



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. L. Korotyaev, A. B. Pushnitskii, Scattering on an anisotropic potential in a constant electric field, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1995, Volume 230, 103–114

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.173

February 11, 2025, 06:09:08



Е. Л. Коротяев, А. Б. Пушницкий

РАССЕЯНИЕ НА АНИЗОТРОПНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим рассеяние частицы в присутствии постоянного электрического поля $E \in \mathbf{R}^d$. Оператор энергии имеет вид: $H = H_E + V$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$, где $H_E = -\Delta - (E, x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, а вещественный потенциал V удовлетворяет условию:

$$V \in L_\infty(\mathbf{R}^d) \text{ и } |V(x)| \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Волновые операторы определяются стандартным образом:

$$W_\pm(H, H_E) = s - \lim \exp(itH) \exp(-itH_E), \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Обычно дополнительно предполагается, что $V(x) = O(|(E, x)|^{-\varepsilon_0})$ при $x \rightarrow \infty$, где $\varepsilon_0 > 1/2$. Заметим, что это условие не может быть ослаблено. Действительно, если $\varepsilon_0 \leq 1/2$, то становится необходимой модификация волновых операторов (см. [12], [5]). Цель настоящей работы — доказать асимптотическую полноту для случая анизотропного потенциала (см. ниже условие (1.2)). Грубо говоря, мы рассматриваем случай, когда $\varepsilon_0 \leq 1/2$, но V убывает по другим направлениям, и при это не требуется модификация волновых операторов. Мы используем комбинированный подход, предложенный в работе [7], применяя метод Энсса к одной части переменных и гладкую технику к другой части.

Имея в виду трехмерную физическую ситуацию, рассмотрим разложение координатного пространства: $\mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{d_1} \oplus \mathbf{R}^{d_2} \oplus \mathbf{R}^{d_3}$. Мы будем записывать $x \in \mathbf{R}^d$ в виде $x = (x_1, x_2, x_3)$, где $x_j \in \mathbf{R}^{d_j}$. Пусть V удовлетворяет условию:

$$|V(x)| \leq C \langle x_1 \rangle^{-\varepsilon_1} \langle x_2 \rangle^{-\varepsilon_2} \langle x_3 \rangle^{-\varepsilon_3} \quad (1.2)$$

с некоторыми $\varepsilon_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3$. Здесь и далее мы обозначаем $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$. Определим неотрицательные числа e_1, e_2, e_3 :

$$e_j = \begin{cases} 2\varepsilon_j, & \text{если } E_j \neq 0, \\ \frac{1}{4} \min\{2\varepsilon_j, d_j\}, & \text{если } E_j = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов INTAS-93-1815 и гранта Европейского Сообщества в рамках контракта ESPRIT P9282 ACTS.

Вначале рассмотрим случай, когда электрическое поле E имеет ненулевую компоненту только в \mathbf{R}^{d_1} .

Теорема 1.1. Пусть $E = (E_1, 0, 0)$, $E_1 \in \mathbf{R}^{d_1}$, $E_1 \neq 0$. Предположим, что V удовлетворяет условиям (1.1), (1.2), где

$$e_1 + e_2 + e_3 > 1 \quad \text{и} \quad \max\{e_1, e_2, e_3\} > 1/2. \quad (1.4)$$

Тогда волновые операторы $W_{\pm}(H, H_E)$ полны, сингулярный непрерывный спектр $\sigma_{sc}(H)$ отсутствует, все собственные значения H имеют конечную кратность и могут накапливаться лишь к $\pm\infty$.

Замечания. 1. Существование волновых операторов доказывается стандартным образом с помощью метода стационарной фазы (см. например, [9, 8]) при условии $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 > 1$.

2. Из доказательства теоремы видно, что она остается верной для потенциалов вида $V = \sum_{k=1}^m V_k$, где каждый V_k удовлетворяет условиям теоремы.

Примеры. Ниже приводим эквивалентные формулировки условия (1.4) для наиболее важных частных случаев.

(i) Пусть $d_3 = 0$ (т.е. $\mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{d_1} \oplus \mathbf{R}^{d_2}$). Тогда условие (1.4) означает, что $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2/2 > 1$ и, кроме того, а) $\varepsilon_1 > 3/8$ при $d_2 = 1$; б) $\varepsilon_1 > 1/4$ при $d_2 = 2$; в) $\varepsilon_1 > 1/8$ при $d_2 = 3$; д) $\varepsilon_1 > 0$ при $d_2 = 4$.

(ii) Пусть $d_2 = d_3 = 1$. Тогда $e_2 \leq 1/4$, $e_3 \leq 1/4$ и (1.4) может быть записано в форме: $e_1 + e_2 + e_3 > 1$ и $e_1 > 1/4$.

Далее, рассмотрим случай, когда электрическое поле E имеет две ненулевые компоненты.

Теорема 1.2. Пусть $E = (E_1, E_2, 0)$, $E_j \in \mathbf{R}^{d_j}$, $E_j \neq 0$, $j = 1, 2$. Предположим, что V удовлетворяет (1.1), (1.2) и выполнено одно из следующих условий:

$$e_1 + e_2 + e_3 > 1 \quad \text{и} \quad e_3 > 1/2 \quad (1.5)$$

или

$$e_1 > 1/2 \quad \text{и} \quad e_2 > 1/2 \quad (1.6)$$

Тогда волновые операторы $W_{\pm}(H, H_E)$ полны, сингулярный непрерывный спектр $\sigma_{sc}(H)$ отсутствует, все собственные значения H имеют конечную кратность и могут накапливаться лишь к $\pm\infty$.

Замечания. 1. Существование волновых операторов доказывается стандартным образом с помощью метода стационарной фазы (см. например, [9, 8]) при условии $2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 > 1$.

2. В "физическом случае" $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ имеем $e_3 \leq 1/4$, и условие (1.5) не может быть выполнено.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Напомним, что стандартное доказательство асимптотической полноты для пары операторов (H, H_E) со спектром $\sigma(H) = \sigma(H_E) = \mathbf{R}$ методом Энсса заключается в проверке следующих трех условий для подходящих ограниченных операторов P_{\pm} таких, что $P_+ + P_- = I$.

Условие 1. Для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ операторы $\varphi(H) - \varphi(H_E)$ компактны.

Условие 2. $s - \lim P_{\pm}^* \exp(-itH_E) = 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Условие 3. Для любой функции $\varphi \in C_0^\infty$ операторы $(I - W_{\pm}(H, H_E)) \varphi(H_E) P_{\pm}$ компактны.

Заметим, что в силу (1.1) V есть относительно компактное возмущение оператора H_E (см. например [10, 8]) и, следовательно, Условие 1 выполнено.

В ходе доказательства теорем мы определим операторы P_{\pm} подходящим образом для различных комбинаций условий на ε_j (здесь и далее $j \in \{1, 2, 3\}$). Доказательство Теорем 1.1 и 1.2 будет заключаться в прямой проверке Условий 2 и 3 для каждого выбора P_{\pm} .

Ниже мы определяем стандартные в методе Энсса “проекторы” на множество “приходящих и уходящих состояний” для операторов Шредингера и Штарка.

(i) Рассмотрим оператор Шредингера $(-\Delta)$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$. Пусть J – унитарный оператор, $J : L_2(\mathbf{R}^d, dx) \rightarrow L_2(\mathbf{R}_+, d\lambda) \otimes L_2(\mathbf{S}^{d-1}, d\omega)$, реализующий спектральное представление $(-\Delta)$. Именно, пусть

$$(Jf)(\lambda, \omega) = (1/\sqrt{2})\lambda^{(d-2)/4} \hat{f}(\sqrt{\lambda}\omega), \quad \lambda \geq 0, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbf{S}^{d-1},$$

где \hat{f} обозначает преобразование Фурье функции f . Определим оператор

$$Q_{\pm}^0 = J^* \theta \left(\pm \frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda} \right) J, \quad (2.1)$$

где θ есть характеристическая функция интервала $(0, +\infty)$.

(ii) Рассмотрим оператор Штарка $-\Delta - (E, x)$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$. Предположим вначале, что E имеет вид: $E = (1, 0, \dots, 0)$, и будем записывать $x \in \mathbf{R}^d$ в виде $x = (x_1, x_{\perp})$, где $x_{\perp} = (x_2, \dots, x_d)$. Пусть U – унитарный оператор, $U : L_2(\mathbf{R}^d, dx) \rightarrow L_2(\mathbf{R}, d\lambda) \otimes L_2(\mathbf{R}^{d-1}, dx_{\perp})$,

определенный равенством

$$(Uf)(\lambda, x_{\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} Ai(-x_1 - \lambda)f(x_1, x_{\perp})dx_1, \quad (2.2)$$

где Ai – функция Эйри. Определим оператор

$$Q_{\pm}^E = U^* \theta \left(\pm \frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda} \right) U. \quad (2.3)$$

Для случая поля E общего вида заменой координат приведем его к виду $E = (1, 0, \dots, 0)$ и далее определим операторы Q_{\pm}^E по формулам (2.2) и (2.3).

Приступим к определению операторов $Q_{\pm}^{(j)}$, которые будут играть роль P_{\pm} в Условиях 2 и 3. Ниже мы существенным образом используем представление $H_E = h_1 + h_2 + h_3$, где $h_j = -\Delta_{x_j} - (E_j, x_j)$ в $L_2(\mathbf{R}^{d_j})$. Здесь и далее мы пользуемся одним и тем же обозначением для операторов A_j в $L_2(\mathbf{R}^{d_j})$ и операторов $A_1 \otimes I \otimes I$, $I \otimes A_2 \otimes I$, $I \otimes I \otimes A_3$ соответственно в $L_2(\mathbf{R}^{d_1} \oplus \mathbf{R}^{d_2} \oplus \mathbf{R}^{d_3})$.

Определим операторы $Q_{\pm}^{(j)}$:

$$Q_{\pm}^{(j)} = \begin{cases} Q_{\pm}^E & \text{для } h_j, \text{ если } E_j \neq 0, \\ Q_{\pm}^0 & \text{для } h_j, \text{ если } E_j = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Непосредственно проверяется формула $(Q_{\pm}^{(j)})^* = Q_{\pm}^{(j)}$, а с помощью метода стационарной фазы легко установить, что

$$s - \lim Q_{\pm}^{(j)} \exp(-itH_E) = 0 \quad \text{при } t \rightarrow \pm\infty \quad (2.5)$$

(см., например, [9, 8]). Как мы увидим впоследствии, формула (2.5) обеспечивает выполнение Условия 2 при любом выборе P_{\pm} .

Таким образом, доказательство Теорем 1.1 и 1.2 фактически сведено к проверке Условия 3. Эта проверка потребует применения некоторых технических результатов (большая часть которых хорошо известна), приведенных ниже.

Нижеследующие Леммы 2.1 и 2.2 дают равномерные по времени оценки (2.8) и (2.9), типичные для метода Энсса. Вначале определим срезающую функцию:

$$\eta \in C^{\infty}(\mathbf{R}), \quad 0 \leq \eta(x) \leq 1, \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq -1 \\ 0 & \text{при } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Пусть $F(x_1 < c)$ обозначает характеристическую функцию интервала $(-\infty, c)$.

Лемма 2.1. Пусть $H_E = -\Delta - (E, \mathbf{x})$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$, $E = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда для всех $a \in \mathbf{R}$, $\pm t > 0$, $N > 0$ справедлива следующая оценка:

$$\|F(\mathbf{x}_1 < t^2/2 - a) \exp(-itH_E) \eta(H_E - a) Q_{\pm}^E\| \leq C_N \langle t \rangle^{-N}, \quad (2.7)$$

где константа C_N не зависит от a .

Доказательство потребует довольно громоздких выкладок, и мы приводим его в параграфе 3. Лемма 2.1 выражает интуитивно ясный факт, что множество $\{\mathbf{x}_1 < t^2/2 - a\}$ есть классически запрещенная зона для частицы с энергией меньше чем a . Из оценки (2.7) немедленно следует часть (i) следующей Леммы.

Лемма 2.2. (i) Пусть $H_E = -\Delta - (E, \mathbf{x})$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$, $E \neq 0$, а Q_{\pm}^E определены формулой (2.3). Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbf{R}$, $\pm t > 0$ справедлива оценка:

$$\|\langle x \rangle^{-\varepsilon} \exp(-itH_E) \eta(H_E - a) Q_{\pm}^E\| \leq C(a) \langle t \rangle^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon = 2\varepsilon \quad (2.8)$$

с некоторой константой $C(a)$.

(ii) Пусть $H_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$, а Q_{\pm}^0 определены формулой (2.1). Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\pm t > 0$ справедлива оценка:

$$\|\langle x \rangle^{-\varepsilon} \exp(-itH_0) Q_{\pm}^0\| \leq C \langle t \rangle^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{1}{4} \min\{2\varepsilon, d\} \quad (2.9)$$

с некоторой константой C .

Доказательство (i). Без ограничения общности мы предполагаем, что $E = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда, используя Лемму 2.1 с $N > 2\varepsilon$ и элементарную оценку функции $\langle x \rangle^{-\varepsilon}$ при $x_1 > t^2/2 - a$, имеем:

$$\begin{aligned} & \|\langle x \rangle^{-\varepsilon} e^{itH_E} \eta(H_E - a) Q_{\pm}^E\| \leq \\ & \leq \|\langle x \rangle^{-\varepsilon}\| \cdot \|F(\mathbf{x}_1 < t^2/2 - a) e^{-itH_E} \eta(H_E - a) Q_{\pm}^E\| + \\ & + \|\langle x \rangle^{-\varepsilon} F(\mathbf{x}_1 > t^2/2 - a)\| \cdot \|e^{-itH_E} \eta(H_E - a) Q_{\pm}^E\| \leq \\ & \leq C_N \langle t \rangle^{-N} + C_1(a) \langle t \rangle^{-2\varepsilon} \leq (C_N + C_1(a)) \langle t \rangle^{-2\varepsilon} \end{aligned}$$

с некоторой константой $C_1(a)$, что и дает (2.8) с $C(a) = C_N + C_1(a)$.

(ii) было доказано в [11]. •

Следующая Лемма дает "весовой" вариант гладкой техники.

Лемма 2.3. Пусть $H_E = -\Delta - (E, \mathbf{x})$ в $L_2(\mathbf{R}^{d_1} \oplus \mathbf{R}^{d_2})$ с $E = (E_1, E_2)$, $E_i \in \mathbf{R}^{d_i}$. Для $\varepsilon_i \geq 0$ определим e_i формулой (1.3). Пусть для некоторой константы $\gamma \geq 0$ выполнено условие $\gamma + e_1 + e_2 > 1/2$. Тогда

для всех $f \in L_2(\mathbf{R}^{d_1} \oplus \mathbf{R}^{d_2})$ справедлива оценка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle t \rangle^{-2\gamma} \| \langle x_1 \rangle^{-\varepsilon_1} \langle x_2 \rangle^{-\varepsilon_2} \exp(-itH_E) f \|^2 dt \leq C \| f \|^2, \quad (2.10)$$

причем константа C не зависит от f .

Доказательство. Пусть вначале $e_1 > 1/2$. Если $E_1 \neq 0$, то (2.10) следует из гладкости оператора $\langle x_1 \rangle^{-\varepsilon_1}$ по отношению к оператору Штарка $h_1 = -\Delta_{x_1} - (E_1, x_1)$ при $\varepsilon_1 > 1/4$ (см. [6, 4]). Если $E_1 = 0$, то (2.10) следует из гладкости оператора $\langle x_1 \rangle^{-\varepsilon_1}$ по отношению к оператору Шредингера $h_1 = -\Delta_{x_1}$ при $\min\{\varepsilon_1, d_1/2\} > 1$ (см. [7]).

Аналогично, при $e_2 > 1/2$ (2.10) выполнено по тем же причинам. Если $\gamma > 1/2$, то (2.10) становится тривиальным. Общий случай получается с помощью интерполяции между случаями $(e_1 > 1/2, e_2 = 0, \gamma = 0)$, $(e_1 = 0, e_2 > 1/2, \gamma = 0)$ и $(e_1 = 0, e_2 = 0, \gamma > 1/2)$. •

Комбинируя Леммы 2.2 и 2.3, мы получаем следующий результат.

Лемма 2.4. (i) Пусть $e_1 + e_2 + e_3 > 1$, $E_j \neq 0$ и $e_j > 1/2$ для некоторого j . Тогда для любых $a \in \mathbf{R}$, $r > 0$ и $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ справедлива оценка:

$$\int_r^\infty \| V \exp(\pm itH_E) \eta(h_j - a) Q_\pm^{(j)} \|^2 dt \leq C(r, a) \| f \|^2 \quad (2.11)$$

с некоторой константой $C(r, a)$, не зависящей от f и такой, что $C(r, a) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ для любого фиксированного a .

(ii) Пусть $e_1 + e_2 + e_3 > 1$, $E_j = 0$ и $e_j > 1/2$ для некоторого j . Тогда для всех $r > 0$ и $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ справедлива оценка:

$$\int_r^\infty \| V \exp(\pm itH_E) Q_\pm^{(j)} f \|^2 dt \leq C(r) \| f \|^2 \quad (2.12)$$

с некоторой константой $C(r)$, не зависящей от f и такой, что $C(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Доказательство. Без ограничения общности положим $j = 1$ и будем рассматривать знак “+”.

(i) Пользуясь условием (1.2) и оценкой (2.8) из Леммы 2.2, получаем:

$$\begin{aligned} & \| V \exp(-itH_E) \eta(h_1 - a) Q_+^{(1)} f \|^2 \\ & \leq C(a) \langle t \rangle^{-e_1} \| \langle x_2 \rangle^{-\varepsilon_2} \langle x_3 \rangle^{-\varepsilon_3} e^{-it(h_2+h_3)} f \|^2. \end{aligned}$$

Пользуясь строгим неравенством $e_1 + e_2 + e_3 > 1$, выберем $\delta > 0$, такое что $e_1 + e_2 + e_3 > 1 + \delta$. Разобьем e_1 на слагаемые в виде $e_1 = 1/2 + \delta + \gamma$, $\gamma > 0$, и применим неравенство Гельдера, а затем воспользуемся Леммой 2.3 при $\gamma = e_1 - 1/2 - \delta$:

$$\begin{aligned} & \int_r^\infty \langle t \rangle^{-e_1} \| \langle x_2 \rangle^{-e_2} \langle x_3 \rangle^{-e_3} e^{-it(h_2+h_3)} f \| dt \\ & \leq \left(\int_r^\infty \langle t \rangle^{-1-2\delta} dt \right)^{1/2} \left(\int_r^\infty \langle t \rangle^{-2\gamma} \| \langle x_2 \rangle^{-e_2} \langle x_3 \rangle^{-e_3} e^{-it(h_2+h_3)} f \|^2 dt \right)^{1/2} \\ & \leq C_1 r^{-\delta} \| f \| \end{aligned}$$

с некоторой константой C_1 . Тогда (2.11) выполнено с $C(r, a) = C_1 C(a) r^{-\delta}$.

(ii) Как и в случае (i), пользуясь Леммой 2.2 (ii), имеем оценку

$$\| V \exp(-itH_E) Q_+^{(1)} f \| \leq C \langle t \rangle^{-e_1} \| \langle x_2 \rangle^{-e_2} \langle x_3 \rangle^{-e_3} e^{-it(h_2+h_3)} f \|,$$

и далее доказательство аналогично. •

Как будет видно из дальнейшего, приведенное ниже Следствие гарантирует выполнение Условия 3.

Следствие 2.5. (i) Пусть $e_1 + e_2 + e_3 > 1$, и для некоторого j $E_j \neq 0$ и $e_j > 1/2$. Тогда для любых $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ и $a \in \mathbf{R}$ операторы $(W_\pm - I)\varphi(H_E)\eta(h_j - a)Q_\pm^{(j)}$ компактны.

(ii) Пусть $e_1 + e_2 + e_3 > 1$, и для некоторого j $E_j = 0$ и $e_j > 1/2$. Тогда для любых $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ операторы $(W_\pm - I)\varphi(H_E)Q_\pm^{(j)}$ компактны.

Доказательство следует стандартной схеме метода Энсса (см. [8]).

(i) Имеем

$$\begin{aligned} & (W_\pm - I)\varphi(H_E)\eta(h_j - a)Q_\pm^{(j)} \\ & = \varphi(H)(W_\pm - I)\eta(h_j - a)Q_\pm^{(j)} + (\varphi(H) - \varphi(H_E))\eta(h_j - a)Q_\pm^{(j)}. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая компактность оператора $\varphi(H) - \varphi(H_E)$, остается проверить компактность второго слагаемого, которая, в свою очередь, следует из компактности его аппроксимаций

$$\varphi(H)(e^{itH} e^{-itH_E} - I)\eta(h_j - a)Q_\pm^{(j)} = \varphi(H) \int_0^t e^{itH} V e^{-i\tau H_E} \eta(h_j - a)Q_\pm^{(j)} d\tau,$$

и их равномерной сходимости, даваемой Леммой 2.4 (ii).

(ii) доказывается аналогично. •

Теперь мы готовы доказать Теоремы 1.1 и 1.2.

Доказательство Теоремы 1.1. Ниже мы определим операторы P_{\pm} для различных $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^3$ и проверим Условия 2 и 3, пользуясь формулой (2.5) и Следствием 2.5 (как было отмечено выше, Условие 1 выполнено благодаря (1.1)).

(i) Вначале рассмотрим случай $e_1 + e_2 + e_3 > 1$ и $e_1 > 1/2$. Положим $P_{\pm} = Q_{\pm}^{(1)}$. Условие 2 выполнено благодаря (2.5). Поскольку $H_E = h_1 + h_2 + h_3$ и $\sigma(h_2) = \sigma(h_3) = [0, +\infty)$, то для заданной $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbf{R})$ можно записать: $\varphi(H_E) = \varphi(H_E)\eta(h_1 - a)$ с некоторым $a \geq 1 + \sup \operatorname{supp} \varphi$ (η определено формулой (2.6)). Тогда

$$(I - W_{\pm})\varphi(H_E)P_{\pm} = (I - W_{\pm})\varphi(H_E)\eta(h_1 - a)Q_{\pm}^{(1)}$$

и Условие 3 вытекает из Следствия 2.5 (i) с $j = 1$.

(ii) Далее, пусть $e_1 + e_2 + e_3 > 1$ и $e_2 > 1/2$. Тогда положим $P_{\pm} = Q_{\pm}^{(2)}$. Условие 2 выполнено благодаря (2.5), а Условие 3 вытекает из Следствия 2.5 (ii) с $j = 2$.

(iii) Наконец, в случае $e_1 + e_2 + e_3 > 1$ и $e_3 > 1/2$ нужно взять $P_{\pm} = Q_{\pm}^{(3)}$, и далее доказательство проводится в точности как и в предыдущем случае. •

Доказательство Теоремы 1.2.

(i) Вначале рассмотрим случай $e_1 + e_2 + e_3 > 1$ и $e_3 > 1/2$. Положим $P_{\pm} = Q_{\pm}^{(3)}$. Условие 2 выполнено благодаря (2.5), а компактность оператора $(I - W_{\pm})\varphi(H_E)P_{\pm}$ вытекает из Следствия 2.5 (ii) с $j = 3$, как и в случаях (ii) и (iii) Теоремы 1.1.

(ii) Пусть $e_1 > 1/2$ и $e_2 > 1/2$. В этом случае доказательство основано на представлении:

$$\varphi(H_E) = \varphi(H_E)\eta(h_1 - a) + \varphi(H_E)\eta(h_2 - a)(I - \eta(h_1 - a))$$

с некоторым $a \in \mathbf{R}$, $a = a(\varphi)$. По Следствию 2.5 (i) с $j = 1, 2$ операторы $(I - W_{\pm})\varphi(H_E)\eta(h_1 - a)Q_{\pm}^{(1)}$ и $(I - W_{\pm})\varphi(H_E)\eta(h_2 - a)(I - \eta(h_1 - a))Q_{\pm}^{(2)}$ компактны. Далее доказательство следует стандартной схеме метода Энсса с учетом формулы (2.5) (см. [2, 8]). •

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1

В этом параграфе мы доказываем Лемму 2.1, которая описывает движение квантовой частицы в постоянном электрическом поле. Некоторые утверждения, близкие к этой Лемме, содержатся в работах [8] и [5].

Доказательство Леммы 2.1.

1. Вначале рассмотрим одномерный случай. Без ограничения общности будем рассматривать знак "+" и считать, что $t > 1$. Определим разбиение единицы класса C^∞ для интервала $(-\infty, a)$ следующим образом. Положим $\eta_k(\lambda) = \eta(\lambda - a + k) - \eta(\lambda - a + k + 1)$; тогда $\text{supp } \eta_k \subset [a - k - 2, a - k]$ и $\eta(\lambda - a) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k(\lambda)$.

Ниже мы докажем оценку для $t > 1$:

$$\|F(x < t^2/2 - a) \exp(-itH_E) \eta_k(H_E) Q_+^E\| \leq C_N (1+k)^{-N} \langle t \rangle^{-N} \quad (3.1)$$

из которой суммированием по k легко получить (2.7).

2. Для доказательства оценки (3.1) выпишем в явном виде оператор Q_+^E . Пусть Φ обозначает преобразование Фурье в $L_2(\mathbf{R})$. Для любого $f \in L_2(\mathbf{R})$ имеем:

$$Q_+^E f = U^* \Phi^* \theta(p) \Phi U f = U^* \Phi^* \theta(p) g(p),$$

где $g = \Phi U f$, $\|g\| = \|f\|$, а U определено формулой (2.2). Таким образом, для того, чтобы доказать (3.1), достаточно показать, что для любого $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$:

$$\|F(x < t^2/2 - a) U^* e^{-it\lambda} \eta_k(\lambda) \Phi^* g\| \leq C_N (1+k)^{-N} \langle t \rangle^{-N} \|g\|. \quad (3.2)$$

Но для $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$ мы имеем:

$$[F(x < t^2/2 - a) U^* e^{-it\lambda} \eta_k(\lambda) \Phi^* g](x) = \int_0^\infty M_{t,k}(x, p) g(p) dp,$$

с ядром

$$M_{t,k}(x, p) = F(x < t^2/2 - a) \int_{-\infty}^{\infty} Ai(-x - \lambda) e^{-i(p+\lambda)\lambda} \eta_k(\lambda) d\lambda \quad (3.3)$$

при $t > 1$ и $p > 0$. Ниже мы доказываем оценку для любого $N > 0$:

$$|M_{t,k}(x, p)| \leq F(x < t^2/2 - a) C'_N (t^2 - x - a + k)^{-N} \quad (3.4)$$

(с некоторой константой C'_N), из которой легко получить (3.2).

3. Докажем оценку (3.4). Меняя обозначения в формуле (3.3), мы видим, что (3.4) будет следовать из оценки для любого $b < t^2/2$:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda) e^{-it\lambda} \omega(\lambda - b) d\lambda \right| \leq C'_N (t^2 - b)^{-N}, \quad (3.5)$$

где $\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\text{supp } \omega \in [-2, 0]$. Для доказательства (3.5) мы проделаем следующее простое вычисление. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Интегрируя по частям и используя уравнение Эйри для $Ai(\lambda)$, легко получить:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\varphi(\lambda)d\lambda &= (1/t^2) \int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\varphi(\lambda)d\lambda \\ &+ (2i/t) \int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\varphi'(\lambda)d\lambda + (1/t^2) \int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\varphi''(\lambda)d\lambda. \end{aligned}$$

Положим $\varphi(\lambda) = \omega(\lambda - b)(1 - \lambda/t^2)^{-1}$. Тогда:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\omega(\lambda - b)d\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}[(2i/t)\omega'(\lambda - b)(1 - \lambda/t^2)^{-1} \\ &+ (2i/t^3)\omega(\lambda - b)(1 - \lambda/t^2)^{-2} + (1/t^2)\omega''(\lambda - b)(1 - \lambda/t^2)^{-1} \\ &+ (2/t^4)\omega'(\lambda - b)(1 - \lambda/t^2)^{-2} + (2/t^6)\omega(\lambda - b)(1 - \lambda/t^2)^{-3}]d\lambda. \end{aligned}$$

Вновь применяя последнюю формулу к каждому слагаемому в правой части, и повторяя это вычисление $2N$ раз, видим, что (3.5) будет следовать из оценки:

$$t^{-m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\omega^{(l)}(\lambda - b)(1 - \lambda/t^2)^{-n}d\lambda \right| \leq C_N''(t^2 - b)^{-N} \quad (3.6)$$

с некоторыми константами C_N'' для всех $n \geq 2N$, $m \geq 2N$, и $l \leq 4N$. Но для $(\lambda - b) \in \text{supp } \omega$ имеем $t^2(1 - \lambda/t^2) \geq t^2 - b$, и (3.6) выполнено.

4. Наконец, мы обращаемся к многомерному случаю. Пусть Φ_\perp обозначает преобразование Фурье по переменным x_\perp в $L_2(\mathbf{R}^d)$. Тогда

$$H_E = \Phi_\perp^*(h_1 + p_\perp^2)\Phi_\perp,$$

где $h_1 = -d^2/dx_1^2 - x_1$ в $L_2(\mathbf{R}, dx_1)$, а p_\perp^2 обозначает оператор умножения на p_\perp^2 в $L_2(\mathbf{R}^{d-1}, dp_\perp)$. Для $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ будем писать $\hat{f} = \Phi_\perp f$ и $\hat{f}(\cdot, p_\perp) = f_{p_\perp} \in L_2(\mathbf{R}, dx_1)$ для п.в. $p_\perp \in \mathbf{R}^{d-1}$. Для $\pm t > 0$, ис-

пользуя (2.7) при $d = 1$, имеем:

$$\begin{aligned}
 & \|F(x_1 < t^2/2 - a) \exp(-itH_E) \eta(H_E - a) Q_{\pm}^E f\|^2 \\
 = & \int_{\mathbf{R}^{d-1}} \|F(x_1 < t^2/2 - a) \exp(-it(h_1 + p_{\perp}^2)) \eta(h_1 + p_{\perp}^2 - a) Q_{\pm}^E f_{p_{\perp}}\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 dp_{\perp} \\
 = & \int_{\mathbf{R}^{d-1}} \|F(x_1 < t^2/2 - a) F(x_1 < t^2 - (a - p_{\perp}^2)) \exp(-it(h_1 + p_{\perp}^2)) \\
 & \times \eta(h_1 - (a - p_{\perp}^2)) Q_{\pm}^E f_{p_{\perp}}\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 dp_{\perp} \\
 & \leq C_N(t)^{-N} \int_{\mathbf{R}^{d-1}} \|f_{p_{\perp}}\|_{L_2(\mathbf{R})}^2 dp_{\perp} = C_N(t)^{-N} \|f\|^2,
 \end{aligned}$$

что и завершает доказательство. •

ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Avron, I. W. Herbst, *Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to Stark effect.* — *Comm. Math. Phys.* **52** (1977), 239–254.
2. V. Enss, *Asymptotic completeness for quantum-mechanical potential scattering. I. Short-range potentials.* — *Comm. Math. Phys.* **61** (1978), 285–291.
3. I. W. Herbst, *Unitary equivalence of Stark Hamiltonians.* — *Math. Z.* **155** (1977), 55–70.
4. I. Herbst, J. S. Møller, E. Skibsted, *Spectral analysis of N -body Stark Hamiltonians.* — Preprint, Aarhus Universitet, Matematisk Institut No. 15 (1994).
5. I. Herbst, J. S. Møller, E. Skibsted, *Asymptotic completeness of N -body Stark Hamiltonians.* — Preprint, Aarhus Universitet, Matematisk Institut No. 14 (1994).
6. Е. Л. Коротяев, *К теории рассеяния многих частиц во внешнем электрическом поле.* — *Матем. Сборник* **132(174)**, № 2 (1987), 182–201.
7. Е. Л. Коротяев, *Метод Энса при учете анизотропии.* — *Росс. Акад. Наук Докл.* **324**, № 5 (1992), 923–927.
8. P. A. Perry, *Scattering Theory by Enss Method.* — *Mathematical Reports* **1** (1983), 1–347.
9. M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, III.* — N. Y., Academic Press (1979).
10. M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, IV.* — N. Y., Academic Press (1978).
11. Д. Р. Яфаев, *Подпространства рассеяния и асимптотическая полнота для нестационарного уравнения Шредингера.* — *Матем. Сборник* **118(160)** (1982), 262–279.
12. D. White, *The Stark effect and long-range scattering in two Hilbert spaces.* — *Indiana Univ. Math. J.* **39** No. 2 (1990), 517–546.

Korotyaev E. L., Pushnitskii A. B. Scattering by anisotropic potential in a constant electric field.

The scattering of a particle on anisotropic potential in a constant electric field is considered. The asymptotic completeness without modification of wave operators is proved under some conditions on anisotropic decaying of long-range potential. The mixed approach is used in which the Enss method is applied to one part of variables and the smooth technique is applied to another part.

Санкт-Петербургский
Электротехнический университет

Поступило 10 сентября 1995 г.

Санкт-Петербургский
государственный университет