+eF^h_\alpha(F^\beta_i R^\alpha_{\beta jk}+R^\alpha_{\beta i[k}F^\beta_{j]}-$$

$$-F^\alpha_{[j,k]}-eF^\nu_\beta F^\beta_{(i,j)}F^\alpha_{k,\nu}+eF^\nu_\beta F^\beta_{(i,k)}F^\alpha_{j,\nu}),$$

R^h_{ijk} — тензор Римана A_n, R_{ij} — тензор Риччи, «,» — символ ковариантной производной в A_n. Подчеркнем, что при построении данных геометрических объектов дифференциальные условия (29) не использовались, хоть они при $\tilde{\pi}_2(e)$ и должны иметь место. Следовательно, данные геометрические объекты инвариантны при более общих отображениях, характеризующихся только условиями (26) и (33).

Ясно, что геометрические объекты $\underset{1}{T}{}^h_{ij}$ и $\underset{2}{T}{}^h_{ij}$ являются аналогами проективных параметров Томаса, а $\hat{W}^h_{ijk}$ — тензора Вейля теории геодезических отображений пространств аффинной связности. Наконец, в $\tilde{A}_n$ соответствующие объекты строятся по тому же закону (34) с участием аффинора $F_i{}^h$ и его ковариантных производных в $\tilde{A}_n$.

Нетрудно также убедиться в том, что тождественное обращение в нуль геометрического объекта $\hat{W}^h_{ijk}$ пространства A_n совместно с (26) дают достаточный тензорный признак для того, чтобы A_n было $n-2$ проективным пространством второго типа.

Отметим, что позже первоначальные факты теории отображений $\pi_2(e)$ при $e=+1$, условии интегрируемости структуры почти произведения $F_i{}^h$, а также при $\mu_i=\nu_i=0$ рассматривала Прванович [32].

В целом же теория почти геодезических отображений $\pi_2(e)$ представляет собою для пространств аффинной связности без кручения чисто геометрическое обобщение теории аналитически планарных отображений почти комплексных многообразий, которой за последние два с половиной десятилетия были посвящены работы многих авторов (см., например, Д. В. Беклемишев [1], Яно [37]).

б) Предметом изучения некоторых авторов были специальные отображения π_2 римановых пространств.

Отображение π_2 риманова пространства V_n на риманово пространство $\overline{V}_n$ в общей по отображению системе координат характеризуется основными уравнениями (7) и (9), в которых Γ^h_{ij} и $\overline{\Gamma}^h_{ij}$ — символы Кристоффеля второго рода V_n и $\overline{V}_n$, выведенные из их метрических тензоров g_{ij} и $\overline{g}_{ij}$, соответственно.

1. Так доказано (В. С. Собчук [19]), что если при $\pi_2:V_n\to\overline{V}_n$ среди корней характеристического уравнения $|\overline{g}_{ij}-\rho g_{ij}|=0$ имеется $p\geqslant 3$ различных и $F^\alpha_i g_{\alpha j}=\overline{g}_{ij}$, то π_2 является аффинным отображением. Аналогично, если при $\pi_2:V_n\to\overline{V}_n$ сохраняется n-ортогональная система гиперповерхностей, инвариантная относительно аффинора $F_i{}^h$, и среди корней уравнения $|F_i{}^h-\rho\delta_i{}^h|=0$ имеется $q\neq 2$ различных, π_2 вырождается в геодезическое или аффинное отображение. При некоторых дополнительных условиях рассматривались также отображения $\pi_2(e):V_n\to\overline{V}_n$, когда $\overline{V}_n$ симметрическое (В. С. Собчук [19]).

Наконец, показано, что риманово пространство V_n, допускающее отображение $\pi_2(e)$ на пространство постоянной кривизны $\overline{V}_n$ $(n>2)$ при условии $g_{j\alpha}F^\alpha_i=g_{i\alpha}F^\alpha_j$ и при градиентных векторах ψ_i, σ_j, является специальным симметрическим ространством (В. С. Шадный [22]).

2. Специальный случай отображений $\pi_2(e)$ представляют собою голоморфно-проективные отображения (ГПО) келеровых пространств с сохранением комплексной структуры, которые изучались многими авторами (Д. В. Беклемишев [1], Яно [37]).

В последние годы в теории ГПО келеровых пространств получены новые фундаментальные результаты (В. В. Домашев, Й. Микеш [2]; Й. Микеш [8], [9]).

В общей по отображению системе координат голоморфно-проективное отображение келерова пространства K_n на келерово пространство $\overline{K}_n$ с сохранением комплексной структуры $F_i{}^h$ характеризуется следующими основными уравнениями (Оцуки, Тасиро [31])

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}=\Gamma^h_{ij}+P^h_{ij}, \tag{35}$$

$$P^h_{ij}=\psi_{(i}\delta^h_{j)}-\psi_\alpha F^\alpha_{(i}F^h_{j)}, \tag{36}$$

$$F^h_\alpha F^\alpha_i=-\delta_i{}^h, \tag{37}$$

$$g_{i\alpha}F^\alpha_j+g_{j\alpha}F^\alpha_i=0, \quad \overline{g}_{i\alpha}F^\alpha_j+\overline{g}_{j\alpha}F^\alpha_i=0, \tag{38}$$

$$F^h_{i,j}=0, \quad F^h_{i|j}=0. \tag{39}$$

Здесь Γ^h_{ij} и $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ — символы Кристоффеля второго рода K_n и $\bar{K}_n$, выведенные из их метрических тензоров g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$, соответственно; ψ_i — некоторый (градиентный) вектор; «,» — символ ковариантной производной в K_n, а «|» — в $\bar{K}_n$. Если $\psi_i=0$, ГПО является аффинным и называется тривиальным.

Как известно (Яно [37]), тензор голоморфно-проективной кривизны

$$P^h_{ijk}=R^h_{ijk}-\frac{1}{n+2}\left(\delta^h_{[k}R_{j]i}+F^h_{[k}R_{j]\alpha}F^\alpha_i+2F^h_iR_{\alpha k}F^\alpha_j\right) \tag{40}$$

инвариантен относительно ГПО. Тождественное его обращение в нуль необходимо и достаточно для того, чтобы K_n ($n>2$) было пространством постоянной голоморфной кривизны, а также для того, чтобы K_n допускало ГПО на плоское пространство (Тасиро [35], Исихара [29]).

Вследствие (35), (36) и (38) на метрический тензор $\bar{g}_{ij}$ пространства $\bar{K}_n$ в K_n возникают уравнения

$$\bar{g}_{ij,k}=2\psi_k\bar{g}_{ij}+\psi_{(i}\bar{g}_{j)k}+F^\alpha_{(i}F^\beta_{j)}\psi_\alpha\bar{g}_{\beta k}. \tag{41}$$

Для нахождения пространств $\bar{K}_n$, на которые данное пространство K_n допускает ГПО, необходимо исследовать систему уравнений (41) и (38). Однако (41) — нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент тензора $\bar{g}_{ij}$, не являющаяся также системой типа Коши, поскольку вектор $2\psi_i=\frac{1}{n+2}\frac{\partial}{\partial x^i}\ln\left|\frac{\bar{g}}{g}\right|$, где $\bar{g}$ и g — определители, составленные из компонент метрических тензоров пространств $\bar{K}_n$ и K_n, содержит частные производные функций $\bar{g}_{ij}$. Поэтому к уравнениям (41) непосредственно не могут быть применены известные регулярные методы исследования.

Но для изучения системы уравнений (41) оказалось возможным эффективно использовать методы, которые были развиты в теории геодезических отображений римановых пространств (Н. С. Синюков [13], [15]).

Воспользовавшись градиентностью вектора ψ_i, введем в рассмотрение тензор

$$a_{ij}=e^{2\psi}\bar{g}^{\alpha\beta}g_{\alpha i}g_{\beta j}, \tag{42}$$

где $\bar{g}^{ij}$ — элементы обратной матрицы для компонент метрического тензора $\bar{K}_n$. Из (41) для него получим уравнения

$$a_{ij,k}=\lambda_{(i}g_{j)k}+\bar{\lambda}_{(i}F_{j)k}, \tag{43}$$

где $F_{jk} = F^{\alpha}_{k} g_{\alpha j}$, $\overline{\lambda}_i = \lambda_{\alpha} F^{\alpha}_{i}$, $\lambda_i = -e^{2\psi} \overline{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} \psi_{\beta}$ — градиентный вектор.

Система (43) эквивалентна (41), но уже линейна относительно тензора a_{ij} в данном пространстве K_n, хотя и не является системой типа Коши. На основании (38) и (42) для тензора a_{ij} должны иметь место соотношения

$$a_{i\alpha} F^{\alpha}_{j} + a_{j\alpha} F^{\alpha}_{i} = 0. \tag{44}$$

Из условий интегрируемости уравнений (43) следует, что ($n > 2$)

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} - a_{\alpha\beta} R^{\alpha}_{.ij.}{}^{\beta} + a_{i\alpha} R^{\alpha}_{j}, \tag{45}$$

где R^{h}_{ijk} — тензор Римана, а R^{i}_{j} — тензор Риччи K_n, μ — инвариант. В свою очередь, из условий интегрируемости уравнений (45) вытекает, что

$$\mu_{,i} = 2\lambda_{\alpha} R^{\alpha}_{i}. \tag{46}$$

В итоге получается следующая теорема.

Теорема 7 (В. В. Домашев, Й. Микеш [2]). Для того чтобы келерово пространство K_n ($n > 2$) допускало нетривиальное голоморфно-проективное отображение с сохранением комплексной структуры, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (43), (45), (46) и (44) имела в нем нетривиальное решение

$$a_{ij} (= a_{ji}), \quad \lambda_i (\neq 0), \quad \mu. \tag{47}$$

Уравнения (43), (45), (46), совокупность которых обозначим через (А), образуют в данном K_n линейную систему типа Коши дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных относительно функций (47). Условия интегрируемости уравнений системы (А), совокупность которых вместе с (44) обозначим через (Б), их первые (Б_1), вторые (Б_2) и последующие дифференциальные продолжения являются линейными однородными алгебраическими уравнениями относительно искомых функций (47) с коэффициентами, однозначно определенными пространством K_n.

Поскольку размерность келерова пространства всегда четна, при $n = 2m$ количество неизвестных у нас N_0, где

$$N_0 = (m+1)^2. \tag{48}$$

На основании известной теоремы аналитической теории дифференциальных уравнений оказывается справедливой

Теорема 8 (В. В. Домашев, Й. Микеш [2]). Келерово пространство K_n ($n > 2$) допускает нетривиальное голоморфно-проективное отображение тогда и только тогда, когда система уравнений (Б), (Б_1), (Б_2), ..., ($\text{Б}_{N_0 - 1}$) имеет в нем нетривиальное решение (47).

Эта теорема, по существу, дает нам необходимый и достаточный тензорный признак внутреннего характера для келеровых пространств, допускающих (или не допускающих) нетривиальные ГПО с сохранением комплексной структуры, выраженный, однако, в неявной форме. В совокупности же с теоремой 7 здесь мы имеем инвариантный относительно выбора системы координат регулярный метод, позволяющий для любого келерова пространства K_n $(n>2)$ выяснить вопрос о том, допускает оно нетривиальное ГПО на какое-то пространство $\bar{K}_n$ или нет, а если допускает, то, в принципе, и найти все такие пространства $\bar{K}_n$.

В соответствии с этим, 7 и 8 нужно считать основными теоремами теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств.

Максимальное количество r существенных параметров, от которых в данном пространстве K_n зависит общее решение системы уравнений (А), называется степенью подвижности относительно ГПО. Очевидно $r \leqslant N_0$. Анализ уравнений (Б), (Б$_1$) и (Б$_2$) дает следующие результаты:

Теорема 9 (В. В. Домашев, Й. Микеш [2]). Келеровы пространства K_n $(n>2)$ постоянной голоморфной кривизны и только они имеют степень подвижности относительно ГПО $r=N_0$.

Теорема 10 (Й. Микеш [8], [9]). Для келеровых пространств K_n $(n>4)$, отличных от пространств Эйнштейна, $r \leqslant (m-1)^2+2$.

В то же время показано, что существуют отличные от пространств Эйнштейна K_n, для которых $r \geqslant (m-1)^2$.

Теорема 11 (Й. Микеш [8], [9]). Для келеровых пространств K_n $(n \geqslant 8)$ непостоянной голоморфной кривизны $r \leqslant (m-1)^2+5$:

Теоремами 9—11 обнаруживается лакунарность в распределении степеней подвижности келеровых пространств относительно ГПО с сохранением комплексной структуры, подобная известной лакунарности в порядках полных групп движений аффинно-связных и римановых пространств (И. П. Егоров [3], [4]), а также в распределении степеней подвижности римановых пространств относительно геодезических отображений (Н. С. Синюков [15], [18]).

Условия интегрируемости уравнений (43) на основании уравнений (45) приводятся к виду

$$a_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}_{ijkl} = 0, \tag{49}$$

где

$$T^{\alpha\beta}_{ijkl} = n\delta^{\alpha}_{(i} R^{\beta}_{j)kl} + g_{l(i} \tilde{T}^{\alpha\beta}_{j)k} - g_{k(i} \tilde{T}^{\alpha\beta}_{j)l} -$$
$$- F_{l(i} F^{\gamma}_{j)} \tilde{T}^{\alpha\beta}_{\gamma k} + F_{k(i} F^{\gamma}_{j)} \tilde{T}^{\alpha\beta}_{\gamma},$$
$$\tilde{T}^{\alpha\beta}_{ik} = \delta^{\alpha}_{i} R^{\beta}_{k} - R^{\alpha\ \beta}_{\cdot ik \cdot}.$$

В результате исследования первого дифференциального продолжения уравнений (49) получается

Теорема 12 (В. В. Домашев, Й. Микеш [2]). Келеровы пространства K_n $(n>2)$ непостоянной голоморфной кривизны, удовлетворяющие условиям

$$T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m}+a\overline{T}^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m}=$$
$$=N^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}_{ijklm}T^{(\alpha\beta)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}+\overline{N}^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}_{ijklm}\overline{T}^{(\alpha\beta)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}, \qquad (50)$$

при $a\neq -1$ не допускают нетривиальных ГПО с сохранением комплексной структуры.

В (50) N и $\overline{N}$ — произвольные тензоры соответствующей валентности,

$$\overline{T}^{\alpha\beta}_{ijkl}=F^{\alpha}_{\gamma}F^{\beta}_{\delta}T^{\gamma\delta}_{ijkl}.$$

Очевидно, для симметрических и рекуррентных K_n условия (50) выполняются. Следовательно, симметрические и рекуррентные K_n $(n>2)$ непостоянной голоморфной кривизны не допускают нетривиальных ГПО. В случае пространств с положительно определенной метрикой этот факт несколько раньше был доказан Сакагучи [33] аналогично тому, как в теории геодезических отображений римановых пространств (Н. С. Синюков [11], [15], [18]).

Как известно, в K_n существует нетривиальное бесконечно малое голоморфно-проективное преобразование или группа Ли голоморфно-проективных преобразований тогда и только тогда, когда существует векторное поле ξ_i $(\neq 0)$, удовлетворяющее уравнениям

$$b_{ij,k}=2\psi_k g_{ij}+\psi_{(i}g_{j)k}+\overline{\psi}_{(i}F_{j)k},$$

при $b_{ij}=\xi_{(i,j)}$, где $\psi_i(\neq 0)$ — некоторый градиентный вектор, а $\overline{\psi}_i=F^{\alpha}_{i}\psi_\alpha$ (Исихара [29], Тачибана, Исихара [34]). Однако в этом случае для тензора $a_{ij}=b_{ij}-2\psi g_{ij}$ выполняются уравнения (43), т. е. K_n допускает нетривиальное ГПО. Поэтому из теоремы 12 получается

Следствие. Келеровы пространства K_n $(n>2)$ непостоянной голоморфной кривизны, удовлетворяющие условиям (50), не допускают групп Ли нетривиальных голоморфно-проективных преобразований.

3. Исследуя проблему моделирования путей пробных тел в поле гравитации, А. З. Петров [10] пришел к квазигеодезическим отображениям римановых пространств $V_n \to \overline{V}_n$ $(n=4)$, которые в общей по отображению системе координат характеризуются следующими основными уравнениями

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}=\Gamma^h_{ij}+\psi_{(i}\delta^h_{j)}+\sigma_{(i}F^h_{j)}, \qquad (51)$$

$$\overline{F}_{ij}+\overline{F}_{ji}=0,\ \overline{F}_{ij}=F^{\alpha}_{i}\overline{g}_{\alpha j}, \qquad (52)$$

где Γ^h_{ij} и $\overline{\Gamma}^h_{ij}$ — символы Кристоффеля V_n и $\overline{V}_n$, $F_i^{\,h}$ — аффинор, ψ_i и σ_i — ковекторы, $\overline{g}_{ij}$ — метрический тензор $\overline{V}_n$.

Квазигеодезические отображения дают возможность моделировать свободное движение пробных тел в поле гравитации, определяемом метрическим тензором g_{ij} пространства V_n, движением под действием силы типа Лоренца в поле гравитации, которое определяется метрическим тензором $\bar{g}_{ij}$ пространства $\bar{V}_n$. Такое моделирование представляет интерес и для механических систем, движущихся с n степенями свободы не только в гравитационных, но также в электромагнитных полях или в сплошной среде.

Поэтому целесообразно изучение квазигеодезических отображений римановых пространств произвольной размерности n и произвольной сигнатуры. Поскольку уравнения А. З. Петрова (51) и (52) для квазигеодезических отображений носят тензорный характер, они сохраняют свое значение и в этом общем случае. В то же время (51) совпадают с первыми из уравнений (9) для почти геодезических отображений второго типа π_2.

Принимая во внимание, что квазигеодезические отображения определены с физической точки зрения, а отображения π_2 — с геометрической, целесообразно изучение отображений римановых пространств, которые являются одновременно квазигеодезическими и почти геодезическими отображениями второго типа π_2. Назовем такие отображения квазиголоморфно-проективными (КГПО), если в V_n также имеют место условия вида (52), т. е.

$$F_{ij}+F_{ji}=0, \quad F_{ij}=F_i^{\alpha} g_{\alpha j}. \tag{53}$$

Показано (И. Н. Курбатова [6]), что для КГПО выполняются еще следующие уравнения:

$$F_{\alpha}^{h} F_{i}^{\alpha}=e\delta_{i}^{h}\,(e=\pm 1), \tag{54}$$

$$F^{h}_{(i,j)}=p_{(i}\delta^{h}_{j)}+q_{(i}F^{h}_{j)}, \tag{55}$$

$$F^{h}_{(i|j)}=\bar{p}_{(i}\delta^{h}_{j)}+\bar{q}_{(i}F^{h}_{j)},$$

$$p_i=q_{\alpha}F_i^{\alpha}, \quad \bar{p}_i=\bar{q}_{\alpha}F_i^{\alpha},$$

где « , » — символ ковариантного дифференцирования в V_n, а « | » — в $\bar{V}_n$.

Таким образом, обнаружено, что КГПО являются специальными почти геодезическими отображениями второго типа с условием взаимности $\pi_2(e)$.

Выделен и изучен (И. Н. Курбатова [6]) случай КГПО, когда в уравнениях (55) $p_i=\bar{p}_i=0$. Тогда (55) принимают вид

$$F_{(i,j)}=0, \quad F^{h}_{(i|j)}=0, \tag{56}$$

а векторы ψ_i и σ_i в (51) связаны следующим образом

$$\psi_i=\sigma_{\alpha}F_i^{\alpha}. \tag{57}$$

Риманово пространство, в котором существует аффинорная структура F_i^h $(\neq\pm\delta_i^h)$, удовлетворяющая условиям (53), (54) и (56), называется K-пространством и обозначается K_n. Когда e-структура $F_i{}^h$ интегрируема, при $e=-1$ K-пространство будет келеровым пространством, а при $e=+1$ — гиперболическим келеровым пространством, поскольку тогда $F^h_{i,j}=0$. Справедливо и обратное утверждение.

Итак, (51), (52), (53), (54), (56) и (57) представляют собою основные уравнения КГПО K-пространств $K_n \to \bar{K}_n$ с сохранением e-структуры $F_i{}^h$, на некоторых результатах исследования которых мы остановимся.

Доказано (И. Н. Курбатова [7]), что существует несколько инвариантных относительно КГПО $K_n \to \bar{K}_n$ одноименных геометрических объектов. Таковыми, например, являются

$$\overset{1}{T}{}^h_{ij}=\Gamma^h_{ij}+\frac{1}{n(n+2)}\left[\delta^h_i\left(eF^\alpha_{\beta\gamma}F^\beta_\alpha F^\gamma_j-(n+1)\Gamma^\alpha_{\alpha j}\right)+\right.$$
$$+\delta_i{}^h\left(e\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}F^\beta_\alpha F^\gamma_i-(n+1)\Gamma^\alpha_{\alpha i}\right)+$$
$$\left.+eF_i{}^h\left(\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}F^\beta_j-(n+1)\Gamma^\alpha_{\beta j}F^\beta_\alpha\right)+eF_j{}^h\left(\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}F^\beta_i-(n+1)F^\beta_\alpha\Gamma^\alpha_{\beta i}\right)\right];$$
$$\overset{2}{T}{}^h_{ij}=\Gamma^h_{ij}-\frac{1}{n+2}\left[\Gamma^\alpha_{\alpha(i}\delta^h_{j)}+e\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}F^\beta_{(i}F^h_{j)}\right];$$

$$W^h_{ijk}=R^h_{ijk}-\frac{1}{n^2-4}\left[\delta^h_{[k}M_{j]i}+eF^h_{[k}M_{j]i}+2eF_i{}^h\tilde{M}_{jk}\right], \tag{58}$$

где

$$M_{ki}=(n+1)R_{ik}-3eR^\alpha_{\gamma k\beta}F^\gamma_i F^\beta_\alpha,$$
$$\tilde{M}_{ki}=(n-1)R^\alpha_{ik\beta}F^\beta_\alpha-R_{\alpha k}F^\alpha_i.$$

Здесь R^h_{ijk} — тензор Римана, а $R_i{}^h$ — тензор Риччи K_n $(n>2)$. Аналогично, естественно, выражаются в $\bar{K}_n$ объекты $\overset{1}{\bar{T}}{}^h_{ij}$, $\overset{2}{\bar{T}}{}^h_{ij}$, $\bar{W}^h_{ijk}$.

Из (58) вытекает заключение о том, что K_n, допускающее КГПО на плоское пространство, является при $e=\pm1$ келеровым пространством постоянной голоморфной кривизны, а при $e=+1$ гиперболическим келеровым пространством постоянной голоморфной кривизны (Прванович [32]).

Подобно тому, как в теории ГПО келеровых пространств, при изучении основных уравнений КГПО $K_n \to \bar{K}_n$ получена система дифференциальных уравнений типа Коши (43)—(45) и

$$\mu_{,i}=2\lambda_\alpha R^\alpha_i+\frac{1}{n+2}\left[2a_{\alpha\beta}R^{\alpha}_{\cdot i}{}^{\beta}_{\cdot\cdot}-a_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot,i}\right], \tag{59}$$

существование нетривиального решения которой необходимо и достаточно для того, чтобы K_n допускало КГПО на $\bar{K}_n$ с сохранением e-структуры. Поэтому имеет место утверждение, аналогичное теореме 7 (И. Н. Курбатова [6]).

В результате исследования условий интегрируемости первой группы этой системы дифференциальных уравнений (43)

$$\tilde{a}_{\alpha(j}R^\alpha_{\cdot i)kl}=g_{k(i}\lambda_{j)},_l-g_{l(i}\lambda_{j)},_k-F_{k(i}\bar{\lambda}_{j)},_l+F_{l(i}\bar{\lambda}_{j)},_k+2\bar{\lambda}_{(i}F_{j)k,l}$$

обнаружено (И. Микеш), что если пространство K_n допускает КГПО с сохранением e-структуры F_i^h, то последняя по необходимости является интегрируемой. Следовательно, КГПО $K_n \to \bar{K}_n$ при $e = -1$ представляет собою ГПО келеровых пространств с сохранением почти комплексной структуры, а при $e = +1$ — ГПО гиперболических келеровых пространств с сохранением структуры почти произведения.

Дано определение понятия степени подвижности r гиперболических келеровых пространств относительно ГПО как максимального количества существенных параметров, от которых в пространстве K_n зависит общее решение системы дифференциальных уравнений (43)—(45), (59). Здесь оказываются справедливыми теоремы, аналогичные теоремам 9, 10. Для гиперболических келеровых пространств непостоянной голоморфной кривизны получено утверждение более слабое, чем теорема 11, а именно:

Теорема 13 (И. Н. Курбатова [6]). Для гиперболических келеровых пространств K_n $(n \geqslant 4)$ непостоянной голоморфной кривизны $r \leqslant m(m-3)-1$ $(n=2\,m)$.

Имеет место также теорема, аналогичная теореме 12, об однозначной определенности гиперболических келеровых пространств относительно ГПО с сохранением структуры почти произведения.

§ 4. ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ТИПА π_3

В соответствии с (7) и (10), основные уравнения отображений $\pi_3 : A_n \to \bar{A}_n$ имеют вид:

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \sigma_{ij}F^h, \qquad (60)$$

$$F^h_{,i} = \nu\delta_i^h + \mu_i F^h. \qquad (61)$$

При отображении π_3 каждая геодезическая линия A_n, заданная уравнениями вида (1), переходит в почти геодезическую линию $\bar{A}_n$, для которой компланарное двумерное распределение E_2 определяется касательным вектором λ^h и вектором $F^h(x)$. В то же время из (61) следует, что кривые A_n, определяющиеся функциями вида (1), для которых удовлетворяются уравнения

$$\lambda^h_{,\alpha}\lambda^\alpha = a\lambda^h + bF^h(x)$$

при некоторых инвариантах $a(t)$ и $b(t)$, являются почти геодезическими линиями пространства A_n с указанным полем компланарного двухмерного распределения $E_2\{\lambda^h, F_h\}$. Вследствие (60), они инвариантны относительно отображения $\pi_3 : A_n \to \bar{A}_n$, соответствующего векторному полю $F^h(x)$. Очевидно, этим условием отображения π_3 характеризуются полностью.

Естественно, что пространство A_n допускает отображение

π_3 в том и только том случае, когда в нем существует векторное поле $F^h(x)$ $(\neq 0)$, удовлетворяющее уравнениям (61). Это так называемое торсообразующее (Яно [38]) или геодезическое (З. Я. Шапиро [23]) векторное поле, в случае риманова пространства при $\mu_i \equiv 0$ — конциркулярное (Фиалков [28], Яно [38]) или эквидистантное (Н. С. Синюков [12], [18]) и, наконец, при $\mu_i = 0$, $\nu = \mathrm{const}$ — поле сходящихся направлений (П. А. Широков [24]).

Без особых затруднений находятся канонические виды объектов связности или метрик римановых пространств, в которых существуют указанные векторные поля. Тем самым дается описание всех аффинносвязных и римановых пространств, допускающих отображения π_3.

При отображении $\pi_3 : A_n \to \bar{A}_n$ инвариантны следующие одноименные геометрические объекты (Н. С. Синюков [18])

$$\underset{3}{T}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + eF^h q_{i,j} + (\delta_i^h - eF^h q_i)\, p_j + (\delta_j^h - eF^h q_j)\, p_i;$$

$$p_i = \frac{1}{n}\left[\Gamma^\alpha_{\alpha i} + eF^\alpha q_{\alpha,i} + \frac{q_i}{n-1}\left(eF^\beta F^\alpha_{\alpha\beta} + F^\alpha F^\beta q_{\alpha\beta}\right)\right];$$

$$\begin{aligned} \underset{3}{W}{}^h_{ijk} &= R^h_{ijk} + eF^h q_\alpha R^\alpha_{ijk} + (\delta_k^h - eF^h q_k)\, p_{ij} - \\ &- (\delta_j^h - eF^h q_j)\, p_{ik} - (\delta_i^h - eF^h q_i)\, p_{[jk]}; \\ (n-2)\, p_{ij} &= -R_{ij} - eq_\alpha F^\beta R^\alpha_{ij\beta} + \\ &+ \frac{1}{n}\left[R^\alpha_{\alpha ji} - eq_\alpha F^\beta R^\alpha_{\beta ji} + eq_j F^\alpha R_{i\alpha} + \right. \\ &\left. + eq_i\left(-F^\beta R^\alpha_{\alpha j\beta} + eq_\alpha F^\beta F^\gamma R^\alpha_{\beta j\gamma}\right)\right]. \end{aligned} \qquad (62)$$

Здесь q_i — произвольный вектор, удовлетворяющий условию $q_\alpha F^\alpha = e$ $(= \pm 1)$, R^h_{ijk} — тензор Римана, а R_{ij} — тензор Риччи A_n, «, » обозначает ковариантную производную в A_n.

Указанные инвариантные геометрические объекты не имеют внутреннего характера, поскольку векторы F^h, q_i мы не можем выразить явно через геометрические объекты A_n. Такого рода ситуация встречается весьма часто (см. предыдущий параграф). Однако эти геометрические объекты нередко бывают весьма полезными.

Так, если мы рассмотрим отображение $\pi_3 : A_n \to \bar{A}_n$, предполагая $\bar{A}_n$ плоским, то из формул вида (62) в A_n получим, что $\underset{3}{\bar{W}}{}^h_{ijk} \equiv 0$, а в силу инвариантности относительно π_3 данного тензора, придем к заключению, что для A_n тензор $\underset{3}{W}{}^h_{ijk} \equiv 0$. Таким образом, для того чтобы A_n было $n-2$ проективным пространством третьего типа, необходимо, чтобы для него тензор $\underset{3}{W}{}^h_{ijk}$, определенный в (62), тождественно обращался нуль. В случае риманова пространства V_n и неизотропного вектора F^h (удовлетворяющего уравнениям (61)), указанное условие и достаточно, поскольку из него мы получаем тензорный признак субпроективных пространств основного случая (Н. С. Синюков [18]). Видимо, это заключение будет справедливо и тогда, когда вектор F^h изотропен.

Вцелом же, как легко видеть, n—2 проективные пространства A_n третьего типа — это субпроективные пространства (В. Ф. Каган [5]).

Рассматривая в случае римановых пространств конформные отображения, являющиеся почти геодезическими отображениями третьего типа π_3, мы приходим к конциркулярным отображениям (Фиалков [28], Яно [38]), а из (62) получим тензор конциркулярной кривизны (Н. С. Синюков [17, 18]).

§ 5. ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЩИХ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

В предыдущих параграфах рассматривались почти геодезические отображения пространств аффинной связности без кручения.

Однако в основе определения почти геодезических линий и почти геодезических отображений лежат геометрические соображения, которые сохраняют свое значение и для общих пространств аффинной связности (с кручением).

Естественно, что исследование почти геодезических отображений пространств аффинной связности с кручением $\pi: A_n \to \bar{A}_n$ представляет большой интерес. В последнее время этому кругу вопросов было посвящено несколько работ, на основных результатах которых мы и остановимся (Н. В. Яблонская [25], [26], [27]).

1. В пространствах аффинной связности с кручением сохраняет свое значение понятие почти геодезических линий, приведенное в п. I § I, их уравнения (3), в которых ковариантная производная берется в пространстве A_n с кручением, а также теорема 1. Остается корректным определение почти геодезического отображения $\pi: A_n \to \bar{A}_n$ пространств аффинной связности с кручением, их основные уравнения (6) и соотношения (7), когда тензор P^h_{ij} не симметричен. Из уравнений (6), аналогично предыдущему, получается вывод о существовании трех типов почти геодезических отображений π_1, π_2, π_3. Основные уравнения отображений $\pi_1: A_n \to \bar{A}_n$ имеют вид (8).

Основные уравнения $\pi_2: A_n \to \bar{A}_n$ таковы:

$$S^h_{ij} = \varphi_{(i}\delta^h_{j)} + \psi_{(i}F^h_{j)},$$

$$F^h_{(i,j)} + \psi_{(i}F^\alpha_{j)}F^h_\alpha + F^\alpha_{(i}K^h_{j)\alpha} = \sigma_{(i}\delta^h_{j)} + \nu_{(i}F^h_{j)}, \qquad (63)$$

где S^h_{ij}—симметричная, а K^h_{ij}—кососимметричная составляющие тензора P^h_{ij} деформации объекта связности, F_i^h — аффинор, φ_i, ψ_j, σ_k и ν_i — ковекторы.

Для отображений $\pi_3: A_n \to \bar{A}_n$ основные уравнения имеют вид

$$p^h_{ij} = \varphi_{(i}\delta^h_{j)} + \psi_{ij}F^h,$$

$$F^h_{,j} = F^h p_j + q\delta_j^h + K^h_{j\alpha}F^\alpha, \qquad (64)$$

где F^h — контравариантный вектор, φ_i, ψ_j — ковариантные векторы, ψ_{ij} — симметричный тензор типа (0,2). При этом в (63) и (64) запятая обозначает ковариантное дифференцирование в A_n.

2. Наибольший интерес представляют отображения π_2, так как они представляют собою обобщение аналитически планарных отображений почти комплексных многообразий.

При изучении отображений π_2 аффинор F_i^h, не нарушая общности, можно считать неособенным.

В отличие от отображений π_2 пространств аффинной связности без кручения из условий взаимности

$$\psi_{(i}F^\alpha_{j)}F^h_\alpha + F^\alpha_{(i}K^h_{j)\alpha} = p_{(i}\delta^h_{j)} + q_{(i}F^h_{j)}$$

отображений π_2 общих пространств аффинной связности не вытекает естественным образом каких-то алгебраических условий на аффинорную структуру F_i^h.

а) Поэтому выделяются отображения π_2, удовлетворяющие условиям взаимности, при которых имеют место соотношения

$$F^{2h}_i = F^h_\alpha F^\alpha_i = e\delta_i^h \quad (e = \pm 1),$$

называемые отображениями $\pi_2^2(e)$.

Имеет место

Теорема 14 (Н. В. Яблонская [26]). Совокупность всех объектов связности Γ^h_{ij} общих пространств аффинной связности A_n, допускающих отображения $\pi_2^2(e)$, определяется формулой

$$\Gamma^h_{ij} = \hat{\Gamma}^h_{ij} - \frac{1}{2}e\left(H^\alpha_{ij} - F^\alpha_{i\wedge j}\right)F^h_\alpha + B^h_{ij} + eB^\alpha_{\beta j}F^\beta_i F^h_\alpha.$$

Здесь $\hat{\Gamma}^h_{ij}$ — произвольная связность с кручением, B^h_{ij} — произвольный тензор, причем

$$F^h_{i,j} = H^h_{ij},$$

$$H^h_{ij} = r_i\delta_j^h + \varphi_i F_j^h + \frac{1}{2}\hat{N}^h_{ij} +$$

$$+ D^h_{\alpha j}F^\alpha_i - D^h_{\alpha i}F^\alpha_j + D^\alpha_{ij}F^h_\alpha + eD^\alpha_{\beta\gamma}F^h_\alpha F^\beta_i F^\gamma_j,$$

где D^h_{ij} — произвольный кососимметричный тензор, $\hat{N}^h_{ij}$ определяется тензором Нейенхейса по формулам $\hat{N}^h_{ij} = N^h_{i\alpha}F^\alpha_j$; r_i, и φ_j — некоторые ковекторы, связанные условием $r_i + F^\alpha_i\varphi_\alpha = 0$.

Когда $e=-1$ и $H_{ij}^{h}=0$, отсюда получаем все связности Обата [30] теории почти комплексных многообразий.

Отображение $\pi_2^2(e): A_n \to \bar{A}_n$ естественным образом индуцирует отображение соответствующих пространств аффинной связности без кручения $\tilde{A}_n$ и $\tilde{\bar{A}}_n$, которое при некоторых условиях на тензор кручения A_n является почти геодезическим (см. § 3) и в этом случае обозначается $\tilde{\pi}_2{}^2(e)$. Оказывается, что относительно отображений $\tilde{\pi}_2{}^2(e)$ инвариантен геометрический объект

$$T_{ij}^{h}=\tilde{\Pi}_{ij}^{h}+n_1\left[(n_2\tilde{\Pi}_{\alpha j}^{\gamma}-n_3\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}^{\gamma}\mu_j^{\beta})\mu_\gamma^\alpha\delta_i^h+(n_2\tilde{\Pi}_{\alpha i}^{\beta}-n_3\tilde{\Pi}_{\alpha\gamma}^{\beta}\mu_i^{\gamma})\mu_\beta^\alpha\delta_j^h+\right.$$
$$\left.+(n+1)(\tilde{\Pi}_{\alpha i}^{\beta}+2\mu_\alpha^\alpha\tilde{\Pi}_{\alpha\gamma}^{\beta}\mu_i^\gamma)\mu_\beta^\alpha\mu_j^h+(n+1)(\tilde{\Pi}_{\alpha j}^{\beta}+2\mu_\alpha^\alpha\tilde{\Pi}_{\alpha\gamma}^{\beta}\mu_j^\gamma)\mu_\beta^\alpha\mu_i^h\right.,$$
$$n_1=-1/((n^2+2n)^2-2e(n+2n+\mu_\alpha^\alpha))^2,$$
$$n_2=\mu_\alpha^\alpha+2\mu_\alpha^\alpha(n+1)e,\quad n_3=2(\mu_\alpha^\alpha)^2(n+1)+1,$$

в котором $\tilde{\Pi}_{ij}^{h}$ — проективные параметры Томаса $\tilde{A}_n$, а в случае интегрируемой структуры $F_i{}^h$ и тензор

$$W_{ijk}^{h}=\tilde{R}_{ijk}^{h}+\tilde{A}_{ij}\delta_k^h-A_{ik}\delta_j^h-\tilde{B}_{jk}\delta_i^h+\tilde{C}_{ij}\mu_k^h-\tilde{C}_{ik}\mu_j^h-\bar{D}_{jk}\mu_i^h,$$

при

$$\tilde{A}_{ij}=\frac{1}{n(n^2-4)}\left[(n-1)\tilde{R}_{\beta j\gamma}^{\alpha}\mu_\alpha^\gamma\mu_i^\beta+n\tilde{R}_{j\gamma\beta}^{\alpha}\mu_i^\gamma\mu_\alpha^\beta-n_8\tilde{R}_{i\gamma\beta}^{\alpha}\mu_\alpha^\beta\mu_j^\gamma+\right.$$
$$\left.+n_9\tilde{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\alpha}\mu_i^\beta\mu_j^\gamma+n_{10}\tilde{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\alpha}\mu_j^\beta\mu_i^\gamma+n_{11}\tilde{R}_{ji\alpha}^{\alpha}+n_{12}\tilde{R}_{ij\alpha}^{\alpha}\right],$$
$$\tilde{B}_{jk}=\tilde{A}_{jk}-\tilde{A}_{kj},\quad \tilde{C}_{jk}=\tilde{C}_{kj}+\bar{D}_{jk},$$
$$\tilde{C}_{ij}=\frac{1}{n(n^2-4)}\left[(1-n^2)\tilde{R}_{ij\beta}^{\alpha}\mu_\alpha^\beta+n\tilde{R}_{ji\beta}^{\alpha}\mu_\alpha^\beta+\tilde{R}_{\gamma\beta\delta}^{\alpha}\mu_i^\gamma\mu_j^\beta\mu_\alpha^\delta+\right.$$
$$\left.+n_4\tilde{R}_{j\beta\alpha}^{\alpha}\mu_j^\beta+n_5\tilde{R}_{i\beta\alpha}^{\alpha}\mu_j^\beta+n_6\tilde{R}_{\beta j\alpha}^{\alpha}\mu_i^\beta+n_7\tilde{R}_{\beta i\alpha}^{\alpha}\mu_j^\beta\right],$$
$$n_4=(2n+1)n/(2(n+1)),\quad n_5=(2n^2+n-2)/(2(n+1)),$$
$$n_6=(n^3-n^2-n+3)/(2(n+1)^2),$$
$$n_7=(n^3-n^2-n-1)/(2(n+1)^2),\quad n_8=(n^2+2n+2)/(n+1),$$
$$n_9=1/(2(n^2-1)^2),\quad n_{10}=(-2n^3+4n^2-4n+5)/(2(n^2-1)(n-1)),$$
$$n_{11}=(2n^5+n^4-3n^3-6n^2+2)/(2(n^2-1)^2),$$
$$n_{12}=(2n^6+4n^5-8n^4-22n^3+6n^2+2n+3)/(2(n^2-1)).$$

Здесь $\tilde{R}_{ijk}^{h}$ — тензор Римана $\tilde{A}_n$.

б) Отображения $\pi_2{}^3(e)$ выделяются дополнительным требованием, чтобы структурный аффинор $F_i{}^h$ удовлетворял условиям

$$\overset{3}{F}{}_i^h=e\delta_i{}^h,$$

где $\overset{3}{F}{}_i^h$ — третья степень $F_i{}^h$.

Основные уравнения отображений $\pi_2{}^3(e)$: $A_n \to \overline{A_n}$ таковы:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \varphi_{(i}\delta^h_{j)} + \psi_{(i}F^h_{j)} + q_{[i}\delta^h_{j]} + e\psi_\alpha F^\alpha_{[i}F^{2h}_{j]} + P^h_{ij} + eP^h_{\alpha\beta}F^\alpha_{[i}F^{2\beta}_{j]},$$

$$F^h_{(i,j)} = r_{(i}\delta^h_{j)} + \varphi_{(i}F^h_{j)}$$

при произвольном тензоре P^h_{ij} и векторах φ_i, ψ_j, q_k, r_e, Φ_h, последние из которых связаны условием (30).

Доказывается

Теорема 15 (Н. В. Яблонская [27]). Совокупность объектов связности всех общих пространств аффинной связности A_n, допускающих отображения $\pi_2{}^3(e)$, дается формулой

$$\Gamma^h_{ij} = \hat{\Gamma}^h_{ij} + \frac{1}{3}e(H^\beta_{\alpha j} - \mu^\beta_{\alpha\wedge j})\mu^\alpha_i\mu^h_\beta + \frac{2}{3}e(H^\alpha_{ij} - \mu^\alpha_{i\wedge j})\mu^{2h}_\alpha +$$

$$+ \theta^h_{ij} + e\theta^\alpha_{\beta j}\mu^h_\alpha\mu^{2\beta}_i - e\theta^\alpha_{\beta i}\mu^h_\alpha\mu^{2\beta}_j.$$

Здесь $\hat{\Gamma}^h_{ij}$ — произвольная связность, θ^h_{ij} — произвольный тензор

$$\bar{H}^h_{ij} = r_i\delta_j{}^h + s_i\mu_j{}^h + M^h_{\alpha j}\mu^\alpha_i - M^h_{\alpha i}\mu^\alpha_j - M^\alpha_{ij}\mu^h_\alpha - eM^\alpha_{\beta\gamma}\mu^\beta_i\mu^\gamma_j\mu^{2h}_\alpha$$

и M^h_{ij} — любой кососимметрический тензор, а векторы r_i, s_i связаны условием, указанным ранее.

Подобные результаты получены также при изучении отображений π_2, когда $F^{4h}_i = e\delta_i{}^h$ $(e \neq 0)$.

Построены инвариантные относительно специальных отображений $\pi_2^3(e)$ геометрические объекты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беклемишев Д. В.*, Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. В сб. «Геометрия. 1963, (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР)». М., 1965, 165—212 (РЖМат, 1966, 11А390)
2. *Домашев В. В., Микеш Й.*, К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств. В сб. «Мат. заметки», 1978, *23*, № 2, 297—304 (РЖМат, 1978, 7А875)
3. *Егоров И. П.*, Движения в обобщенных дифференциально-геометрических пространствах. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1965 (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР)» М., 1967, 375—428 (РЖМат, 1967, 10А525)
4. —, Движения в пространствах аффинной связности. (Уч. зап. Пензенск. пед. ин-т). Казань, Казанск. ун-т, 1965, 205 с. (РЖМат, 1966, 7А540)
5. *Каган В. Ф.*, Субпроективные пространства. М., Физматгиз, 1961, 220 с. (РЖМат, 1962, 6А478К)
6. *Курбатова И. Н.*, К задаче о квазиголоморфно-проективных отображениях *К*-пространств. Одесск. ун-т. Одесса, 1979. 29 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 3 июля 1979 г., № 2429—79 Деп.) (РЖМат, 1979, 10А514ДЕП)
7. —, Объекты, инвариантные относительно квазигеодезических отображений некоторых специальных типов. Одесск. ун-т. Одесса, 1979. 31 с., библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 25 июня 1979 г. № 2279—79 Деп.) (ВИНИТИ, БУ, 1979, № 11, № 23 УДК 52. Астрономия)

8. *Микеш Й.*, Некоторые оценки степеней подвижности келеровых пространств относительно голоморфно-проективных отображений. Одесск. ун-т. Одесса, 1979. 27 с., библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 20 июля 1979 г. № 2730—79 Деп.) (РЖМат, 1979, 10А499ДЕП)
9. —, О голоморфно-проективных отображениях келеровых пространств. Укр. геометрич. сб. (Харьков), 1980, вып. 23, 90—98 (РЖМат, 1981, 6А670)
10. *Петров А. З.*, Моделирование физических полей. В сб. «Гравитация и теория относительности». Казань, Казанск. ун-т, 1968, вып. 4—5, 7—21 (РЖМат, 1969, 8Б460)
11. *Синюков Н. С.*, О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства. Докл. АН СССР, 1954, *98*, № 1, 21—23 (РЖМат, 1955, 4676)
12. —, Эквидистантные римановы пространства. Научн. ежегодник Одесск. ун-т. 1956. Одесса, 1957, 133—135 (РЖМат, 1958, 8231)
13. —, Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими. Докл. АН СССР, 1961, *137*, № 6, 1312—1313 (РЖМат, 1962, 3А388)
14. —, Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. Докл. АН СССР, 1963, *151*, № 4, 781—782 (РЖМат, 1963, 12А465)
15. —, К теории геодезического отображения римановых пространств. Докл. АН СССР, 1966, *169*, № 4, 770—772 (РЖМат, 1967, 1А441)
16. —, Тензорный признак n-2 проективных пространств первого типа. Тезисы докл. IV Всес. межвузовск. конф. по геометрии. Тбилиси, 1969, 238 с.
17. —, Почти геодезические отображения пространств аффинной связности и e-структуры. Мат. заметки, 1970, *7*, № 4, 449—459 (РЖМат, 1970, 8А561)
18. —, Геодезические отображения римановых пространств. М., Наука, 1979, 225 с. (РЖМат, 1980, 1А821К)
19. *Собчук В. С.*, Почти геодезическое отображение римановых пространств на симметрические римановы пространства. Мат. заметки, 1975, *17*, № 5, 757—763 (РЖМат, 1975, 10А559)
20. —, О почти геодезическом отображении римановых пространств. Докл. АН СССР, 1973, *212*, № 5, 1071—1073 (РЖМат, 1974, 3А545)
21. *Схоутен И. А., Стройк Д. Дж.*, Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М.-Л., Гостехиздат, 1939, *1*
22. *Шадный В. С.*, Почти геодезическое отображение римановых пространств на пространства постоянной кривизны. Мат. заметки, 1979, *25*, № 2, 293—298 (РЖМат, 1979, 6А604)
23. *Шапиро Я. Л.*, Геодезические поля направлений и проективные системы путей. Мат. сб., 1955, 36(78), 125—148 (РЖМат, 1956, 3307)
24. *Широков П. А.*, Избранные работы по геометрии. Казань, Казанск. ун-т, 1966, 432 с. (РЖМат, 1967, 8А426К)
25. *Яблонская Н. В.*, Почти геодезические отображения пространств аффинной связности с кручением. Одесск. ун-т. Одесса, 1979. 17 с., библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 19 июня 1979 г. № 2190—79 Деп.) (ВИНИТИ БУ, 1979, № 11, № 25, УДК 52. Астрономия)
26. —, Почти геодезические отображения второго типа для пространств аффинной связности на e-структурах. VII Всес. конф. по современ. пробл. геометрии. Тезисы докл. Минск, Белорусск. ун-т, 1979, 234 с.
27. —, Инвариантные геометрические объекты почти геодезических отображений $\pi_2(e)$ общих пространств аффинной связности. Одесск. ун-т, Одесса, 1980. 24 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 12 февр. 1980 г. № 543—80 Деп.) (РЖМат, 1980, 6А766ДЕП)
28. *Fialkow F.*, Conformals geodesics. Trans. Amer. Math. Soc., 1939, *45*, 443—473
29. *Ishihara Shigeru*, Holomorphically projective changes and their groups in a lsmost complex manifolds. Tohoku Math. J., 1957, *9*, № 3, 273—297 (РЖМат, 1960, 8267)
30. *Obata Morio*, Affine connections on manifolds with almost complex, quater-

nion, or Hermitian structure. Никон сугаку сюхо, Japan J. Math. Soc., 1956, *26*, 43247 (РЖМат, 1959, 4172)
31. *Otsuki Tominosuke, Tashiro Yoshihiro,* On curves in Kählerian spaces. Math. J. Okayama Univ., 1954, *4*, № 1, 57—78 (РЖМат, 1956, 3304)
32. *Prvanović Mileva,* Conformals geodesics. Trans. Amer. Math. Soc., 1939, *45*, 443—473 (РЖМат, 1972, 3А660)
33. *Sakaguchi Toshio,* On the holomorphically projective correspondence between Kählerian spaces preserving complex structure. Hokkaido Math. J., 1974, *3*, № 2, 203—212 (РЖМат, 1975, 6А811)
34. *Tachibana Syun-ichi, Ishihara Shigeru,* On infinitesimal holomorphically projective transformations in Kählerian manifolds. Tohoku Math. J., 1960, *12*, № 1, 77—101 (РЖМат, 1963, 10А402)
35. *Tashiro Yoshihiro,* On holomorphically projective correspondences in an almost complex spaces. Math. J. Ohayama Univ., 1957, *6*, № 2, 149—152 (РЖМат, 1959, 4158)
36. *Vrănceanu G.,* Leçons de géométrie différentielle. Vol. II. Espaces partiellement projectifs. Espaces à connexion conforme. Tenseurs du second ordre. Espaces non holonomes. Invariants des équations aux dérivées partielles du second ordre. Géométrie différentielle globale. Bucureşti, Acad. RPR, 1957, 426 p. (РЖМат, 1960, 12055К)
37. *Yano Kentaro,* Differential geometry on complex and almost complex spaces. Oxford — London, Pergamon Press, 1965, xii, 323 p., 90 sh. Brit. Nat. Bibliogr., 1965, № 791, 11 (РЖМат, 1965, 9А405К)
38. —, Concircular geometry. I—IV. Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1940, *16*, 195—200, 354—360, 442—448, 505—511