N. A. Karazeeva, A. P. Oskolkov, Attractors and dynamical systems generated by initial-boundary value problems for equations of motion of viscoelastic liquids, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1987, Volume 162, 159–168

Н.А.Каразеева, А.П.Осколков

АТТРАКТОРЫ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ НАЧАЛЬНО--КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ

I. Работы О.А.Ладыженской [I]-[3] (см. также [4], [5]) создали новое направление в теории начально-краевых задач и теории асимптотических методов для уравнений с частными производными - нахождение аттракторов $\mathfrak{M}$ начально-краевых задач для нелинейных эволюционных уравнений с диссипацией и построение и исследование на $\mathfrak{M}$ динамических систем, порождаемых этими начально-краевыми задачами. Развитые в них методы позволяют исследовать как задачи с параболическим характером диссипации, в которых разрешающие операторы V_t являются вполне непрерывными при $\forall t > 0$ (полугруппы класса I [5]), так и определенные классы диссипативных задач гиперболического типа, в которых разрешающие операторы V_t при $\forall t > 0$ можно представить в виде суммы $V_t = W_t + U_t$ сжимающих операторов W_t и вполне непрерывных операторов U_t полугруппы класса 2 [5]). В настоящее время известен достаточно богатый набор задач обоих классов (см. [I]-[5] и цитированную там литературу). Цель настоящей заметки - акцентировать внимание на том, что задачи обоих классов возникают также в теории начально-краевых задач для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей - именно, задачи с параболическим характером диссипации возникают при описании двумерных течений жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$ [6]-[8], а диссипативные задачи гиперболического типа возникают при описании произвольных трехмерных течений жидкостей Кельвина-Фойгта порядка $L = 0, 1, 2, \ldots$ (при $L = 0$ это доказано в [9]).

2. Линейной вязкоупругой жидкостью с конечным числом дискретно распределенных времен релаксации $\{\lambda_\ell\}$ и времен ретардации $\{\varkappa_m\}$ называется жидкость, определяющее, или реологическое, уравнение которой, связывающее девиатор тензора напряжений σ и тензор скоростей деформаций $\mathcal{D}$, имеет вид [I0]-[I4]

$$\sigma + \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell \frac{\partial^\ell \sigma}{\partial t^\ell} = 2\nu \mathcal{D} + \sum_{m=1}^{M} \varkappa_m \frac{\partial^m \mathcal{D}}{\partial t^m}, \quad \nu, \lambda_L, \varkappa_M > 0 . \tag{I}$$

При $M = L-1$, $L = 1, 2, \ldots$ имеем жидкости Максвелла порядка L, при $M =$

$= L = 1,2,\dots$ – жидкости Олдройта порядка L, при $M = L+1$, $L = 0,1,2,\dots$ – жидкости Кельвина-Фойгта порядка L [10]-[14].

Различные варианты уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей получены в работах А.П.Осколкова [12]-[14]. В работе [15] указан еще один вариант этих уравнений, особенно удобный при исследовании динамических систем, порождаемых начально-краевыми задачами для уравнений движения вязкоупругих жидкостей, и исследовании гидродинамической устойчивости течений таких жидкостей.

Следуя [15], будем предполагать в дальнейшем, что $\{\lambda_\ell\}$ удовлетворяют следующим условиям: корни $\{\alpha_\ell\}$ полинома $Q(p) \equiv 1 + \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell p^\ell$ различны, т.е. $Q'(\alpha_\ell) \neq 0$, $\ell = 1,\dots,L$, вещественны и отрицательны: $\alpha_\ell < 0$, $\ell = 1,\dots,L$, и, кроме того, $\{\lambda_\ell\}$, ν, $\{\varkappa_m\}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\beta_\ell \equiv \nu P(\alpha_\ell)\left[Q'(\alpha_\ell)\right]^{-1} > 0, \qquad \ell = 1,\dots,L, \tag{2}$$

причем для жидкости Олдройта порядка L $P(p) \equiv P_0(p) \equiv \sum_{m=0}^{L-1} (\varkappa_m - \mu\lambda_m) p^m$, $\mu_0 \equiv \varkappa_L \lambda_L^{-1}$, $\varkappa_0 \equiv 1$, а для жидкости Кельвина-Фойгта порядка $L = 1,2,\dots$

$P(p) \equiv P_V(p) \equiv \sum_{m=0}^{L-1} (\varkappa_m - \mu_V \lambda_m - \mu_* \lambda_{m-1}) p^m$, $\mu_* \equiv \varkappa_{L+1} \cdot \lambda_L^{-1}$, $\mu_V \equiv (\varkappa_L - \mu_* \lambda_{L-1}) \lambda_L^{-1} > 0$, $\varkappa_0 \equiv 1$, $\lambda_{-1} \equiv 0$.

Условия (2) в случае жидкости Олдройта порядка L обобщают известное условие Олдройта [10] для жидкости Олдройта порядка 1: $\nu - \varkappa\lambda^{-1} > 0$.

Для жидкости Олдройта порядка 2 описанные выше условия на $\{\lambda_\ell\}$, ν, $\{\varkappa_m\}$ сводятся к следующим: $\mathcal{D} \equiv \lambda_1^2 - 4\lambda_2 > 0$,

$$\nu\lambda_2 - \varkappa_2 + (\varkappa_1\lambda_2 - \varkappa_2\lambda_1)(-\lambda_1 + \sqrt{\mathcal{D}}) > 0, \quad \nu\lambda_2 - \varkappa_2 + (\varkappa_1\lambda_2 - \varkappa_2\lambda_1)(-\lambda_1 - \sqrt{\mathcal{D}}) < 0. \tag{3}$$

Для жидкости Кельвина-Фойгта порядка 1 условия (2) сводятся к следующим:

$$\varkappa_1 - \varkappa_2\lambda^{-1} > 0, \qquad \lambda - \varkappa_1 + \varkappa_2\lambda^{-1} > 0. \tag{4}$$

В [15] показано, что движения жидкостей Олдройта порядка $L = 1,2,\dots$ и жидкостей Кельвина-Фойгта порядка $L = 1,2,\dots$ при условиях (2) описываются соответственно следующими интегродифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v_k\frac{\partial v}{\partial x_k}-\mu_0\Delta v-\sum_{m=1}^{L}\beta_m^{(0)}\int_0^t e^{\alpha_m(t-\tau)}\Delta v\,d\tau+\operatorname{grad}p=f,\quad \operatorname{div}v=0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v_k\frac{\partial v}{\partial x_k}-\mu_v\Delta v-\mu_*\frac{\partial\Delta v}{\partial t}-\sum_{m=1}^{L}\beta_m^{(V)}\int_0^t e^{\alpha_m(t-\tau)}\Delta v\,d\tau+\operatorname{grad}p=f,\quad \operatorname{div}v=0. \tag{5}$$

Введем следующие обозначения: $u^m(x,t)\equiv\int_0^t e^{\alpha_m(t-\tau)}v\,d\tau$, $m=1,\dots,L$;

$\mathcal{P}$ -ортопроектор из $L_2(\Omega)$ на $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ [I6], $\mathcal{P}\Delta\equiv\tilde{\Delta}$, $\mathcal{P}(v_k v_{x_k})\equiv$, $\equiv A(v)$, $\vec{\varphi}(x,t)\equiv\{v,u^1,\dots,u^L\}$, $\vec{F}\equiv\{\mathcal{P}f,0,\dots,0\}$. Тогда, как следует из [I5], движения жидкостей Олдройта порядка $L=1,2,\dots$ и жидкостей Кельвина-Фойгта порядка $L=1,2,\dots$ описываются соответственно следующими операторными дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}+\Lambda_1^{(0)}\vec{\varphi}=\vec{F}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}+\Lambda_1^{(V)}\vec{\varphi}+\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_2\vec{\varphi}=\vec{F}, \tag{7}$$

в которых

$$\Lambda_1\equiv\begin{pmatrix}-\mu\tilde{\Delta}-A & -\beta_1\tilde{\Delta} & -\beta_2\tilde{\Delta} & \dots & -\beta_L\tilde{\Delta}\\ -1 & -\alpha_1 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 0 & -\alpha_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_L\end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\Lambda_2\equiv\begin{pmatrix}-\mu_*\tilde{\Delta} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & & & & \\ 0 & & \mathbb{O} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \tag{9}$$

Уравнение (6), (8) и уравнение (7)-(9) решаются в $Q_\infty \equiv \Omega\times[0,\infty)$, $\Omega\in E^n$, $n=2,3$, при начально-краевых условиях

$$\vec{\varphi}\Big|_{t=0} = (v_0(x), 0,\ldots,0), \quad x\in\Omega; \quad \vec{\varphi}\Big|_{\partial Q_\infty} = 0. \qquad (10)$$

Движение жидкости Кельвина-Фойгта порядка 0 описывается системой дифференциальных уравнений [17]-[18], [12]-[14]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k\frac{\partial v}{\partial x_k} - \nu\Delta v - \varkappa\frac{\partial\Delta v}{\partial t} + \operatorname{grad} p = f, \quad \operatorname{div} v = 0, \qquad (11)$$

которые решаются в Q_∞ при начально-краевых условиях

$$v\Big|_{t=0} = v_0(x), \quad x\in\Omega; \quad v\Big|_{\partial Q_\infty} = 0. \qquad (12)$$

Будем предполагать в дальнейшем, что в уравнении (6), (8), уравнении (7)-(9) и системе (11) $f(x,t)\equiv f(x)$, $\forall t\geqslant 0$.

3. Рассмотрим сначала начально-краевую задачу (6), (8),(10), описывающую движение жидкостей Олдройта порядка $L=1,2,\ldots,$ и будем предполагать, что Ω - двумерная ограниченная область: $\Omega\in E^2$. Положим $E_0(\Omega) \equiv \overset{\circ}{J}(\Omega)\times\Pi_{\ell=1}^{L} H(\Omega)$ [16],

$\|\vec{\varphi}\|^2_{E_0} \equiv \|v\|^2_{2,\Omega} + \sum_{\ell=1}^{L}\beta_\ell^{(0)}\|u_x^\ell\|^2_{2,\Omega}$, и возьмем $E_0(\Omega)$ в качестве фазового пространства задачи (6), (8), (10). На нем, как показано в [12]-[14], определена полугруппа V_t, $t\geqslant 0$, ограниченных непрерывных нелинейных операторов, однозначно определяющих слабое решение (решение в смысле Э.Хопфа [16]) $\vec{\varphi}(\cdot,t)\equiv\vec{\varphi}(t)$ задачи (6), (8), (10) по его значению при $t=0$: $\vec{\varphi}(t)\equiv V_t(\vec{\varphi}(0))$.

Для слабого решения задачи (6), (8), (10) справедлива оценка [7], [8]:

$$\|\vec{\varphi}\|_{E_0}\leqslant R_0\equiv(\mu_0\lambda_1^*)^{-1}\|f\|_{2,\Omega}, \quad \forall t\geqslant 0, \quad \lambda_1^* \equiv \min_{v\in H(\Omega)}\frac{\|v_x\|_{2,\Omega}}{\|v\|_{2,\Omega}}. \qquad (13)$$

Положим, далее, $E_s(\Omega)\equiv(W_2^s(\Omega)\cap H(\Omega))\times\prod_{p=1}^{L}(W_2^{s+1}(\Omega)\cap H(\Omega))$,

$s=1,2,\ldots,$ $\|\vec{\varphi}\|^2_{E_s}\equiv\left(\|v\|^{(s)}_{2,\Omega}\right)^2+\sum_{\ell=1}^{L}\beta_\ell^{(0)}\left(\|u^\ell\|^{(s+1)}_{2,\Omega}\right)^2$. В [7], [8] показано, что если $\partial\Omega\in C^{s+1}$, $f(x)\in W_2^{s-1}(\Omega)\cap\overset{\circ}{J}(\Omega)$, $s=1,2,\ldots$, то для слабого решения $\vec{\varphi}(t)$ двумерной задачи (6), (8), (10) при $\forall t>0$

справедлива оценка

$$\|\vec{\varphi}(\cdot,t)\|_{E_s} \leq C_s(\mu_0^{-1}, \|f\|_{2,\Omega}^{(s-1)}, \alpha_l^{-1}, (\beta_l^{(0)})^{-1}), \tag{I4}$$

а отсюда следует, что эволюционный оператор V_t двумерной задачи (6),(8),(I0) при $\forall t>0$ переводит шар $B_0 \equiv \{\vec{\varphi}\in E_0(\Omega): \|\vec{\varphi}\|_{E_0} < R_0\}$ в множество $V_t(B_0)$, ограниченное в $E_1(\Omega)$ и компактное в $E_0(\Omega)$, и потому V_t при $\forall t>0$ является вполне непрерывным в $E_0(\Omega)$, т.е. полугруппа V_t, $t>0$, является, по терминологии [5], полугруппой класса I. На основании этого в [7],[8] доказана

ТЕОРЕМА I. Для двумерной задачи (6), (8), (I0) в фазовом пространстве $E_0(\Omega)$ имеются поглощающее множество B_0 и минимальный глобальный B-аттрактор $\mathcal{M} \equiv \bigcap_{t\geq 0} V_t(B_0)$, который является непустым, инвариантным, связным компактом в $E_0(\Omega)$ и ограниченным в пространствах $E_s(\Omega)$, $s=1,2,\ldots$, множеством.

Далее в [7],[8] с помощью тех же соображений, что и в [I] (см. также [5]) для двумерной системы Навье-Стокса, доказывается

ТЕОРЕМА 2. Полугруппа $V_t: E_0(\Omega) \Rightarrow E_0(\Omega)$, $t\geq 0$ для двумерной задачи (6), (8), (I0) продолжается на $\mathcal{M}$ до непрерывной группы $V_t: \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M}$, $-\infty<t<\infty$, причем $V_t \equiv V_t^{-1}$ для $t<0$, и $\vec{\varphi}(t) \equiv V_t(\vec{\varphi}(0))$, $\vec{\varphi}(0)\in\mathcal{M}$, $-\infty<t<\infty$, есть решение задачи (6), (8), (I0). Аттрактор $\mathcal{M}$ состоит из тех и только тех элементов $\vec{\psi}\in B_0$, для которых задача (6), (8), (I0) имеет решение $\vec{\varphi}(t) \equiv V_t(\vec{\psi})$, равное $\vec{\psi}$ при $t=0$, при $\forall t\in(-\infty,\infty)$.

Пара $\{\mathcal{M}; V_t, -\infty<t<\infty\}$ и является динамической системой, порождаемой начально-краевой задачей (6), (8), (I0) о двумерных движениях жидкостей Олдройта порядка $L=1,2,\ldots$.

В [7],[8] для двумерной задачи (6), (8), (I0) доказан ряд свойств аттрактора $\mathcal{M}$ и динамической системы $\{\mathcal{M}; V_t, -\infty<t<\infty\}$, характерных для задач с параболическим характером диссипации, описываемых, по терминологии О.А.Ладыженской [5], полугруппами V_t, $t\geq 0$, класса I, а именно, доказана "конечномерность динамики V_t двумерной задачи (6), (8), (I0) на $\mathcal{M}$", а также конечность хаусдорфовой $d_H(\mathcal{M})$ и информационной $h(\mathcal{M})$ размерностей аттрактора $\mathcal{M}$ [5] и оценка

$$dim_H(\mathcal{M}) \leq h(\mathcal{M}) \leq N\, ln\left(\frac{8\varkappa^2 l^2}{1-\delta^2}\right) ln^{-1}\left(\frac{2}{1+\delta^2}\right), \tag{I5}$$

в которой числа $l \equiv l(\mu_0^{-1})$, $\delta \equiv \delta(\mu_0^{-1}, N)$, $0<\delta<1$, $N \equiv N(\mu_0^{-1}, \Omega) \gg 1$ определяются лишь данными задачи (6), (8), (I0), а $\varkappa$ – постоянная Гаусса [5].

4. Рассмотрим теперь начально-краевую задачу (7)-(I0), описывающую движение жидкостей Кельвина-Фойгта порядка $L=1,2,\dots$, и будем предполагать на этот раз, что Ω – трехмерная ограниченная область: $\Omega\in E^3$. Возьмем в качестве фазового пространства задачи (7)-(I0) пространство $\mathcal{D}_1(\Omega)\equiv\prod_{\ell=0}^{L} H(\Omega)$, $\|\vec\varphi\|^2_{\mathcal{D}_1}\equiv\|v\|^2_{2,\Omega}+$ $+\mu_*\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\sum_{\ell=1}^{L}\beta_\ell^{(v)}\|u_x^\ell\|^2_{2,\Omega}$. На нем, как показано в [I7]-[I8], [I2]-[I4], определена группа V_t, $-\infty<t<\infty$, ограниченных нелинейных непрерывных операторов, однозначно определяющих слабое решение $\vec\varphi(t)$ задачи (7)-(I0) по его значению при $t=0$: $\vec\varphi(t)\equiv V_t(\vec\varphi(0))$. Для слабого решения $\vec\varphi(t)$ задачи (7)-(I0) справедлива оценка [I7]-[I8]:

$$\|\vec\varphi\|_{\mathcal{D}_1}\leqslant Q_0\equiv(\mu_v\lambda_1^*)^{-1}\|f\|_{2,\Omega},\quad \forall t\in(-\infty,\infty), \tag{I6}$$

вытекающая из энергетического равенства для задачи (7)-(I0):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec\varphi\|^2_{\mathcal{D}_1}+\mu_v\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\sum_{\ell=1}^{L}\alpha_\ell\beta_\ell^{(v)}\|u_x^\ell\|^2_{2,\Omega}=(f,v)_{2,\Omega},\ -\infty<t<\infty. \tag{I7}$$

Как и в [I] (см. также [5]), из (I7), (I6) легко выводится заключение о том, что шар $B_0\equiv\{\vec\varphi\in\mathcal{D}_1(\Omega):\|\vec\varphi\|_{\mathcal{D}_1}<Q_0\}$ является поглощающим множеством для $\forall B\in\mathcal{D}_1(E)$, и $V_t(B_0)\subset B_0$, т.е. слабые решения трехмерной задачи (7)-(I0) втягиваются в шар B_0 за конечное время.

Представим V_t при $t>0$ в виде суммы $V_t\equiv W_t+U_t$, где W_t есть разрешающий оператор для линейной задачи

$$\frac{\partial\vec\omega}{\partial t}+\Lambda_3\vec\omega+\frac{\partial}{\partial t}\Lambda_2\vec\omega=0,\quad \vec\omega\Big|_{t=0}=\{v_0,0,\dots,0\}\equiv\vec\varphi(0),\ t\geqslant0, \tag{I8}$$

$$\Lambda_3\equiv\begin{pmatrix}-\mu_v\tilde\Delta & -\beta_1^{(v)}\tilde\Delta & -\beta_2^{(v)}\tilde\Delta & \dots & -\beta_L^{(v)}\tilde\Delta\\ -1 & -\alpha_1 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 0 & -\alpha_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_L\end{pmatrix}, \tag{I9}$$

а U_t – разрешающий оператор нелинейной задачи

$$\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t} + \Lambda_3\vec{\psi} + \frac{\partial}{\partial t}\Lambda_2\vec{\psi} = \vec{G}(t), \qquad \vec{\psi}\Big|_{t=0} = 0, \quad t \geq 0, \tag{20}$$

причем $\vec{G}(t) \equiv \vec{F}(x) - \Lambda_4(\vec{\varphi})$, $\vec{\varphi}(t) = V_t(\vec{\varphi}(0))$,

$$\Lambda_4(\vec{\varphi}) \equiv \begin{pmatrix} A(v) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & \mathbb{0} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Очевидно, что $\vec{\Phi}(t) = \vec{\omega}(t) + \vec{\psi}(t) \equiv W_t\vec{\varphi} + U_t\vec{\Phi}$.
Из энергетического равенства для задачи (18) легко следует оценка

$$\| W_t\vec{\Phi}\|_{\mathcal{D}_1} \equiv \|\vec{\omega}\|_{\mathcal{D}_1} \leq C_1\|\vec{\Phi}(0)\|_{\mathcal{D}_1} e^{-\gamma t}, \quad \forall t > 0, \tag{22}$$

в которой постоянные C_1 и $\gamma > 0$ зависят только от данных задачи (см., например, [16], гл.УI); оценка (22) показывает, что W_t, $t > 0$, является на $\mathcal{D}_1(\Omega)$ экспоненциально-сжимающей полугруппой [5].

Далее, из результатов работ [17]-[18], [12]-[14], следует, что для решений задачи (20), (21) справедлива оценка

$$\max_{t>0}\| U_t\vec{\Phi}\|^{(2)}_{\frac{3}{2},\Omega} \equiv \max_{t>0}\|\vec{\psi}\|^{(2)}_{\frac{3}{2},\Omega} \leq C_2 \max_{t>0}\|\vec{G}(t)\|_{\frac{3}{2},\Omega}, \tag{23}$$

в которой постоянная C_2 определяется только данными задачи. Из теорем вложения С.Л.Соболева следует, что если $\vec{\Phi} \in \mathcal{D}_1(\Omega)$, то $\vec{G}(t) \in L_{3/2}(\Omega)$. Тем самым разрешающий оператор U_t задачи (20),(21): $\vec{\psi}(t) \equiv U_t\vec{\Phi}(t)$ при $\forall t > 0$ отображает пространство $\mathcal{D}_1(\Omega)$ в пространство $\mathcal{D}_2(\Omega) \equiv \prod_{\ell=0}^{L}\{W^2_{3/2}(\Omega) \cap H(\Omega)\}$
и потому является вполне непрерывным в $\mathcal{D}_1(\Omega)$.

Итак, группа V_t при $\forall t > 0$ есть сумма линейной экспоненциально-сжимающей полугруппы W_t и вполне непрерывного нелинейного оператора U_t в пространстве $\mathcal{D}_1(\Omega)$, т.е. полугруппа V_t при $\forall t > 0$ является, по терминологии О.А.Ладыженской [5], полугруппой класса 2 в пространстве $\mathcal{D}_1(\Omega)$. Из доказанных О.А.Ладыженской [5] общих теорем о свойствах полугрупп класса 2 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 3. Для трехмерной задачи (7)-(9) в фазовом пространстве $\mathcal{D}_1(\Omega)$ имеются поглощающее множество $B_0 \equiv \{\vec{\varphi} \in \mathcal{D}_1(\Omega): \|\vec{\varphi}\|_{\mathcal{D}_1} < Q_0$, см. (16)$\}$ и минимальный глобальный B-аттрактор $\mathcal{M} \equiv \bigcap_{t \geq 0} [V_t(B_0)]_{\mathcal{D}_1}$, который является непустым, инвариантным, связным компактом в $\mathcal{D}_1(\Omega)$ и ограниченным в $\mathcal{D}_2(\Omega)$ множеством. Хаусдорфова $dim_H(\mathcal{M})$ и информационная $h(\mathcal{M})$ размерности аттрактора $\mathcal{M}$ конечные $dim_H(\mathcal{M}) \leq h(\mathcal{M})$, и $h(\mathcal{M})$ оценивается лишь через данные задачи.

Для жидкостей Кельвина-Фойгта порядка 0 теорема 3 доказана в [9].

Авторы выражают признательность Л.Д.Фаддееву и О.А.Ладыженской за внимание к их исследованиям по гидродинамике неньютоновских жидкостей.

Литература

1. Ладыженская О.А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 6. Зап. науч.семин.ЛОМИ, 1972, т.27, с.91-114.
2. Ладыженская О.А. О предельных режимах для модифицированных уравнений Навье-Стокса в трехмерном пространстве. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 11. Зап.науч. семин.ЛОМИ, 1979, т.84, с.131-146.
3. Ладыженская О.А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных систем. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 14. Зап.науч.семин. ЛОМИ, 1982, т.115, с.137-155.
4. Ладыженская О.А. Об аттракторах нелниейных эволюционных задач с диссипацией. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 18. Зап. науч.семин.ЛОМИ, 1986, т.152, с.72-85.
5. Ладыженская О.А. О нахождении минимальных глобальных B-аттракторов для полугрупп, порождаемых начально-краевыми задачами для нелинейных диссипативных уравнений с частными производными. Препринт ЛОМИ Е-3-87, Л., 1987, 54с.
6. Котсиолис А.А., Осколков А.П. О предельных режимах и аттракторе для уравнений движения жидкостей Олдройта. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные

вопросы теории функций. I8. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I986, т.I52, с.67-7I.

7. Котсиолис А.А., Осколков А.П. О динамической системе, порождаемой уравнениями движения жидкостей Олдройта. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. УШ. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I986, т.I55, с.II9-I25.

8. Каразеева Н.А., Котсиолис А.А., Осколков А.П. О динамической системе, порождаемой уравнениями движения жидкостей Олдройта порядка L . - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IX. Зап.науч. семин.ЛОМИ, I987, т.I64, с.I09-II6.

9. Калантаров В.К. Об аттракторах для некоторых нелинейных задач математической физике. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. I8. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I986, т.I52, с.50-54.

I0. Олдройт Дж.Г. Неньютоновские течения жидкостей и твердых тел. - В сб.: Реология. Теория и приложения. М., I962, с.262-3I0.

II. Bird R., Armstrong R., Hassager R. Dynamics of polymeric liquids. Vol.1. Fluid mechanics. N.-Y.,1977.

I2. Осколков А.П. Функциональные методы в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей. Препринт ЛОМИ Р-2-83, Л., I983, 65 с.

I3. Осколков А.П. О нестационарных течениях вязкоупругих жидкостей. Тр.Мат.ин-та АН СССР, I983, т.I59, с.I02-I3I.

I4. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения вязкоупругих жидкостей. Автореф.докт.дисс., Л., I983, 32 с.

I5. Осколков А.П., Ахматов М.М., Котсиолис А.А. Об уравнениях движения линейных вязкоупругих жидкостей и уравнениях фильтрации жидкостей с запаздыванием. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. I9. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I987, т.I63, с.I03-I09.

I6. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2-ое изд. М., I970.

I7. Осколков А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 7. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I973, т.38, с.98-I36.

18. О с к о л к о в А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 9. Зап.науч.семин. ЛОМИ, 1976, т.59, с.133-177.

N.A.Karazeeva, A.P.Oskolkov. On the attractors and the dynamical Systems generated by the equations motion of viscoelastic fluids.

Attractors $\mathfrak{M}$ and dynamical Systems $\{\mathfrak{M}; V_t, -\infty < t < \infty\}$ generated by the initial-boundary value problems for twodimensional equations motion of the Oldroyd fluids order $L=1,2,\ldots$ and threedimensional equations motion of the Kelvin-Voight fluids order $L=0,1,2,\ldots$ are described.