А. Р. Данилин, Регуляризция задачи управления с ограничениями на состояние, *Изв. вузов. Матем.*, 1992, номер 2, 24–28

УДК 517.988

А.Р.ДАНИЛИН

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СОСТОЯНИЕ

В данной статье рассмотрен метод регуляризации некорректной экстремальной задачи [1]-[5] на множестве, заданном приближенно [5],[6], в случае, когда это множество возмущается путем возмущения множества, задающего ограничения на состояние.

Исследуется оптимальность данного метода.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу оптимального управления с ограничением на состояние [7]:

$$\inf J(u); \quad u\in U, \ Au\in G_0, \tag{1.1}$$

где A – секвенциально слабо замкнутый оператор из рефлексивного банахова пространства управлений V в некоторое рефлексивное банахово пространство Z, $U\subset V$ – слабо компактное множество допустимых управлений, $G_0\subset Z$ – слабо компактное множество ограничений на состояния, такое, что $A(U)\bigcap G_0\neq\varnothing$, а J – слабо полунепрерывный снизу и ограниченный снизу на некоторой окрестности U функционал качества [8].

При сформулированных условиях задача (1.1) является слабо-корректной экстремальной задачей [1], [4], [5], т.к. экстремальное значение конечно, множество экстремальных элементов не пусто [9] и любая минимизирующая последовательность слабо предкомпактна и все ее слабые пределы лежат в множестве экстремальных элементов.

Обозначим экстремальное значение в задаче (1.1) через J_0, а множество экстремальных элементов через $U_0(G_0)$.

Пусть теперь вместо G_0 нам известно другое слабо компактное множество G_δ, такое, что

$$d(G_0,G_\delta) \leqslant \delta, \tag{1.2}$$

где $d(\cdot,\cdot)$ – псевдометрика Хаусдорфа [10]. Требуется по G_δ построить некоторое приближение решения задачи (1.1).

Отметим сразу, что задача

$$\inf J(u); \ u\in U, \ Au\in G_\delta \tag{1.3}$$

вообще говоря не приближает задачу (1.1) даже по функционалу.

Рассмотрим пример. Пусть $V=L_2[0;1]$, $U=\{u(\cdot)\in L_2[0;1]: |u(t)|\leqslant 1$ почти при всех $t\}$, $Z=\mathbb{R}$, $Au(\cdot)=\int_0^1 u(t)dt$, $G_0=\{0;1\}$, $J(u(\cdot))=-\int_0^1 u(t)dt$. Тогда $J_0=-1$. Однако, если взять $G_\delta=$ $=[\delta/2;\delta]\bigcup[1+\delta/2;1+\delta]$, то $d(G_0,G_\delta)=\delta$, а экстремальное значение в задаче (1.3) равно $-\delta$, т.к. $G_\delta\bigcap A(U)=[\delta/2;\delta]$, поэтому $\lim\limits_{\delta\to 0}(-\delta)=0\neq-1=J_0$ (см.также [11]).

2. Регуляризация задачи (1.1).

В качестве задачи, регуляризирующей задачу (1.1) относительно возмущения множества G_0, возьмем следующую задачу оптимального управления

$$\inf J(u); \ u\in U, \ Au\in G_\delta+S(\delta), \tag{2.1}$$

где $S(\delta)=\{g\in Z: \|g\|\leqslant\delta\}$.

Так как множество $S(\delta)$ тоже слабо компактно [8] и, в силу (1.2), $G_\delta+S(\delta)\supset G_0$, то задача (2.1) разрешима.

Обозначим экстремальное значение в задаче (2.1) через J_δ, а множество экстремальных элементов через $U(\delta)$, т.е. $U(\delta)=U_0(G_\delta+S(\delta))$.

ТЕОРЕМА 1. *Задача (2.1) регуляризует задачу (1.1) по функционалу $J_\delta \to J_0$ при $\delta \to 0$ и в слабой топологии, т.е. если $u(n)\in U(\delta(n))$, $\delta(n)\to 0$ и $u(n) \rightharpoonup \bar{u}$, то $\bar{u}\in U_0(G_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $G_0\subset G_\delta+S(\delta)$, то при всех $\delta>0$ $J_\delta\leq J_0$, поэтому

$$\limsup_{\delta\to 0} J_\delta \leq J_0. \tag{2.2}$$

Пусть теперь $\{\delta(n)\}\subset(0;1]$ такова, что $\delta(n)\to 0$, а $\{u(n)\}:u(n)\in U(\delta(n))$. Учитывая (1.2), получим $G_{\delta(n)}+S(\delta(n))\subset G_0+S(\delta(n))+S(\delta(n))\subset G_0+S(2)$, таким образом и $\{u(n)\}\subset U$, и $\{Au(n)\}\subset G_0+S(2)$ слабо предкомпактны, поэтому можно считать, что $u(n) \rightharpoonup \bar{u}$ и $Au(n) \rightharpoonup \bar{g}$, что в силу слабой секвенциальной замкнутости A дает $\bar{g}=A\bar{u}$.

Так как $Au(n)\in G_0+S(2\delta(n))$, то $Au(n)=g(n)+2\delta(n)e(n)$, где $g(n)\in G_0$, а $\|e(n)\|\leq 1$. Переходя в этом соотношении к пределу при $n\to\infty$ и учитывая слабую замкнутость G_0, получим $g(n) \rightharpoonup \bar{g}\in G_0$. Таким образом $\bar{u}\in U$ и $A\bar{u}\in G_0$, поэтому $J_0\leq J(\bar{u})$. Но в силу слабой полунепрерывности снизу функционала J получим

$$J_0 \leq J(\bar{u}) \leq \liminf J(u(n)) = \liminf J_{\delta(n)},$$

поэтому $J_0\leq\liminf_{\delta\to 0} J_\delta$, что вместе с (2.2) дает соотношение $J_\delta\to J_0$ при $\delta\to 0$. При этом $J_0=J(\bar{u})$, т.е. $\bar{u}\in U_0(G_0)$.

При некоторых дополнительных условиях на J задача (2.1) будет регуляризовать задачу (1.1) и в сильной топологии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что функционал J обладает на U Е-свойством, если из того, что $\{u(n)\}\subset U$, $u(n) \rightharpoonup \bar{u}$ и $J(u(n))\to J(\bar{u})$ следует, что $u(n)\to\bar{u}$.

ТЕОРЕМА 2. *Если функционал J обладает на U Е-свойством, то задача (2.1) регуляризует задачу (1.1) в сильной топологии, т.е. для любой последовательности $\{\delta(n)\}:0<\delta(n)\to 0$ произвольная последовательность $\{u(n)\}:u(n)\in U(\delta(n))$ предкомпактна и все ее предельные точки лежат в $U_0(G_0)$.*

Доказательство теоремы непосредственно следует из теоремы 1 и предыдущего определения.

Достаточное условие, обеспечивающее наличие Е-свойства у функционала J дает следующая

ТЕОРЕМА 3. *Если U выпукло и замкнуто, а J равномерно выпуклый на U с непрерывным модулем выпуклости, то J обладает на U Е-свойством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что это не так. Тогда найдется $\{u(n)\}\subset U:u(n) \rightharpoonup \bar{u}$, $J(u(n))\to J(\bar{u})$ и $\|u(n)-\bar{u}\|\geq t>0$. В силу строгой равномерной выпуклости и непрерывности модуля выпуклости $\eta(\cdot)$ можно считать, что $\eta(\|u(n)-\bar{u}\|)\geq\eta_0>0$ [8]-[11].

Учитывая замкнутость и выпуклость U, получим, что U слабо замкнуто, поэтому $\bar{u}\in U$. Тогда

$$J(\tfrac{1}{2}\, u(n)+\tfrac{1}{2}\bar{u}) \leq \tfrac{1}{2}J(u(n))+\tfrac{1}{2}J(\bar{u})-\tfrac{1}{4}\eta(\|u(n)-\bar{u}\|) \leq \tfrac{1}{2}J(u(n))+\tfrac{1}{2}J(\bar{u})-\tfrac{1}{4}\eta_0.$$

Но $(u(n)+\bar{u})/2 \rightharpoonup \bar{u}$, а в силу выпуклости и непрерывности J этот функционал и полунепрерывен снизу относительно слабой топологии [8]-[11], поэтому

$$J(\bar{u}) \leq \liminf J(\tfrac{1}{2}u(n)+\tfrac{1}{2}\bar{u}) \leq J(\bar{u})-\tfrac{1}{4}\eta_0,$$

что противоречиво. Тем самым, утверждение теоремы справедливо.

Классическим функционалом с Е-свойством является норма в пространствах Ефимова-Стечкина [12].

3. Оптимальность по порядку метода регуляризации (2.1) задачи (1.1).

Рассмотрим вопрос об оптимальности метода регуляризации (2.1) задачи (1.1) с точки зрения приближения экстремальных значений.

Пусть $\mathcal{G}$ – некоторое подмножество слабо компактных множеств G, таких, что $A(U)\bigcap G\neq\varnothing$. Тогда на $\mathcal{G}$ определена функция $\hat{J}:\mathcal{G}\to\mathbb{R}$ следующим образом:

$$\hat{J}(G) = \min\{J(u):u\in U,\ Au\in G\}. \tag{3.1}$$

В этих терминах рассмотренная задача формулируется так:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{по приближенным данным } (G_\delta,\delta):\exists G\in\mathcal{G},\ d(G_\delta,G)\leq\delta\ .\\ \text{найти приближенное значение } \hat{J}(G).\end{array}\right. \tag{3.2}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Аналогично [13],[14] методом решения задачи (3.2) будем считать произвольное отображение P, которое приближенным данным (G_δ,δ) ставит в соответствие приближенное значение $P(G_\delta,\delta)\in\mathbb{R}$.

Количественная характеристика точности метода P на $\mathcal{G}$ при этом определяется как

$$\Delta(P,\delta,\mathcal{G}) = \sup\{|P(G_\sigma,\delta)-\hat{J}(G)|:G\in\mathcal{G},\ d(G,G_\delta)\leq\delta\}. \tag{3.3}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Метод P решения задачи (3.2) называется оптимальным и обозначается $P_{\text{опт}}$, если

$$\Delta(P_{\text{опт}},\delta,\mathcal{G}) = \Delta_{\text{опт}}(\delta,\mathcal{G}) = \inf\{\Delta(P,\delta,\mathcal{G}):P\in\mathcal{P}\},$$

где $\mathcal{P}$ – множество всех методов решения задачи (3.2).

ТЕОРЕМА 4.

$$\Delta_{\text{опт}}(\delta,\mathcal{G}) = \frac{1}{2}\omega(2\delta;\hat{J},\mathcal{G}), \tag{3.4}$$

где

$$\omega(\delta;\hat{J},\mathcal{G}) = \sup\{|\hat{J}(G_1)-\hat{J}(G_2)|:G_1,G_2\in\mathcal{G},\ d(G_1,G_2)\leq\delta\}. \tag{3.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично [15],[16] доказывается, что метод чебышевских центров [15] является оптимальным методом решения задачи (3.2). Таким образом, $P_{\text{опт}}(G_\delta,\delta)$ – чебышевский центр множества

$$\{\hat{J}(G):G\in\mathcal{G},\ d(G,G_\delta)\leq\delta\}, \tag{3.6}$$

т.е. центр круга наименьшего радиуса, содержащего данное множество. Обозначим этот радиус через $r(G_\delta,\delta,\mathcal{G})$. Тогда $\Delta_{\text{опт}}(\delta,\mathcal{G}) = \sup\limits_{G_\delta} r(G_\delta\delta,\mathcal{G})$. Поскольку множество (3.6) лежит в $\mathbb{R}$, то его чебышевский радиус равен половине диаметра этого множества

$$r(G_\delta,\delta,\mathcal{G}) = \frac{1}{2}\sup\{|\hat{J}(G_1)-\hat{J}(G_2)|:G_1,G_2\in\mathcal{G},\ d(G_1,G_2)\leq\delta,\ d(G_2,G_\delta)\leq\delta\}. \tag{3.7}$$

Учитывая (3.5), из (3.7) получим неравенство

$$r(G_\delta,\delta,\mathcal{G}) \leq \frac{1}{2}\omega(2\delta;\hat{J},\mathcal{G}),$$

справедливое при всех G_δ, следовательно, и

$$\Delta_{\text{опт}}(\delta,\mathcal{G}) \leq \frac{1}{2}\omega(2\delta;\hat{J},\mathcal{G}). \tag{3.8}$$

Покажем, что справедливо и обратное соотношение.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем $G_1,G_2\in\mathcal{G}$, такие, что $d(G_1,G_2)\leq2\delta$ и $|\hat{J}(G_1)-\hat{J}(G_2)|>$ $>\omega(2\delta;\hat{J},\mathcal{G})-\varepsilon$.

Определим множество

$$G_\delta = \{g_1/2+g_2/2:g_1\in G_1,\ g_2\in G_2,\ \|g_1-g_2\|\leq2\delta\}.$$

Тогда $d(G_1,G_\delta)\leq\delta$ и $d(G_2,G_\delta)\leq\delta$, Поэтому из соотношения (3.7) получим, что

$$r(G_\delta,\delta,\mathcal{G}) \geq \frac{1}{2}|\hat{J}(G_1)-\hat{J}(G_2)|>(\omega(2\delta;\hat{J},\mathcal{G})-\varepsilon)/2,$$

откуда

$$\Delta_{\text{опт}}(\delta,\mathcal{G}) \geq \frac{1}{2}\omega(2\delta;\hat{J},\mathcal{G})-\varepsilon/2,$$

или, учитывая произвольность ε,

$$\Delta_{\text{опт}}(\delta,\mathcal{G}) \geq \frac{1}{2}\omega(2\delta;\hat{J},\mathcal{G}),$$

что вместе с (3.8) доказывает равенство (3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пример, рассмотренный в п. 1, показывает, что если $\mathcal{G}$ – все множество слабо компактных множеств G таких, что $A(U)\cap G\neq\varnothing$, то $\omega(\delta;\hat{J},\mathcal{G})$ вообще говоря не стремится к нулю при $\delta\to 0$, а значит и $\Delta_{\text{опт}}(\delta,\mathcal{G})\not\to 0$ при $\delta\to 0$. Это означает, что хотя метод (2.1) и регуляризует задачу (1.1) относительно возмущения множества, но эта регуляризация не является равномерной.

Возьмем в качестве $\mathcal{G}_0$ подмножество множества слабо компактных множеств G, таких, что

$$A(U)\supset G. \tag{3.9}$$

Определим на $A(U)$ функцию $\tilde{J}$ следующим образом:

$$\forall g\in A(U) \quad \tilde{J}(g)=\hat{J}(\{g\})$$

(фактически факторизуем A и U по отношению нормальности относительно функционала J). Отметим, что в силу условий на U и A для любого $g\in A(U)$ найдется $u\in U{:}Au=g$ и $J(u)=\tilde{J}(g)$.

Пусть $\omega(\delta;\tilde{J},A(U))$ – модуль непрерывности отображения $\tilde{J}$ на множестве $A(U)$ [1]

$$\omega(\delta;\tilde{J},A(U)) = \sup\{|\tilde{J}(g_1)-\tilde{J}(g_2)|:g_1,g_2\in A(U),\ \|g_1-g_2\|\leq\delta\}.$$

ТЕОРЕМА 5. $\Delta_{\text{опт}}(\delta,\mathcal{G}_0) = \frac{1}{2}\omega(2\delta;\tilde{J},A(U))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любого $\delta>0$

$$\omega(\delta;\tilde{J},A(U)) = \omega(\delta;\hat{J},\mathcal{G}_0).$$

В одну сторону неравенство очевидно

$$\omega(\delta;\hat{J},\mathcal{G}_0) = \sup_{G_1,G_2\in\mathcal{G}_0,\ d(G_1,G_2)\leq\delta}|\hat{J}(G_1)-\hat{J}(G_2)| \geq \sup_{g_1,g_2\in A(U),\ \|g_1-g_2\|\leq\delta}|\hat{J}(\{g_1\})-\hat{J}(\{g_2\})| = \omega(\delta;\tilde{J},A(U)).$$

Покажем, что справедливо неравенство и в обратную сторону.

Пусть $G_1,G_2\in\mathcal{G}_0$, $d(G_1,G_2)\leq\delta$, $\hat{J}(G_1)\geq\hat{J}(G_2)$, $u_1\in U_0(G_1)$, $u_2\in U_0(G_2)$. Так как $Au_2\in G_2$ и $d(G_1,G_2)\leq\delta$, то найдется элемент $g\in G_1{:}\|g-Au_2\|\leq\delta$. Взяв $u\in U$ такой, что $Au=g$ и $J(u)=\tilde{J}(g)$, получим

$$|\hat{J}(G_1)-\hat{J}(G_2)| = J(u_1)-J(u)+J(u)-J(u_2).$$

Но $J(u_1)-J(u)\leq 0$, поэтому

$$|\hat{J}(G_1)-\hat{J}(G_2)|\leq J(u)-J(u_2)=\tilde{J}(g)-\tilde{J}(Au_2)\leq\omega(\|g-Au_2\|;\tilde{J},A(U))\leq\omega(\delta;\tilde{J},A(U)).$$

Обозначим через P_0 метод регуляризации задачи (3.2), порожденный задачей (2.1), т.е.

$$P_0(G_\delta,\delta) = \hat{J}(G_\delta+S(\delta)).$$

ТЕОРЕМА 6. $\Delta(P_0,\delta,\mathcal{G}_0)\leq\omega(2\delta;\tilde{J},A(U))$, *таким образом, метод* P_0 *оптимален по порядку на* $\mathcal{G}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G\in\mathcal{G}_0$ и $G_\delta{:}d(G,G_\delta)\leq\delta$, тогда $G\subset G_\delta+S(\delta)$, $d(G,G_\delta+S(\delta))\leq 2\delta$ и $\hat{J}(G)\geq\hat{J}(G_\delta+S(\delta))$, тогда, взяв $u_1\in U_0(G)$ и $u_2\in U_0(G_\delta+S(\delta))$, найдем $g\in G$ такое, что $\|g-Au_2\|\leq$

$\leqslant 2\delta$. Так как $G \subset A(U)$, то найдется $u \in U: J(u) = \tilde{J}(g)$, тогда

$$|P_0(G_\delta,\delta) - \hat{J}(G)| = J(u_1) - J(u) + J(u) - J(u_2) \leqslant J(u) - J(u_2) = \tilde{J}(g) - \tilde{J}(Au_2) \leqslant \omega(2\delta;\tilde{J},A(U)).$$

Учитывая определение (3.2), получим

$$\Delta(P_0,\delta,\mathcal{G}_0) \leqslant \omega(2\delta;\tilde{J},A(U)).$$

В заключение покажем, что в рассмотренном в п.1 примере $\omega(\delta;\tilde{J},A(U)) \longrightarrow 0$ при $\delta \longrightarrow 0$.

Действительно, в этом примере $A(U)=[-1;1]$, $\tilde{J}(g)=\inf\left\{-\int_0^1 u(t)dt : \int_0^1 u(t)dt = g\right\} = -g$, т.е. $\omega(\delta;\tilde{J},A(U)) = \delta \longrightarrow 0$ при $\delta \longrightarrow 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решений некорректных задач.* – М.: Наука, 1979. – 285 с.

2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.

3. Лаврентьев М.М. *О некорректных задачах математической физики.* – Новосибирск, 1962. – 92 с.

4. Лисковец О.А. *Вариационные методы решения неустойчивых задач.* – Минск, 1981. – 343 с.

5. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.

6. Тихонов А.Н., Васильев Ф.П., Потапов М.М., Юрий А.Д. *О регуляризации задач минимизации на множествах, заданных приближенно* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и кибернет. – 1977. – № 1. – С.4–19.

7. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* – М.: Наука, 1968. – 475 с.

8. Иосида К. *Функциональный анализ.* – М.:Мир, 1967. –624 с.

9. Сеа Ж. *Оптимизация. Теория и алгоритмы.* – М.: Мир, 1973. – 244 с.

10. Куратовский К. *Топология.* Т.1. – М.: Мир, 1966. – 438 с.

11. Дончев А. *Системы оптимального управления: возмущения, приближения и анализ чувствительности.* – М.: Мир, 1987. – 156 с.

12. Singer I. *Some remarks on approximative compactness* // Rev. roum. math. pures et. appl. – 1964. – V.9. – № 2. – P. 167–177.

13. Танана В. П. *Методы решения операторных уравнений.* – М.: Наука, 1981.– 156 с.

14. Танана В.П. *Оптимальные по порядку методы решения нелинейных некорректно поставленных задач* //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1976. – Т.16. – № 2. – С.503–507.

15. Иванов В.В. *Об оптимальных по точности алгоритмах приближенного решения операторных уравнений* 1 *рода* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1975. – Т.15. – № 1. – С.3–11.

16. Данилин А.Р. *Об оптимальных по порядку оценках конечномерных аппроксимаций решений некорректных задач* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1985. – Т.25. – № 8. – С.1123–1130.

г.Екатеринбург

Поступила
13.12.1990