Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

R. L. Dolganov, Chebyshev approximation by asymptotically convex families of functions,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1972, Number 7, 35–41

https://www.mathnet.ru/eng/ivm4080

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.87
January 17, 2026, 03:59:57

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1972 МАТЕМАТИКА № 7 (122)

УДК 517.518

Р. Л. Долганов

ЧЕБЫШЕВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ВЫПУКЛЫМИ СЕМЕЙСТВАМИ ФУНКЦИЙ

§ 1. Определения и основные результаты

Асимптотически выпуклые множества и отображения в теории наилучших чебышевских приближений были введены Г. Майнардусом и Д. Шведтом [5]. В. Крабс [4] исследовал некоторые свойства таких отображений и указал условия, эквивалентные асимптотической выпуклости, а Б. Брозовски [1] дал критерий однозначности элемента наилучшего приближения, достаточность которого показана также в [5]. В настоящей работе (теорема 1) решается вопрос о размерности множества элементов наилучшего приближения, когда такое приближение не единственно. Из этой теоремы как частный случай следует критерий однозначности (теорема 2).

Пусть $C(Q)$ означает пространство непрерывных функций, определенных на бикомпакте Q, с нормой

$$\|f\| = \max_{x \in Q} |f(x)|, \quad f \in C(Q),$$

и A — непустое открытое подмножество k-мерного пространства P^k векторов $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$. Пространства $C(Q)$ и P^k предполагаются одновременно вещественными или комплексными. Пусть отображение $v: A \to C(Q)$ соотносит каждому $\gamma \in A$ некоторую функцию $v[\gamma] = v(\gamma, x)$. Обозначим $V = v(A) = \{v[\gamma]\}_{\gamma \in A}$.

Отображение v предполагаем взаимно однозначным и дифференцируемым по параметру γ, причем частные производные

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_1} v(\gamma, x), \dots, \frac{\partial}{\partial \gamma_k} v(\gamma, x) \tag{1}$$

непрерывны в каждой точке $(\gamma, x) \in A \times Q$.

Пусть $\gamma_0 = (\gamma_{01}, \dots, \gamma_{0k})$ — заданный вектор. Сопоставим ему линейное пространство $W(\gamma_0)$, натянутое на функции (1), соответствующие выбранному значению γ_0. Его линейная размерность $d(\gamma_0)$, очевидно, не превосходит k. Тогда каждому вектору $\gamma \in P^k$ в пространстве $W(\gamma_0)$ соответствует функция $F(\gamma_0, x; \delta)$ вида

$$F(\gamma_0, x; \delta) = \sum_{\nu=1}^{k} \delta_\nu \frac{\partial}{\partial \gamma_{0\nu}} v(\gamma_0, x), \quad \delta = \gamma - \gamma_0.$$

Определение [5]. Множество V (а также отображение v) называется асимптотически выпуклым, если для каждой пары параметров γ_0, γ из A и каждого вещественного $t \in [0, 1]$ существует третий параметр $\gamma(t) \in A$ и вещественная непрерывная на $Q \times [0, 1]$

функция $g_\gamma(x, t) = g(\gamma_0, \gamma, x, t)$ такая, что: 1. $g_\gamma(x, 0) > 0$ на Q; 2. $\|(1-tg)v[\gamma_0] + tgv[\gamma] - v[\gamma(t)]\| = o(t)$ при $t \to 0$.

Все дальнейшие рассуждения ведутся в предположении, что множество $A \subset P^k$ выпукло и для каждой пары векторов γ_0, γ из A функция $\gamma(t)$ есть их выпуклая комбинация: $\gamma(t) = (1-t)\gamma_0 + t\gamma$, $t \in [0, 1]$. При этих предположениях, как показал В. Крабс [4], асимптотическая выпуклость множества V эквивалентна такому условию: для каждой пары векторов γ_0, $\gamma \in A$ имеет место представление

$$v(\gamma, x) = v(\gamma_0, x) + \varphi_\gamma(x) F(\gamma_0, x; \delta), \tag{2}$$

где $\delta = \gamma - \gamma_0$ и $\varphi_\gamma(x) = 1/g_\gamma(x, 0) > 0$ на Q.

Пример. Пусть $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)\}$ — две системы линейно независимых функций вещественного пространства $C(Q)$. Рассмотрим множество V обобщенных рациональных дробей

$$v(\gamma, x) = X(\alpha, x)/Y(\beta, x) = (\alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \\ + \alpha_n\varphi_n(x))(\beta_1\psi_1(x) + \ldots + \beta_m\psi_m(x))^{-1}, \tag{3}$$

у которых $Y(\beta, x) > 0$ на Q. Пусть A есть множество соответствующих векторов $\gamma = (\alpha, \beta) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ евклидова $(n+m)$-мерного пространства. Множество A выпукло. Поскольку для $t > 0$ $v[t\gamma] = v[\gamma]$, то можно отождествить луч $t\gamma$ с точкой γ. Тогда отображение v будет взаимно однозначным. Пусть

$$\gamma(t) = (1-t)\gamma_0 + t\gamma \text{ и } g_\gamma(x, t) = Y(\beta, x)[(1-t)Y(\beta_0, x) + tY(\beta, x)]^{-1}$$

для каждой пары векторов γ_0, $\gamma \in A$ и $t \in [0, 1]$. Нетрудно видеть, что множество V удовлетворяет определению асимптотической выпуклости, причем $o(t) \equiv 0$.

Пусть $\rho > 0$ для заданной функции $f \in C(Q)$ означает величину наилучшего приближения относительно множества V, т. е. $\rho = \rho_V(f) = \inf\limits_{\gamma \in A} \|v[\gamma] - f\|$. Функцию $v[\gamma_0] \in V$, для которой $\|v[\gamma_0] - f\| = \rho$, будем называть наилучшим приближением $f(x)$ относительно множества V, или минимальным решением задачи П. Л. Чебышева. Обозначим через $T_V f$ множество всех минимальных решений для функции $f(x)$. Тогда представляет интерес задача о размерности этого множества, которая обобщает известную проблему А. Хаара [8] об однозначности чебышевского приближения. Впервые эта задача была поставлена и решена Г. Ш. Рубинштейном [7] для случая, когда V есть множество обобщенных вещественных полиномов. В [6] рассмотрен комплексный аналог проблемы Г. Ш. Рубинштейна. Б. Брозовски [2] дал характеристику рациональной размерности множества $T_V f$, если V есть множество дробей (3). В предлагаемой статье вопрос о размерности множества $T_V f$ решается для асимптотически выпуклых множеств.

Пусть для каждого $\gamma \in A$ число r определено неравенством $0 \leqslant r \leqslant d(\gamma) - 1$. Будем говорить, что для множества V выполняется локально условие Рубинштейна, если для любого $\gamma \in A$ в пространстве $W(\gamma)$ каждые $r+1$ линейно независимых функций $F(\gamma, x; \delta_0)$, $F(\gamma, x; \delta_1), \ldots, F(\gamma, x; \delta_r)$ имеют на Q не более $d(\gamma) - r - 1$ общих нулей. Если здесь $r = 0$, то говорят о локальной выполнимости условия Хаара (ср. с [5]).

Пусть в пространстве P^k векторы

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m, \quad m \leqslant k, \tag{4}$$

лезависимы, т. е. такие, что векторы $\gamma_1 - \gamma_0, \dots, \gamma_m - \gamma_0$ образуют нинейно независимую систему. Назовем функции $v[\gamma_0], v[\gamma_1], \dots, v[\gamma_m]$, $m \leqslant k$, множества V асимптотически независимыми, если соответствующие им векторы (4) образуют независимую систему в пространстве P^k. Если максимальная асимптотически независимая система функций из V содержит точно $m+1$ функцию, то будем говорить, что асимптотическая размерность множества V равна m.

Теорема 1. *Для того чтобы для каждой функции $f \in C(Q)$ асимптотическая размерность множества $T_V f$ наилучших приближений не превосходила числа r, необходимо и достаточно, чтобы для множества V выполнялось локально условие Рубинштейна.*

Отсюда при $r=0$ следует

Теорема 2. *Для того чтобы для каждой функции $f \in C(Q)$ наилучшее приближение относительно множества V было единственным, необходимо и достаточно, чтобы для множества V выполнялось локально условие Хаара.*

§ 2. Вспомогательные теоремы

Обозначим через $L(\gamma)$ множество экстремальных точек функции — разности $v(\gamma, x) - f(x)$, т. е. $L(\gamma) = \{x \in Q : |v(\gamma, x) - f(x)| = \|v[\gamma] - f\|\}$. Множество $L(\gamma)$, очевидно, замкнуто. Пусть, далее,

$$S(\gamma_0, \gamma, x) = \operatorname{Re}\{(v(\gamma_0, x) - f(x))\overline{(v(\gamma_0, x) - v(\gamma, x))}\}. \tag{5}$$

Как показали Г. Майнардус и Д. Шведт [5], для асимптотически выпуклых множеств имеет место следующее обобщение критерия А. Н. Колмогорова [3]: *функция $v[\gamma_0] \in V$ доставляет $f(x)$ наилучшее приближение относительно множества V тогда и только тогда, когда для любого $v[\gamma] \in V$ выполняется неравенство*

$$\min_{x \in L(\gamma_0)} S(\gamma_0, \gamma, x) \leqslant 0. \tag{6}$$

Следующие утверждения выражают некоторые свойства асимптотически выпуклых отображений.

Лемма 1. *Функции $v[\gamma_0], v[\gamma_1], \dots, v[\gamma_m]$ множества V образуют асимптотически независимую систему тогда и только тогда, когда соответствующие им в пространстве $W(\gamma_0)$ функции $F(\gamma_0, x; \delta_1), \dots, F(\gamma_0, x; \delta_m)$, $\delta_i = \gamma_i - \gamma_0$; $i = 1, \dots, m$, линейно независимы.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что для некоторой системы чисел $c_1, \dots, c_m$, не равных нулю одновременно, будет

$$\sum_{i=1}^{m} c_i F(\gamma_0, x; \delta_i) = F\Big(\gamma_0, x; \sum_{i=1}^{m} c_i \delta_i\Big) = 0.$$

Пусть $\gamma = \gamma_0 + t \sum_{i=1}^{m} c_i \delta_i$. Так как множество A открыто в P^k, то для достаточно малого $t > 0$ $\gamma \in A$. Тогда из представления (2) следует

$$v(\gamma, x) - v(\gamma_0, x) = t\varphi_\gamma(x) F\Big(\gamma_0, x; \sum_{i=1}^{m} c_i \delta_i\Big) = 0.$$

Значит, $v(\gamma, x) = v(\gamma_0, x)$ на Q. Поскольку отображение v взаимно однозначно, то $\gamma = \gamma_0$ и, следовательно, $\sum_{i=1}^{m} c_i \delta_i = 0$, что означает зависимость системы векторов $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$.

Достаточность леммы доказывается аналогично.

Пусть $\gamma_0 \in A$, а $x_1, \ldots, x_s$ — различные точки из Q, причем $0 < s \leqslant d(\gamma_0)$. Определим матрицу

$$\begin{pmatrix} \partial v(\gamma_0, x_1)/\partial\gamma_{01} \ldots \partial v(\gamma_0, x_1)/\partial\gamma_{0k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \partial v(\gamma_0, x_s)/\partial\gamma_{01} \ldots \partial v(\gamma_0, x_s)/\partial\gamma_{0k} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Лемма 2. *Для множества V выполняется локально условие Рубинштейна тогда и только тогда, когда для любых $s = d(\gamma_0) - r$ различных точек $x_1, \ldots, x_s$ из Q ранг матрицы (7) равен s.*

Доказательство почти не отличается от доказательства леммы 1 из [2].

Лемма 3. *Если $v[\gamma_0]$ и $v[\gamma_1]$ — два наилучших приближения функции $f(x)$ относительно множества V, то множество $N_1 = L(\gamma_0) \cap L(\gamma_1)$ не пусто, причем $v(\gamma_0, x) = v(\gamma_1, x)$ при $x \in N_1$.*

Доказательство. Предположим, что $N_1 = \varnothing$. Тогда на множестве $L(\gamma_0)$

$$|v(\gamma_0, x) - f(x)| > |v(\gamma_1, x) - f(x)|. \tag{8}$$

Так как $v(\gamma_1, x) = v(\gamma_0, x) - (v(\gamma_0, x) - v(\gamma_1, x))$, то

$$|v(\gamma_1, x) - f(x)|^2 = |v(\gamma_0, x) - f(x)|^2 - \\ - 2S(\gamma_0, \gamma, x) + |v(\gamma_0, x) - v(\gamma_1, x)|^2. \tag{9}$$

Отсюда и из неравенства (8) следует, что на множестве $L(\gamma_0)$ $S(\gamma_0, \gamma_1, x) > 2^{-1}|v(\gamma_0, x) - v(\gamma_1, x)|^2 \geqslant 0$, а это противоречит условию (6).

Покажем, что $\min\limits_{x \in L(\gamma_0)} S(\gamma_0, \gamma_1, x) = 0$. Действительно, если предположить, что в некоторой точке $x_0 \in L(\gamma_0)$ будет $S(\gamma_0, \gamma_1, x_0) < 0$, то из равенства (9) имеем $|v(\gamma_1, x_0) - f(x_0)| > |v(\gamma_0, x_0) - f(x_0)| = \rho$, а это противоречит минимальности $v(\gamma_1, x)$. Так как на множестве $L(\gamma_0) \setminus N_1$ выполняется неравенство (8), то здесь $S(\gamma_0, \gamma_1, x) > 0$. Следовательно, своего минимума, равного нулю, функция $S(\gamma_0, \gamma_1, x)$ достигает на множестве N_1. Тогда из равенства (9) следует, что на множестве N_1 функции $v(\gamma_0, x)$ и $v(\gamma_1, x)$ совпадают.

Лемма 4. *Если функции $v[\gamma_0], v[\gamma_1], \ldots, v[\gamma_m]$ доставляют $f(x)$ наилучшее приближение относительно множества V, то множество $N = \bigcap_{i=0}^{m} L(\gamma_i)$ не пусто, причем на этом множестве*

$$v(\gamma_0, x) = v(\gamma_i, x), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $N = \varnothing$. Тогда каждая точка $x \in L(\gamma_0)$ принадлежит хотя бы одному из множеств $L(\gamma_0) \setminus N_i$, где $N_i = L(\gamma_0) \cap L(\gamma_i)$, $i = 1, \ldots, m$. По лемме 3

$$S(\gamma_0, \gamma_i, x) > 0, \text{ если } x \in L(\gamma_0) \setminus N_i. \tag{11}$$

Поэтому на множестве $L(\gamma_0)$

$$\sum_{i=1}^{m} g_{\gamma_i}(x, 0) S(\gamma_0, \gamma_i, x) > 0, \tag{12}$$

где $g_{\gamma_i}(x, 0) > 0$ есть функция, входящая в определение асимптотической выпуклости. Так как множество A открыто в P^k, то для достаточно малого $t > 0$ вектор $\gamma = \gamma_0 + t \sum_{i=1}^{m} \delta_i$, где $\delta_i = \gamma_i - \gamma_0$, $i = 1, \ldots, m$, принадлежит множеству A и, следовательно, $v[\gamma] \in V$. Используя дважды представление (2) и линейность функции F по δ, можно записать

$$v(\gamma, x) = v(\gamma_0, x) - t\varphi_\gamma(x) \sum_{i=1}^{m} g_{\gamma_i}(x, 0)(v(\gamma_0, x) - v(\gamma_i, x)), \tag{13}$$

где $\varphi_\gamma(x) > 0$ на Q. Тогда, по определению (5),

$$S(\gamma_0, \gamma, x) = t\varphi_\gamma(x) \sum_{i=1}^{m} g_{\gamma_i}(x, 0) S(\gamma_0, \gamma_i, x). \tag{14}$$

Из неравенства (12) следует, что $S(\gamma_0, \gamma, x) > 0$, если $x \in L(\gamma_0)$. Снова получаем противоречие с условием (6).

По лемме 3, $v(\gamma_0, x) = v(\gamma_i, x)$, если $x \in N_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда на множестве $N = \bigcap_{i=1}^{m} N_i$, которое по доказанному не пусто, будут выполняться равенства (10). Лемма доказана.

Из определения (14) и неравенств (11) вытекает

Следствие. *На множестве $L(\gamma_0) \setminus N$ функция $S(\gamma_0, \gamma, x) > 0$.*

Лемма 5. *Если для множества V выполняется локально условие Рубинштейна, то каждые $r + 2$ асимптотически независимые функции*

$$v[\gamma_0], \ v[\gamma_1], \ldots, \ v[\gamma_{r+1}], \tag{15}$$

упорядоченные так, что $d(\gamma_0) \leqslant d(\gamma_1) \leqslant \ldots \leqslant d(\gamma_{r+1})$, имеют на Q не более $d(\gamma_0) - r - 1$ точек, в которых они совпадают.

Доказательство. По лемме 1 функции $F(\gamma_0, x; \delta_i)$, где $\delta_i = \gamma_i - \gamma_0$, $i = 1, \ldots, r + 1$, линейно независимы. В силу локальной выполнимости условия Рубинштейна они имеют на Q не более $n = d(\gamma_0) - r - 1$ общих нулей $x_1, \ldots, x_n$. Из представления (2) следует, что в этих точках функции (15) совпадают.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Доказательство проведем в предположении, что пространства $C(Q)$ и P^k комплексные. В вещественном случае изменения в доказательстве очевидны.

Необходимость. Предположим, что для некоторого вектора $\gamma_0 \in A$ в пространстве $W(\gamma_0)$ найдется $r + 1$ независимая функция

$$F(\gamma_0, x; \delta_1), \ldots, F(\gamma_0, x; \delta_{r+1}), \tag{16}$$

причем эти функции имеют общие нули в точках

$$x_1, \ldots, x_s, \ s = d(\gamma_0) - r. \tag{17}$$

Тогда по лемме 2 ранг матрицы (7) будет $\leqslant d(\gamma_0) - r - 1$ и, следовательно, ее столбцы линейно зависимы. Поэтому найдутся комплексные числа $a_1, \ldots, a_s$, не равные нулю одновременно, такие, что

$$a_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_{0\nu}} v(\gamma_0, x_1) + \ldots + a_s \frac{\partial}{\partial \gamma_{0\nu}} v(\gamma_0; x_s) = 0, \ \nu = 1, \ldots, k.$$

Отсюда следует, что для каждой функции $F(\gamma_0, x; \delta) \in W(\gamma_0)$ выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{s} a_j F(\gamma_0, x_j; \delta) = 0,$$

или, с учетом представления (2),

$$\sum_{j=1}^{s} a_j g_\gamma(x_j, 0)(v(\gamma, x_j) - v(\gamma_0, x_j)) = 0. \tag{18}$$

Так как множество A открыто в P^k, то найдется $t_1 > 0$ такое, что при всех $0 < t \leqslant t_1$ векторы $\gamma_i = \gamma_0 + t\delta_i$, $i = 1, \ldots, r+1$, принадлежат множеству A. Нетрудно видеть, что функции множества V

$$v[\gamma_0],\ v[\gamma_1], \ldots, v[\gamma_{r+1}] \tag{19}$$

образуют асимптотически независимую систему.

Пусть функция $\psi \in C(Q)$ выбрана таким образом, что $|\psi(x)| \leqslant 1$ на Q и $\psi(x_j) = \bar{a}_j / |a_j|$, $j = 1, \ldots, s$, для тех чисел $a_1, \ldots, a_s$, которые отличны от нуля. (Если $a_j = 0$, то в соответствующей точке множества (17) полагаем $\psi(x_j) = 0$.) Далее для функций (16) примем

$$C(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{r+1} |F(\gamma_0, x; \delta_i)|,$$

где $\varepsilon > 0$ выбрано столь малым, что $C(x) < 1$ на Q. На множестве (17) $C(x_j) = 0$, $j = 1, \ldots, s$. Пусть теперь $\Phi(x) = \psi(x)\{1 - C(x)\} + v(\gamma_0, x)$. Покажем, что $\rho_V(\Phi) = 1$. Для $v[\gamma_0]$ имеем $\|v[\gamma_0] - \Phi\| = 1$. Предположим, что $\|v[\gamma] - \Phi\| < 1$ для некоторого $\gamma \in A$. В тех точках x_j множества (17), где $a_j \neq 0$, будет $v(\gamma, x_j) - \Phi(x_j) = v(\gamma, x_j) - (\gamma_0, x_j) - \bar{a}/|a_j|$. Отсюда следует, что в этих точках $\operatorname{Re}\{a_j g_\gamma(x_j, 0)(v(\gamma, x_j) - v(\gamma_0, x_j))\} = g_\gamma(x_j, 0) \operatorname{Re}\{a_j[v(\gamma, x_j) - \Phi(x_j) + \bar{a}_j/|a_j|]\} = g_\gamma(x_j, 0) \operatorname{Re}\{|a_j| - a_j(\Phi(x_j) - v(\gamma, x_j))\} \geqslant g_\gamma(x_j, 0)|a_j|\{1 - |\Phi(x_j) - v(\gamma, x_j)|\} > 0$. Следовательно, $\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{s} a_j g_\gamma(x_j, 0)(v(\gamma, x_j) - v(\gamma_0, x_j)) > 0$, что противоречит условию (18).

Покажем, что множество $T_V\Phi$ имеет асимптотическую размерность, не меньшую $r+1$. Каждая функция из (19) представима в виде $v(\gamma_i, x) = v(\gamma_0, x) + t\varphi_{\gamma_i}(x) F(\gamma_0, x; \delta_i)$, $i = 1, \ldots, r+1$. Тогда на бикомпакте Q для каждого $i = 1, \ldots, r+1$ будет $|v(\gamma_i, x) - \Phi(x)| = |t\varphi_{\gamma_i}(x) F(\gamma_0, x; \delta_i) - \psi(x)\{1 - C(x)\}| \leqslant t|\varphi_{\gamma_i}(x) F(\gamma_0, x; \delta_i)| + 1 - C(x) \leqslant 1$ для достаточно малых $t > 0$, т. е. при $0 < t \leqslant t_2$.

Пусть $\tau = \min\{t_1, t_2\}$. Тогда при $0 < t \leqslant \tau$ функции (19), которые образуют асимптотически независимую систему, доставляют $\Phi(x)$ наилучшее приближение. Следовательно, асимптотическая размерность множества $T_V\Phi$ не менее чем $r+1$.

Достаточность. Предположим противное. Тогда для некоторой функции $f \in C(Q)$ множество элементов наилучшего приближения $T_V f$ имеет асимптотическую размерность не менее чем $r+1$. Найдутся поэтому $r+2$ асимптотически независимых элемента множества V $v[\gamma_0], v[\gamma_1], \ldots, v[\gamma_{r+1}]$, доставляющих функции $f(x)$ наилучшее приближение. Пусть они занумерованы в таком порядке, что $d(\gamma_0) \leqslant d(\gamma_1) \leqslant \ldots \leqslant d(\gamma_{r+1})$. Как и в лемме 4, обозначим

$\gamma = \gamma_0 + t \sum_{i=1}^{r+1} \delta_i$, где $\delta_i = \gamma_i - \gamma_0$, $i = 1, \ldots, r+1$, и построим функцию $v(\gamma, x)$ вида (13) с $m = r+1$.

По лемме 5 имеется не более $n = d(\gamma_0) - r - 1$ точек

$$x_1, \ldots, x_n \tag{20}$$

из $L(\gamma_0)$, в которых

$$v(\gamma_0, x_j) = v(\gamma_i, x_j), \ i = 1, \ldots, r+1; \ j = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Очевидно, $d(\gamma_0) \leqslant d(\gamma)$. Дополним систему точек (20) до $s = d(\gamma) - r$ различных точек из Q. Тогда ранг матрицы (7), соответствующей функции $v(\gamma, x)$ и точкам $x_1, \ldots, x_s$, равен s. Поэтому система линейных уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{k} \delta_\nu \frac{\partial}{\partial \gamma_\nu} v(\gamma, x_j) = f(x_j) - v(\gamma_0, x_j), \ j = 1, \ldots, s,$$

имеет решение δ_0 и $F(\gamma, x_j; \delta_0) = f(x_j) - v(\gamma_0, x_j)$, $j = 1, \ldots, s$.

Так как множество $A \subset P^k$ открыто, то найдется $t_1 > 0$ такое, что при всех $0 < t \leqslant t_1$ вектор $\bar{\gamma} = \gamma + t\delta_0$ принадлежит A. Поэтому в точках (20) с использованием представления (2) имеем

$$v(\bar{\gamma}, x_j) - v(\gamma, x_j) = t\varphi_{\bar{\gamma}}(x_j)(f(x_j) - v(\gamma_0, x_j)), \ j = 1, \ldots, n.$$

В точках (20) выполняются равенства (21), следовательно, для функции $v(\gamma, x)$, определенной равенством (13) с $m = r+1$, будет $v(\gamma, x_j) = v(\gamma_0, x_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Поэтому

$$S(\gamma_0, \bar{\gamma}, x_j) = \operatorname{Re}\{(v(\gamma_0, x_j) - f(x_j))\overline{(v(\gamma_0, x_j) - v(\bar{\gamma}, x_j))}\} = \\ = t\varphi_{\bar{\gamma}}(x)\,|v(\gamma_0, x_j) - f(x_j)|^2 > 0, \ j = 1, \ldots, n.$$

Найдется, следовательно, открытая окрестность $\tilde{N}$ множества (20), на которой будет выполняться последнее неравенство.

По следствию из леммы 4, $S(\gamma_0, \gamma, x) > 0$, если $x \in L(\gamma_0) \setminus \tilde{N}$. Так как функция S непрерывна на $A \times Q$, то найдется $t_2 > 0$ такое, что $S(\gamma_0, \gamma + t\delta_0, x) > 0$ при $0 < t \leqslant t_2$, если $x \in L(\gamma_0) \setminus \tilde{N}$. Пусть $\tau = \min\{t_1, t_2\}$. Тогда при $0 < t \leqslant \tau$ всюду на множестве $L(\gamma_0)$ будет $S(\gamma_0, \bar{\gamma}, x) > 0$, что противоречит условию Г. Майнардуса и Д. Шведта (6). Теорема доказана.

Поступило
28 IV 1970

г. Свердловск

ЛИТЕРАТУРА

1. Brosowski B. Über die Eindeutigkeit der asymptotisch konvexen Tschebyscheff-Approximationen. Internat. Ser. Numer. Math. 7, Basel—Stuttgart, 1967, S. 9—17.
2. Brosowski B. Über die Eindeutigkeit der rationalen Tschebyscheff-Approximationen. Numer. Math., Bd. 7, № 2, 1965, S. 176—186.
3. Колмогоров А. Н. Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции. УМН, т. 3, № 1, 1948, с. 216—221.
4. Krabs W. Über differenzierbare asymptotisch konvexe Funktionfamilien bei nicht-linearen gleichmäßigen Approximation. Arch. Ration. Mech. and Analysis, Bd. 27, № 4, 1967, S. 275—288.
5. Meinardus G., Schwedt D. Nicht-lineare Approximationen. Arch. Ration. Mech. and Analysis, Bd. 17, № 4, 1964, S. 297—326.
6. Романова З. С. О размерности многогранников наилучших приближений в пространстве непрерывных функций. Лит. матем. сб., т. 2, № 2, 1962, с. 181—191.
7. Рубинштейн Г. Ш. Об одном методе исследования выпуклых множеств. ДАН СССР, т. 102, № 3, 1955, с. 451—454.
8. Haar A. Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. Math. Ann., Bd. 78, № 5, 1918, S. 294—311.