УДК 519.11

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ
(Матричные проблемы, теория выбора)

В. А. Носов, В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов

Настоящий обзор является первым обзором по общей комбинаторной теории в серии «Итоги науки». Бурный рост за последние 20 лет числа исследований в этой области — факт общеизвестный. Развитие комбинаторной математики при этом происходило как вглубь, так и вширь. Наряду с развертыванием большой работы по построению прочного фундамента комбинаторных исследований было получено огромное количество конкретных новых результатов как в классических задачах (например, таких, как решение знаменитой проблемы Эйлера об ортогональных латинских квадратах или проблемы четырех красок в теории графов), но и в совершенно новых, ранее не известных отраслях теории, родившихся как из внутренних ее потребностей, так и из нужд многочисленных, трудно обозримых приложений дискретной математики. Все это заранее обрекает на неудачу попытку в одном кратком обзоре дать сколько-нибудь полную картину современного состояния комбинаторного анализа. Настоящий обзор следует рассматривать как попытку осветить лишь некоторые, принципиально важные стороны общей комбинаторной теории, которые являются сейчас весьма актуальными, о чем, в частности, свидетельствует обилие публикаций, лишь частично отраженное в библиографии.

В настоящее время принято следующее деление общей комбинаторной теории на три части: перечисление, конфигурации и проблемы выбора. Все эти части присутствуют в обзоре в очень суженном виде. Так, в обзоре мы не касаемся вопросов существования и построения блок-схем, проективных плоскостей и родственных им конфигураций (по этому поводу см. [24, 106]). Мы оставляем в стороне также многие вопросы перечислительной теории, а также разнообразные связи комбинаторики с теорией вероятностей, отсылая читателя к недавно вышедшим монографиям [17—18], а также к сборнику [13]. Не затрагиваются также алгоритмические проблемы комбинаторики (см. [176]). Все эти вопросы, ввиду обширности материала, требуют отдельного обзора. Подробно освещены комбинаторные аспекты теории перманентов, матриц с неотрицательными элементами. В части, посвященной латинским квадратам, основное внимание уделяется задачам их перечисления, проблеме пополнения частичного латинского квадрата, а также вопросам существования эквидистантных перестановочных таблиц. Относительно более полно (но все-таки, по необходимости, конспективно) рассматриваются проблемы выбора, в том числе фундаментальная для них теория матроидов. Здесь опущены некоторые темы, в частности, теория Рамсея, комбинаторика конечных структур, приложения. В обзоре рассматриваются, прежде всего, статьи, прореферированные в Реферативном журнале «Математика» в 1975—1979 гг., однако в целях создания более ясной перспективы часто привлекаются и более ранние работы. С другой стороны, в разделах, посвященных проблемам выбора, наличие монографий и обзорных статей по рассматриваемым вопросам (см. [16, 21, 123, 168, 217]) позволило, отправляясь от них, более строго ограничить изложение лишь последними годами.

§ 1. ПЕРМАНЕНТЫ

Перманент матрицы $A=(a_{ij})$, $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,m$, $n\leqslant m$, с элементами из коммутативного кольца определяется формулой

$$\operatorname{per} A=\sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

где суммирование ведется по всем инъективным отображениям $\sigma:[1,n]\rightarrow[1,m]$.

Основное внимание уделяется случаю $m=n$.

Одна из известных задач для перманентов связана с вопросом о существовании такого линейного преобразования T пространства $(n\times n)$-матриц M_n с действительными элементами, что выполняется тождество

$$\operatorname{per} A=\det A \text{ для всех } A\in M_n \tag{1}$$

(здесь $\det A$ — детерминант матрицы A).

В работе [152] было получено отрицательное решение этой задачи, а именно доказано, что при $n>2$ не существует такого T, чтобы тождество (1) выполнялось. Поэтому в дальнейшем рассматривались либо частные типы преобразований пространства M_n, либо преобразования подпространств M_n. Так, в [139] рассматривается пространство H_n-симметрических матриц над полем F, являющимся подполем поля действительных чисел. Доказывается, что не существует линейного преобразования пространства H_n со свойством $\operatorname{per} T(A)=c\det A$, где $n\geqslant3$, c — заданное число.

Пусть преобразование T пространства M_n заключается в изменении знака некоторых элементов матрицы A.

Говорят, что $(0, 1)$-матрица $A=(a_{ij})$ порядка n обратима, если существует матрица $B=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}=\pm a_{ij}$ и $\mathrm{per}A=\det B$. Пусть $\nu(A)$ — число единиц в матрице A.

В работе [96] установлено, что если A — обратимая матрица порядка n и $\mathrm{per}A>0$, то

$$\nu(A)\leqslant\frac{n^2+3n-2}{2},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда существуют подстановочные матрицы P и Q такие, что $A=PT_nQ$, где $T=(t_{ij})$ — $(0, 1)$-матрица порядка n такая, что $t_{ij}=0$ $\Leftrightarrow 1\leqslant i<j<n$. В частности, если A обратима, $n\geqslant 5$, то $\nu(A)\leqslant$ $\leqslant n(n-1)$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда A имеет нулевую строку или нулевой столбец.

В [144] найдены необходимые и достаточные условия обратимости квадратной $(0, 1)$-матрицы. Другой вопрос связан с описанием линейных преобразований пространства M_n, сохраняющих перманент.

Показано [148], что всякое линейное преобразование T, сохраняющее перманент, имеет вид

$$T(X)=DPXQL \text{ или } T(X)=DPX'QL, \tag{2}$$

где $X\in M_n$; P и Q — подстановочные матрицы, D и L — диагональные, штрих означает транспонирование. Если в качестве M_n взять Ω_n — пространство дважды стохастических матриц, то в [169] показано, что в этом случае преобразование T, сохраняющее перманент, имеет вид

$$T(X)=PXQ \text{ или } T(X)=PX'Q. \tag{3}$$

В работе [164] изучались линейные преобразования пространства M_n, сохраняющие не только перманент, но и элементарные симметрические функции от корней матрицы. В частности, установлено: если T — линейное преобразование M_n, $\mathrm{per}T(A)=\mathrm{per}A$ и $E_2(T(A))=E_2(A)$, где $E_2(A)$ — вторая симметрическая функция от корней матрицы A, то

$$T(A)=\pm D^{-1}P^{-1}APD \text{ либо } T(A)=\pm D^{-1}P^{-1}A'PD,$$

где D — диагональная, P — перестановочная матрицы.

Следующий вопрос связан с описанием класса матриц, для которых справедливо тождество

$$\mathrm{per}AB=\mathrm{per}A\cdot\mathrm{per}B. \tag{4}$$

Группа невырожденных матриц G над полем F называется перманентной, если для любых A, $B\in G$ справедливо тождество (4). В работах [35—36] показано, что если для любых $A, B\in G$ произведение Адамара $A\circ B'$ матриц A и B' — невырожденная диагональная матрица, то G — перманентная группа (произведение Адамара матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ есть матрица $A\circ B=(a_{ij}\cdot b_{ij})$.

Если G — перманентная группа и $\mathrm{Char}F=0$ либо $\mathrm{Char}F=p$, $p>n$, то каждая матрица из G имеет 1-диагональную структуру, т. е. в матрице только одна ненулевая диагональ. При этом под диагональю понимается набор таких элементов, из которых никакие два не лежат в одной строке или одном столбце. В [214] для простого $p \geqslant 3$ и произвольного поля F характеристики p строится циклическая перманентная группа матриц порядка p, матрицы которой не имеют диагональной структуры.

Аналогичным образом может быть введено понятие перманентной полугруппы. Доказывается [37], что если перманентная полугруппа матриц порядка n над областью целостности R с $\mathrm{Char} R = p$, где $p=0$ или $p>n$, содержит диагональные матрицы с ненулевыми диагональными элементами, то любой элемент полугруппы имеет самое большее одну ненулевую диагональ при условии, что $|R| \geqslant n^2+n$.

Большой цикл работ связан с попытками доказать выдвинутую в 1926 году Ван дер Варденом гипотезу о том, что

$$\operatorname{per} A \geqslant \frac{n!}{n^n}, \tag{5}$$

где A — дважды стохастическая $(n \times n)$-матрица; причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $A = J_n = \left\|\frac{1}{n}\right\|$.

Пусть Ω_n — множество всех дважды стохастических матриц. Еще в работе [153] было доказано, что если функция $\operatorname{per} A$ достигает минимума во внутренней точке пространства Ω_n (в евклидовой топологии), то гипотеза Ван дер Вардена справедлива; если же этот минимум достигается на границе Ω_n, то у соответствующей матрицы A нулевые элементы не находятся в одной строке. Установлено также неравенство

$$1 \geqslant \operatorname{per} A \geqslant (n^2-n+1)^{1-n}. \tag{6}$$

В работе [72] изучалась структура матрицы, на которой достигается минимальное значение перманента. В частности, показано, что все ее нулевые элементы не могут располагаться в двух строках (или столбцах). В [128] рассматривается множество Ω_n^* — дважды стохастических матриц, имеющих нулевые элементы, и доказывается, что функция перманента имеет локальный минимум на Ω_n^* в некоторой матрице Y, имеющей единственный нулевой элемент, причем $\operatorname{per} > \frac{n!}{n^n}$.

В работе [186] показано, что для любого n существует r такое, что $\min\limits_{A \in \Omega_n} \operatorname{per} A^r$ достигается при $A = \left\|\frac{1}{n}\right\|$, где положено $A^r = (a_{ij}^r)$, $A = (a_{ij})$. Указывается [29] вид дважды стохастической матрицы, имеющей k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, нулей в одной строке (в одном столбце), наиболее близкой к матрице Y_n, в которой перманент имеет локальный минимум.

Справедливость гипотезы Ван дер Вардена установлена для всех n, $n \leqslant 5$ ([153, 74]). В [90] доказана справедливость этой гипотезы для всех дважды стохастических матриц, имеющих собственные числа в секторе $-\frac{\pi}{2n} \leqslant \arg\lambda \leqslant \frac{\pi}{2n}$.

Выдвинут ряд гипотез, доказательство которых привело бы к подтверждению гипотезы Ван дер Вардена. Так, в [149] выдвинута гипотеза

$$\operatorname{per} A \geqslant \operatorname{per}\left(\frac{nJ_n - A}{n-1}\right), \tag{7}$$

причем при $n \geqslant 3$ равенство достигается только в случае $A = J_n$. При этом неравенство (7) доказано для дважды стохастических матриц, лежащих в достаточно малой окрестности J_n.

В работе [212], анализируя случай $n=3$, автор строит контрпример к (7) при $n=3$; вместо (7) предлагается другая гипотеза

$$\operatorname{per} A \geqslant \operatorname{per}\left(\frac{nJ_n + A}{n+1}\right), \tag{8}$$

причем равенство достигается только для $A = J_n$, из которой также следует предположение Ван дер Вардена.

В [103] доказано неравенство

$$\frac{1}{2}\left[\operatorname{per} A^2 + \sqrt{\operatorname{per} A \cdot A' \cdot \operatorname{per} A' \cdot A}\right] \geqslant \frac{n!}{n^n} \tag{9}$$

для $A \in \Omega_n$ и равенство достигается только в том случае, когда $A = J_n$ (штрих означает транспонирование).

Выдвинуто предположение, что

$$\frac{4 \operatorname{per}^2 A}{\operatorname{per} A \cdot A' + \operatorname{per} A' \cdot A + 2 \operatorname{per} A^2} \geqslant \frac{n!}{n^n}, \tag{10}$$

причем равенство достигается в том и только том случае, когда $A = J_n$.

Из этого предположения следует гипотеза Ван дер Вардена.

Другая гипотеза (Минк и Ньюмен) состоит в том, что справедливо неравенство

$$P_k(A) \geqslant P_k(J_n), \quad A \in \Omega, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

где $P_k(A)$ — сумма перманентных миноров k-го порядка. Гипотеза доказана для $n \leqslant 3$. Доказано [187], что если $A \neq J_n$ и собственные значения λ матрицы A лежат в секторе $-\frac{\pi}{2k} \leqslant \arg\lambda \leqslant \frac{\pi}{2k}$, то $\operatorname{per} A > P_k(J_n)$.

В работе [71] выдвинута гипотеза о том, что справедливо неравенство

$$P_k(A) \geqslant \frac{n-k+1}{nk} P_{k-1}(A), \quad k = 1, \ldots, n, \quad A \in \Omega_n. \tag{12}$$

Оно доказано для $k \leqslant 3$ и всех n. Каждое из равенств (11) и (12) влечет справедливость предположения Ван дер Вардена.

В работе [145] был установлен тот факт, что

$$\operatorname{per} A \leqslant \operatorname{per} A(i|j), \tag{13}$$

где $A\in\Omega_n$ — матрица, на которой достигается минимальное значение перманента, $A(i|j)$ — матрица, полученная из A вычеркиванием строки i и столбца j. Элементарное доказательство этого факта дано в [165]. Существует предположение, что матрицы A, для которых (13) справедливо для всех i, j, исчерпываются матрицами J_n и $K_n=\frac{1}{2}(I_n+P_n)$, где I_n — единичная матрица, P — матрица, отвечающая полноцикловой подстановке.

Доказывается [200], что $A=K_n$ для вполне неразложимых матриц A с условием (13) и одним из дополнительных условий:

1) имеющих положительную диагональ, каждый элемент которой изолирован;

2) один из наименьших положительных элементов изолирован;

3) обладает изолированным элементом и $\mathrm{per}A(i|j)=\mathrm{per}A$ для всех i, j. (Элемент a_{ij} называется изолированным, если после его удаления матрица теряет свойство быть вполне неразложимой, диагональ матрицы — множество n неколлинеарных элементов).

В работе [163] установлено, что если для некоторого k, $1<k<n-2$, перманенты всех подматриц порядка k дважды стохастической матрицы порядка n равны между собой, то $A=J_n$. В то же время при $k=n-1$ этот факт не имеет места. Обобщение этой работы дано в [83].

Изучается [198] структура дважды стохастической $(n\times n)$-матрицы, имеющей m попарно непересекающихся нулевых диагоналей $(1<m<n-1)$, и с постоянными суммами элементов по всем остальным диагоналям. Оказывается, что в этом случае все элементы вне диагоналей совпадают между собой.

С гипотезой Ван дер Вардена тесно связана задача получения нижних оценок для $\mathrm{per}A$, $A\in\Omega_n$. В работе [151] было установлено, что $\mathrm{per}A\geqslant\mathrm{per}J_n+\lambda_n{}^n(1-\mathrm{per}J_n)$, где λ_n — наименьшее собственное значение A. В [150] была получена оценка $\mathrm{per}A\geqslant n^{-n}$. Она улучшена в работе [186] до $\mathrm{per}A\geqslant n^{1-n}$ и в [91] доказана оценка $\mathrm{per}A\geqslant\frac{1}{n!}$

Самостоятельный интерес представляет задача нахождения хороших оценок для перманента произвольной (0, 1)-матрицы. Начнем с нижних оценок.

В работе [159] установлена оценка

$$\mathrm{per}\,A\geqslant\left(\sum_{i,j}a_{ij}\right)-2n+2$$

и для случая (0, 1)-матриц с k единицами в каждом столбце и каждой строке соответственно —

$$\mathrm{per}A\geqslant n(k-2)+2.$$

В [95] эта оценка улучшена в следующем виде (для полностью неразложимых матриц):

$$\operatorname{per} A \geqslant \left(\sum_{i,j} a_{ij}\right) - 2n + 2 + \sum_{m=1}^{k-1} (m! - 1),$$

где k — нижняя оценка для числа единиц в каждой строке.

В [108] эта оценка улучшается в виде (также для вполне неразложимых (0,1)-матриц)

$$\operatorname{per} A \geqslant [\sigma(A) - 2n + 2] + \sum_{i=2}^{k-3} (i! - 1)\, n + [(k-2)! - 1]\, R_1 + \\ + [(k-1)! - 1]\, R_2,$$

где $\sigma(A) = \sum_{i,j} a_{ij}$,

$$R_1 = R, \quad R_2 = 1, \text{ если } 0 \leqslant R < n+1,$$
$$R_1 = n, \quad R_2 = R - n + 1, \text{ если } R \geqslant n+1,$$
$$R = \sigma(A) - (3n-3) - (k-3)\, n,$$

k — нижняя оценка числа единиц в каждой строке.

В работе [162] приведена оценка для вполне неразложимых (0,1)-матриц со строчными суммами $r_1, \ldots, r_n$:

$$\operatorname{per} A \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i.$$

Из этой оценки вытекает, что $\operatorname{per} A \geqslant r(A)$, где $r(A)$ — максимальное собственное значение A. Для действительных $(n \times n)$-матриц $A = (a_{ij})$, у которых $a_{ii} \geqslant \sum_{j=1, j \neq i} |a_{ij}|$ для всех $i \in [1, n]$, справедлива оценка

$$\operatorname{per} A \geqslant \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - s_i - t_i),$$

где $s_i = \sum_j a_{ij}$ и суммирование по тем j, для которых $a_{ij} \cdot a_{ji} \leqslant 0$, $t_i = \sum_j (|a_{ij}| - |a_{ji}|)$, и суммирование по тем j, $j \neq i$, для которых $a_{ij} \cdot a_{ji} > 0$ и $|a_{ij}| \geqslant |a_{ji}|$.

Пусть $U_n(k, k)$ — класс квадратных (0,1)-матриц порядка n, имеющих k единиц в каждой строке и каждом столбце. Известна гипотеза М. Холла, заключающаяся в том, что

$$\lim_{n \to \infty} [\inf_{A \in U_n(3,3)} \operatorname{per} A] = \infty.$$

В работе [199] было установлено, что $\operatorname{per} A \geqslant n$ для всех $A \in U_n(3,3)$. В [107] доказана оценка $\operatorname{per} A \geqslant n+3$ для всех $A \in U_n(3,3)$. Оценка работы [109] имеет вид:

$$\operatorname{per} A \geqslant 3(n-1) \text{ для всех } A \in U_n(3,3).$$

Для произвольного случая в [110] получена оценка $\operatorname{per} A \geqslant \frac{(k-2)(k-1)}{2} \cdot n$ для всех $A \in U_n(k, k)$.

Ясно, что для любой квадратной (0,1)-матрицы $\operatorname{per} A \geqslant \det A$. Существовало предположение, что для $A \in U_n(k, k)$ имеет место строгое неравенство, т. е. $\operatorname{per} A > \det A$. Однако в работе [135] был построен пример матрицы $A \in U_n(3,3)$ (для достаточно большого n) такой, что $\operatorname{per} A = \det A$.

В [134] для матриц A, являющихся матрицами инцидентности (v, k, λ)-конфигураций, доказано неравенство

$$\operatorname{per} A - |\det A| \geqslant \lambda(\lambda-1)\frac{(k-2)!}{(k-q)!},$$

где

$$q \geqslant \frac{1}{2}\frac{\lambda}{k}\left[\frac{k}{\lambda}\right](k-\lambda).$$

Известна гипотеза Эрдёша—Реньи, заключающаяся в том, что

$$\lim_{n\to\infty} [\inf_{A \in U_n(k,k)} (\operatorname{per} A)^{1/n}] > 1.$$

В работе [209] доказывается, что

$$g(n) \geqslant 6(4/3)^{n-3}, \quad n \geqslant 3 \text{ и } g \geqslant 4/3,$$

где

$$g(n) = \inf_{A \in U_n(3,3)} \operatorname{per} A, \quad g = \lim_{n\to\infty} (g(n))^{1/n}.$$

Еще для одного частного случая справедливость гипотезы Эрдёша—Реньи установлена в [126].

Приведем теперь верхние оценки для перманента матриц. Еще в работе [158] для квадратной (0, 1)-матрицы A порядка n было показано, что $\operatorname{per} A \leqslant \prod_{i=1}^{n} \frac{r_i+1}{2}$, где r_i — сумма элементов в строке i, и выдвинута гипотеза о том, что справедливо неравенство

$$\operatorname{per} A \leqslant \prod_{i=1}^{n} (r_i)!^{1/r_i}.$$

После получения ряда частных результатов по этой гипотезе приведенное неравенство было доказано в работе [3], затем более простое доказательство приведено в [194].

Приведем другое неравенство, также использующее строчные суммы $r_1, \ldots, r_n$ (0,1)-матрицы A. Обозначим через $(\alpha_1, \ldots$

$\ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ две такие перестановки чисел $r_1, \ldots, r_n$, что $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ и $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n$. Тогда в работе [161] доказывается неравенство

$$\prod_{i=1}^{n} \max(\alpha_i + 1 - i,\ 0) \leqslant \operatorname{per} A \leqslant \prod_{i=1}^{n} \min(\beta_i,\ i),$$

а в [162] выводится, что перманент вполне неразложимой (0,1)-матрицы равен наибольшей среди строчных сумм тогда и только тогда, когда все эти суммы равны двум.

В работе [84] для случая (0,1)-матриц порядка n, имеющих не менее 3 элементов в каждом столбце и каждой строке, установлено неравенство $\operatorname{per} A < 2^{N-2n}$, где N — сумма всех элементов в A. Для случая вполне неразложимых матриц с натуральными элементами доказано неравенство $\operatorname{per} A < 2^{N-2n} + 1$.

Пусть $P = (a_{ij})$ — (0,1)-матрица порядка n такая, что $a_{n1} = a_{12} = a_{23} = \cdots = a_{n-1,n} = 1$, остальные $a_{ij} = 0$, и пусть α, β, γ — действительные числа.

В работе [160] получена явная формула для перманента матрицы $\alpha I_n + \beta P + \gamma P^2$ и показано, что

$$\frac{1}{2^n} < \min_{\alpha+\beta+\gamma=1} \operatorname{per} A < \frac{1}{2^{n-1}}$$

и, в частности, при $n \geqslant 5$

$$\min_{\alpha+\beta+\gamma=1} \operatorname{per} A < \operatorname{per}\left(\frac{1}{3} I_n + \frac{1}{3} P + \frac{1}{3} P^2\right).$$

Явное выражение для перманента для одного случая симметрической матрицы дано в [133].

Наиболее эффективным инструментом для вычисления перманента произвольной матрицы является формула Райзера, требующая для $n \times n$-матрицы числа сложений и умножений порядка $O(n2^n)$. Различные методы, сокращающие число умножений и сложений, предложены в работах [122, 166].

Получены алгоритмы вычисления перманентов циркулянтных матриц в [157] и [66].

В работе [166] приведены формулы для вычисления $\operatorname{per} A$ через степенные суммы столбцов матрицы A. В [99] изучается значение перманента матрицы Шура, т. е. $(n \times n)$-матрицы $M_n = (a_{jk})$, где

$$a_{jk} = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^{jk}, \quad j,\ k = 1, \ldots, n.$$

Если $P_n = \operatorname{per} M_n$, то показано, в частности, что

$$P_{2n} = 0; \quad P_n \equiv n \pmod 2; \quad P_p = p! \pmod{p^3},$$

p — простое число, и другие тождества.

Изучалась структура (0,1)-матриц, перманенты которых принимают значения 1, 2, 3 ([98]). В частности, $\operatorname{per} A = 1$ тогда и только тогда, когда матрица A получена из верхнетреугольной матрицы B перестановкой строк и столбцов. Показано также, что для любого целого k существует квадратная (0,1)-матрица A такая, что $\operatorname{per} A=k$. При этом получены оценки сверху для $n(k)$ — минимального порядка соответствующей матрицы A: $n(k)\leqslant[\log_2(k-1)]+2$ при $k\geqslant 2$. В связи с исследованием дважды стохастических матриц A таких, что $\operatorname{per} A^2=\operatorname{per} A$, в работе [202] исследуется структура таких дважды стохастических матриц, для которых существуют перестановочные матрицы P и Q такие, что $A^2=PAQ'$ или $A^2=PA'Q'$. Другой класс матриц из Ω_n с условием $\operatorname{per}A^2=\operatorname{per}A$ изучен в [201].

В работе [179] найдено асимптотическое значение перманента (0,1)-матрицы A с фиксированными векторами сумм строк и столбцов $(r_1,\ldots,r_n)$, $(s_1,\ldots,s_n)$, соответственно. В частности, если $n-r_i<f(n)$, $n-s_i<f(n)$, $i=1,\ldots,n$, $f(n)=(\log n)^{1-\varepsilon}$, то при $n\to\infty$

$$\operatorname{per} A=n!\, e^{-L/n}(1+O(n^{-1+\delta})),$$

где $L=n^2-\Sigma r_i$ — число нулей в матрице A, ε, δ — произвольные малые положительные числа.

Асимптотическая оценка для числа Z_n (0,1)-матриц порядка n с нулевым значением перманента: $Z_n/f(n)\to 1$ при $n\to\infty$, где $f(n)=n2^{n^2-n+1}$, получена в работе [82]. Изучались так называемые перманентные корни дважды стохастических матриц, т. е. корни уравнения

$$\operatorname{per}(xI-A)=0.$$

В работе [178] была выдвинута гипотеза о том, что если n четно, то многочлен $\operatorname{per}(xI-A)$ не имеет действительных корней, если же n нечетно, то он имеет ровно один действительный корень. В [65] эта гипотеза была опровергнута, где показано, что для любого k существует дважды стохастическая матрица A порядка $3k$ с положительными элементами, для которой многочлен $\operatorname{per}(xI-A)$ имеет не менее k различных действительных корней.

Строится [135] пример дважды стохастической матрицы A такой, что $\operatorname{per}(xI-A)$ имеет $n-2$ различных корней в интервале (0,1). В [97] установлен следующий факт: Пусть n и t — целые, $n\geqslant 7$, $0\leqslant t\leqslant n/2$. Тогда существует неразложимая дважды стохастическая матрица A порядка n, имеющая $n-2t$ вещественных перманентных корней, причем если $t\geqslant 1$, то можно сделать так, что все эти корни различны. Корни ладейных многочленов матриц изучались в работе [175]. Матрицы, составленные из ± 1, рассматривались в [182] и [211]. В [182] изучается вопрос о количестве положительных членов в разложении перманента такой матрицы и о том, каково может быть число k, для которого существует ± 1-матрица с k положительными членами. В [211] устанавливается ряд свойств перманентов ± 1-матриц. В частности, если A — такая матрица, то

$$\operatorname{per} A \equiv 0 \pmod{2^{n/2}}$$

или

$$\operatorname{per} A \equiv 0 \pmod{2^{(n-1)/2}},$$

в зависимости от четности n.

Если $\operatorname{per} A \neq n!$, $n \geqslant 2$, то $\operatorname{per} A \leqslant (n-2)(n-1)!$. Обобщение понятия перманента на многомерный случай рассматривается в работе [6].

В работе [213] изучаются так называемые перманентные пары дважды стохастических матриц. Матрицы A, $B \in \Omega_n$ образуют перманентную пару, если $\operatorname{per}(\alpha A + (1-\alpha)B) = \mathrm{const}$ для всех $\alpha \in [0,1]$. Относительно перманентных пар Маркус поставил вопрос: если матрицы A и B образуют перманентную пару, то следует ли из этого, что $A = B$? Для $n = 2$ это так. В [213] показано, что при $n \geqslant 3$ существует бесконечное множество перманентных пар. С другой стороны, не существует перманентной пары матриц, одна из которых является матрицей перестановки.

В работе [92] изучалась монотонность функции от θ $\operatorname{per}((1-\theta)J_n + \theta A)$, где $A \in \Omega_n$, $\theta \in [0,1]$. Доказывается, что если A — матрица перестановки, либо A — матрица с элементами, равными $\frac{1}{n-1}$, кроме диагональных, то имеет место строгое возрастание по θ.

§ 2. НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

В работах [49, 124, 130, 136] изучаются комбинаторные свойства множества Ω_n дважды стохастических матриц. Известно, что Ω_n представляет собой замкнутый, ограниченный, связный полиэдр размерности $(n-1)^2$ в евклидовом пространстве размерности n^2, экстремальными точками которого являются перестановочные матрицы.

В [124] выясняется для множества симметричных дважды стохастических матриц вопрос о том, существуют ли у него экстремальные точки, отличные от симметрических матриц перестановок. Оказывается, что в этом случае экстремальных точек существенно больше, чем симметрических матриц перестановок.

В работах [136, 59] изучаются экстремальные точки для полиэдра конечных симметрических матриц с заданными суммами по строкам. Для специального класса дважды стохастических матриц, определяемого границами для элементов матрицы, в [130] строятся экстремальные точки.

В [63] изучаются центросимметрические матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n, т. е. матрицы с условием

$$a_{ij} = a_{n+1-i,\, n+1-j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Найдены условия представимости центросимметрических дважды стохастических матриц в виде выпуклой оболочки центросимметрических матриц перестановок.

Кроме того, показано, что центросимметрическая (0, 1)-матрица, содержащая точно $2k$ единиц в каждой строке и каждом столбце, может быть представлена в виде суммы k центросимметрических матриц, имеющих в каждой строке и каждом столбце точно 2 единицы.

Любая дважды стохастическая матрица A с помощью алгоритма Биркгофа представляется в виде выпуклой суммы $\nu(A)$ подставочных матриц. Для величины $\nu(A)$ известна оценка

$$\nu(A) \leqslant \sigma(A) - 2n + d + 1,$$

где $d(A)$ — число положительных членов в A, $\sigma(A)$ — ранг покрытия A.

Чисто комбинаторное доказательство этого неравенства дано в [114].

В работе [215] установлено, что множество $\Omega_n^{(m)}$ всех дважды стохастических матриц порядка n таких, что $A = (a_{ij})$, $0 \leqslant a_{ij} \leqslant \frac{1}{m}$, $i, j = \overline{1, n}$, является выпуклой оболочкой тех матриц из $\Omega_n^{(m)}$, у которых в точности m элементов каждой строки и каждого столбца равны $\frac{1}{m}$, а остальные элементы равны нулю.

Условие непустоты класса (0, 1)-матриц, определяемого векторами сумм по строкам и столбцам, дается известным критерием Райзера—Гейла. В [19] дается обобщение этого критерия на случай, когда элементы матрицы принимают значения 0, 1, 2.

В работах [22—23] изучается класс (0, 1)-матриц, определяемый числом единиц в строках и столбцах и состоящий из эквивалентных матриц относительно перестановок строк и столбцов.

Способ построения квадратных (0, 1)-матриц, имеющих фиксированное число (одно и то же) единиц в каждой строке и каждом столбце с дополнительным условием невырожденности, приведен в [116].

В работах [75, 76, 119] рассматривается класс неотрицательных целочисленных матриц с фиксированной суммой по строкам и столбцам. Изучаются свойства производящей функции для чисел $H_{m,n}(r)$ $(m \times n)$-матриц с суммой по строкам r. Производящая функция для числа таких матриц с условием симметрии дана в [26].

В [11, 38—40, 81] изучается асимптотическое поведение числа матриц с ограничениями:

— суммы по строкам и столбцам ограничены,

— элементы матриц ограничены,

— определенные множества элементов матрицы состоят из нулей.

Так, в работе [11] при $n\to\infty$ дается асимптотическое выражение $M_{m,n}$ для числа $(0, 1)$-матриц размера $n\times m$ при некоторых ограничениях на рост координат векторов сумм строк $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ и векторов сумм столбцов $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$:

$$M_{m,n}=\frac{N!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(k_i!)\cdot\prod\limits_{j=1}^{m}(l_j!)}(l^{-\alpha}+r_n);\quad N=\sum_{i=1}^{n}k_i=\sum_{j=1}^{m}l_j,$$

где

1) $\alpha=(k-1)^2/2$, $r_n=O(n^{-1+\gamma^2/2})$, если для всех i, j $k_i=l_j=k$, $1<k\leqslant\gamma\ln^{1/2}n$ при фиксированном $\gamma\in(0, 1)$;

2) $\alpha=(k-1)(l-1)/2$, $r_n=O(n^{\gamma-1}\ln^5 n)$, если для всех i $k_i=k$, для всех j $l_j=l>1$ и $1<k\leqslant(l-1)^{-1}\gamma\ln n$ при фиксированном $\gamma\in(0, 1)$;

3) $\alpha=\frac{2}{N^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\binom{k_i}{2}\right]\left[\sum\limits_{j=1}^{m}\binom{l_j}{2}\right]$, $r_n=O(n^{\gamma^4/4-1/2}\ln^2 n)$, если $\max\{k_1\ldots, k_n, l_1, \ldots, l_m\}\leqslant\gamma\ln^{1/4}n$ при фиксированном $\gamma\in(0, (2/3)^{1/4})$.

В работе [191] рассматриваются d-мерные $(0, 1)$-матрицы порядка n, у которых сумма элементов по каждой l-мерной гиперплоскости равна заданному числу r.

Получены необходимые условия существования таких матриц.

§ 3. ЛАТИНСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ И КВАДРАТЫ. ПОСТРОЕНИЕ И ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

Латинским прямоугольником размера $k\times n$ называется таблица того же размера из элементов $1, 2, \ldots, n$, не имеющая повторений в строках и столбцах. При $k=n$ имеем латинский квадрат.

Латинский квадрат называется дважды диагональным, если обе его диагонали не содержат повторений.

Латинский квадрат называется частичным (не полным), если некоторые его элементы не заполнены.

Хорошо известна нижняя оценка числа латинских квадратов

$$n!(n-1)!\ldots 2!1!$$

В работе [129] получена нижняя оценка числа дважды диагональных латинских квадратов порядка n:

$$[(2k-1)!(2k-2)!\ldots 1!]^2 \text{ при } n=4k+1,\ 4k+3,$$
$$[(2k)!(2k-1)!\ldots 1!]^2 \text{ при } n=4k+2,\ 4k+4.$$

Простой метод построения таких квадратов приведен в [94]. В [31] приведено полное описание всех таких квадратов порядка, не превосходящего 13.

Таблицы $K(3, n)$ — чисел латинских $3\times n$-прямоугольников при $n\leqslant 40$ приведены в работе [94]. Формула для числа $K(4, n)$ найдена в [4], способ нахождения $K(4, n)$ указан в [138]. Число $K(9, 9)$ приведено в [34].

В работе [33] приведен метод подсчета так называемых полностью симметричных латинских квадратов (с точностью до изоморфизма) и составлены таблицы таких квадратов до порядка 10 включительно.

С момента появления результатов Эрдеша и Капланского [78] и Ямамото [120] не было существенного прогресса в решении сложной задачи определения асимптотики числа латинских прямоугольников $k\times n$ при $n\to\infty$.

В работе [204] результат Ямамото

$$K(k, n)=(n!)^k e^{-\binom{k}{2}}(1+O(1)),\quad k=o(n^{1/3})$$

улучшен следующим образом:

$$K(k, n)=(n!)^k \exp\left\{-\binom{k}{2}-\frac{k^3}{6n}+O\left[\max\left[\left(\frac{k^2}{n}\right)^{1/2},\left(\frac{k^2}{n}\right)^2\right]\right]\right\}.$$

Оценка равномерна для всех $k\leqslant\frac{n}{10}$. В частности, равномерно для всех $k=o(\sqrt{n})$ при $n\to\infty$ справедлива формула:

$$K(k, n)=(n!)^k \exp\left\{-\binom{k}{2}-\frac{k^3}{6n}\right\}(1+O(1));$$

равномерно по $k=o(n)$ при $n\to\infty$ —

$$\log K(k, n)=-\binom{k}{2}(1+O(1)).$$

Приведем результаты, связанные с пополнением частичного латинского квадрата. Известно, что если в частичном латинском квадрате порядка n заполнено n мест, то его не всегда можно дополнить до латинского квадрата.

В 1960 году была выдвинута гипотеза ([80]) о том, что частичный латинский квадрат порядка n с не более чем $n-1$ заполненными местами всегда может быть дополнен до латинского квадрата.

Было доказано [154], что можно построить латинский квадрат размера $n\times n$ с заданными $n-1$ диагональными элементами. Пусть r обозначает число строк, в которых находятся $n-1$ заполненных ячеек частичного латинского квадрата порядка n, а s — соответствующее число столбцов. В [140] установлено, что если $r\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$ или $s\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$, то частичный латинский квадрат можно дополнить до латинского квадрата.

Если мы имеем $(n\times 2n)$-частичный латинский прямоугольник с заполненными $2n-1$ ячейками, то он может быть дополнен до $(n\times 2n)$-латинского прямоугольника. Другое достаточное условие дополнимости частичного латинского квадрата указано в [216]. Если в частичном латинском квадрате размера $n\times n$ найдется линия (т. е. строка или столбец) такая, что вне ее имеется не более $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ заполненных мест, то такой квадрат можно дополнить до латинского квадрата.

Сходное условие приведено в [67]. Если в частичном латинском $(n\times n)$-квадрате найдется такая строка и столбец, что в этой строке и в этом столбце заполнено по крайней мере $\left[\frac{n}{2}\right]$ ячеек, то такой частичный латинский квадрат также можно дополнить до латинского квадрата.

В работе [64] частичному латинскому квадрату $L=(a_{ij})$ ставится в соответствие трехмерная матрица $C=(c_{ijk})$ следующим образом:

$$c_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{если } a_{ij}=k,\\ 0, & \text{если } a_{ij}\neq k,\end{cases}\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant k.$$

Показано, что необходимым условием (но не достаточным) пополнения частичного латинского квадрата является условие

$$\sum c_{ijk}+\sum c_{i'j'k'}\leqslant(|I|\cdot|J|\cdot|K|+|I'|\cdot|J'|\cdot|K'|)/n,$$

суммирование ведется по всем $i\in I$, $j\in J$, $k\in K$ для всех I, J, $K\subseteq\{1, 2, \ldots, n\}$, при этом I', J', K' — дополнения множеств I, J, K.

В работах [104] и [105] было получено дальнейшее продвижение в решении гипотезы Эванса. Установлено, что частичный латинский квадрат порядка n с заполненными $n-1$ ячейками можно дополнить до латинского квадрата в случаях:

1. Заполненные ячейки находятся самое большее в $n-2\sqrt{n}$ строках (столбцах).

2. Число символов в заполненных ячейках не более, чем $n-2\sqrt{n}$.

3. n делится на 4 и $n\geqslant 556$.

4. $n>1111$.

И тем самым гипотеза Эванса подтверждается для больших n.

Множество из n различных элементов, каждые два из которых не расположены на одной линии, называется трансверсалью латинского квадрата размера $n\times n$.

Подмножество из r элементов трансверсали называется частичной трансверсалью порядка r.

Известна гипотеза Райзера (1967 год) о том, что любой латинский квадрат нечетного порядка имеет трансверсаль. Эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута.

В работе [129] показано, что в латинском квадрате порядка n ($n \geqslant 7$) имеется, по крайней мере, одна частичная трансверсаль порядка не меньше, чем $\frac{1}{3}n + \frac{1}{3}$.

В [220] показано, что любой ($n \times n$)-латинский квадрат имеет частичную трансверсаль порядка $n - \sqrt{n}$. Аналогичный результат установлен в [46]: каждый латинский квадрат имеет частичную трансверсаль порядка $n - r$, где $r(r+1) < n$. К проблеме построения латинских квадратов примыкает проблема построения эквидистантных перестановочных таблиц. Перестановочной таблицей называется таблица размера $v \times r$, определенная на r-множестве V, такая, что ее строки есть перестановки множества V.

Расстояние между двумя перестановками определяется $r - \lambda$, если λ — число общих переходов данных подстановок. Перестановочная таблица $A(r, \lambda, v)$, у которой расстояние между любыми двумя строками одинаково, называется эквидистантной перестановочной таблицей, а число λ называется индексом таблицы. Латинский ($n \times n$)-квадрат соответствует случаю $r = \lambda = v = n$.

Пусть $R(r, \lambda)$ — максимальное v, для которого существует таблица $A(r, \lambda, v)$. Вопрос о нахождении величины $R(r, \lambda)$ к настоящему времени еще не решен.

В работах [70, 170] были получены следующие верхние границы для $R(r, \lambda)$:

$$R(r, \lambda) \leqslant \max(\lambda + 2,\ n^2 + n + 1), \text{ где } n = r - \lambda,$$

$$R(r, 1) < r(r - 3) \text{ при } r \geqslant 4,$$

$$R(r, 1) \leqslant r^2 - 4r - 1 \text{ при } r \geqslant 6.$$

Оценка для $R(r, \lambda)$ при достаточно больших λ получена в [207].

В [188] приведены прямые конструкции $A(r, \lambda, v)$ следующих видов:

1. $A(r, 1, 2r - 4)$, если $r > 5$; отсюда следует $R(r, 1) \geqslant 2r - 4$, ($r > 5$).

2. $A\left(\frac{3q(q^{n-1} - 1)}{q - 1} + q,\ \frac{3q(q^{n-2} - 1)}{q - 1} + q,\ q^{n-1}(q - 1)\right)$, где q — степень простого числа, n — положительное целое.

В [208] строятся таблицы для q-степени простого числа $A(q^2 + q + 2, 1, 2q^2 + q)$, что дает оценку

$$R(q^2 + q + 2, 1) \geqslant 2q^2 + q.$$

Показано [111], что $R(r, 1) \geqslant 2r - 5$.

В [77] изучается граф $G(r, \mu)$, вершинами которого являются все $r!$ перестановок степени r, а ребрами соединены только те перестановки, расстояние между которыми равно μ. Тогда максимальной эквидистантной таблице соответствует клика в графе $G(r, \mu)$. Доказано, что граф $G(r, \mu)$ транзитивен и связен при $\mu \neq 3$.

В работе [146] приведен способ построения эквидистантных перестановочных таблиц $A(n^2+n+1,\ 2n+1;\ n^2+n+1)$ на множестве точек проективной плоскости, и значит, $R(n^2+n+1,\ 2n+1)\geqslant n^2+n+1$. Там же строится набор из m подстановок на n^2+n+1 элементах с расстоянием между ними не меньше, чем $2n+1$, где

$$m=1+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n^2+n+1}{n^2+n+1-i}\cdot D_{i+1}+(n^2+n+1)\cdot D_{n+1}.$$

Здесь D_i — число беспорядков на i элементах.

§ 4. МАТРОИДЫ

Матроиды (в другой терминологии — пространства независимости, предгеометрии) были введены еще в 1935 г. Уитни (Whitney H.) как абстракция понятия линейной независимости в векторных пространствах над полем. Тогда же (в 30—40-е гг.) были изучены многие их свойства. Однако особое развитие теория матроидов получила со второй половины 60-х гг., когда началась работа по перестройке фундамента комбинаторной математики. Если для перечислительных задач роль ведущего комплекса идей при такой перестройке отводилась теории перечисления Редфилда — Пойа — де Брейна, то для экстремальных задач ту же роль должны были сыграть матроиды. Этим обусловлено появление в 60—70-е гг. большого числа публикаций, посвященных матроидам и их связям с рзаличными, в первую очередь, экстремальными комбинаторными проблемами.

Матроидом M называется конечное множество S и совокупность $\mathcal{I}$ подмножеств S (называемых независимыми множествами), удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\varnothing\in\mathcal{I}$,

2) если $X\in\mathcal{I}$ и $Y\subseteq X$, то $Y\in\mathcal{I}$,

3) если $U,\ V\in\mathcal{C}$ и $|U|=|V|+1$, то существует такой $x\in U\setminus V$, что $V\cup x\in\mathcal{I}$

(здесь $\varnothing$ — пустое множество). Подмножество $Y\subseteq S$, не принадлежащее $\mathcal{I}$, называется зависимым. Базой (или базисом) матроида называется максимальное независимое подмножество. С матроидом на S связывается функция ранга ρ, определенная на множестве 2^S подмножеств S:

$$\rho A=\max(|X|:X\subseteq A,\ X\in\mathcal{I},\ A\subseteq S).$$

Рангом ρM матроида M называется ранг множества S (все базы матроида имеют один и тот же ранг).

Эти понятия обобщают соответствующие понятия из теории векторных пространств; аналогией с графами подсказано следующее определение. Циклом матроида M называется минимальное зависимое множество. Семейство $\mathcal{C}$ всех циклов также определяет матроид, а именно: семейство $\mathscr{C}$ подмножеств S есть множество циклов некоторого матроида на S тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) если $X, Y \in \mathscr{C}$, $X \neq Y$, то $X \not\subseteq Y$,

2) если $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$, $C_1 \neq C_2$ и $z \in C_1 \cap C_2$, то существует такое $C_3 \in \mathscr{C}$, что $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus z$.

Примером матроида служит граф G, где S есть множество ребер графа, а циклы понимаются в обычном смысле; независимы множества ребер, не содержащие цикла. Такой матроид называется графическим, или матроидом циклов графа. Пример матроида, играющий существенную роль в общей теории, дает проективная плоскость над полем $GF(2)$ из двух элементов, называемая матроидом Фано. Через U_n^k обозначается матроид на множестве из n элементов, в котором независимы все подмножества мощности, не большей $k (k < n)$. Такой матроид называется равномерным, а в частном случае $k = n$ (любое подмножество независимо) — свободным матроидом.

Имеются также другие эквивалентные аксиомы, определяющие матроид: с помощью функции ранга, с помощью операции замыкания на подмножествах, с помощью баз и др. Существенную роль играет операция замыкания, относительно которой при заданном M на S выделяется семейство замкнутых множеств, которое определяет все основные свойства матроида M. Операция замыкания устанавливает тесную связь матроидов с алгебраической теорией структур (иначе, решеток): каждому матроиду M однозначно соответствует структура $\mathscr{L}(M)$, которую образуют его замкнутые множества; эта структура обладает свойствами полумодулярности и атомности, хорошо известными в теории структур. Полумодулярная и атомная структура называется геометрической. Известно, что и, обратно, каждой геометрической структуре соответствует матроид на множестве ее атомов. Однако это соответствие между матроидами и геометрическими структурами неоднозначно. Выделяется подкласс матроидов, называемых простыми матроидами или комбинаторными геометриями (иногда просто геометриями), которые полностью определяются своей структурой замкнутых множеств. В произвольном матроиде зависимые одноэлементные множества называются петлями, зависимые множества вида $\{x, y\}$, $x, y \in S$, где $\{x\}$ и $\{y\}$ независимы,— перешейками. Простой матроид не содержит петель и перешейков. Замкнутые множества ранга k матроида M ранга r называют иногда k-плоскостями, а плоскости ранга $r-1$ — гиперплоскостями.

Если на S задан матроид M, то с ним связывается еще ряд матроидов на S.

Пусть $\{B_i | i \in I\}$ — множество баз матроида M, тогда $\{S \setminus B_i | i \in I\}$ есть множество баз матроида M^* на S, называемого двойственным матроидом. Цикл двойственного матроида M^*

называется коциклом в M. Аналогичный смысл имеют термины: кобаза, копетля и т. п.

Пусть M — матроид на S и $T \subseteq S$; определим тогда семейство подмножеств $\mathcal{I}(M|T) = \{X : X \subseteq T, X \in \mathcal{I}(M)\}$. $\mathcal{I}(M|T)$ есть множество независимых множеств матроида $M|T$ на T, называемого сужением (restriction) на подмножество T. Обозначим, далее, через $\mathcal{I}(M.T)$ все те подмножества $X \subseteq T$, для которых существует такое максимальное независимое множество $Y \subseteq S \setminus T$, что $X \cup Y \in \mathcal{I}(M)$. Тогда $\mathcal{I}(M.T)$ есть множество независимых множеств матроида $M.T$ на T, называемого сжатием (contraction) M на подмножество T. Если M — матроид на S и $T \subseteq S$, то минором M называется матроид N на T, получаемый из M путем любой последовательности операций сужения и сжатия.

Изоморфизмом матроидов M_1 на S_1 и M_2 на S_2 называется взаимно однозначное соответствие $\varphi : S_1 \to S_2$, сохраняющее независимость множеств. Если при этом $S_1 = S_2$ и $M_1 = M_2$, то φ называется автоморфизмом. Изучение матроидов обычно производится «с точностью до изоморфизма».

Итог бурному развитию теории матроидов до 1975 г. подвела известная монография Уэлша [217]. Следует отметить также фундаментальную монографию Эйгнера [30], во второй части которой излагаются основы теории матроидов с использованием теоретико-множественного подхода. Теоретико-структурный подход наиболее ярко представлен у Крапо и Рота [62].

Базисы, циклы, ранг, стандартные конструкции. Разнообразие способов задания структуры матроида на множестве продолжает стимулировать появление работ, в которых изучаются связи между различными классами семейств подмножеств, а также различными функциями на подмножествах, определяющими матроид. Здесь можно выделить несколько направлений работы:

а) Рассмотрение способов определения целочисленной неубывающей функции на подмножествах конечного множества S, которая может служить ранговой функцией; известно, что основным свойством функции ранга f является свойство полумодулярности:

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) \leqslant f(A) + f(B) \quad \text{для любых } A,\ B \subseteq S.$$

Темой ряда работ служат свойства ранговых функций и соотношения между ними для различных матроидов, заданных на одном и том же S.

б) Характеризации матроида с помощью новых семейств подмножеств (в частности, семейства циклов с удалённой точкой).

в) Изучение матроидов M со специальными видами баз и циклов (например, с базами, дополняемыми до циклов), а также проблема существования «максимальных» циклов (т. е. состоящих из $r+1$ элементов, если ранг M равен r).

г) Различные свойства замены для базисов, обобщающие обычное свойство замены элементов в определении матроида (см. 3)) на подмножества.

В [117] и [167] предлагаются алгоритмы для построения множества всех циклов матроида M при задании множества всех баз и множества всех баз при заданном множестве циклов, а также порождения всех циклов двойственного матроида M^* по списку циклов M. Интересное свойство пересечения баз установлено в [68]: если на S заданы два матроида M_1 и M_2 и для натурального числа k известно, что существуют базы X_1. $Y_1 \in M_1$ и X_2, $Y_2 \in M_2$ со свойствами $|X_1 \cap X_2| \leqslant k$ и $|Y_1 \cap Y_2| \geqslant k$, то существуют базы B_1, B_2 со свойством $|B_1 \cap B_2| = k$.

В [131] с помощью конечного аналога преобразования Радона для геометрии ранга, не меньшего 2, устанавливается, что число её точек не превосходит числа гиперплоскостей (известно, что гиперплоскости — дополнения коциклов геометрии).

В [55] для матроидов, заданных на упорядоченных множествах, вводится некоторое новое семейство подмножеств, названных разомкнутыми циклами, и устанавливается их тесная связь с хроматическим полиномом (см. ниже) матроида. Из работ по стандартным конструкциям на матроидах следует отметить [219], в которой устанавливается следующий результат: Пусть задано t попарно непересекающихся множеств $X_1, \ldots, X_t$ со структурой матроида M_i, M_i' и функциями ранга ρ_i, ρ_i', $i=1, \ldots, t$. Тогда существует матроид M на $S = X_1 \cup \cdots \cup X_t$ такой, что $M_i = M|X_i$ и $M_i' = M.X_i$ в том и только том случае, когда

а) все циклы M_i — объединения циклов из M_i',

б) если $v_i = \rho X_i - \rho' X_i$ и $v = \max(v_1, \ldots, v_t)$, то $\sum_{i=1}^{t} v_i \geqslant 2v$.

Если при этом все M_i бинарны (см. ниже), то M также бинарен, если и только если все циклы M_i — непересекающиеся объединения циклов из M_i' для всех i, $i=1, \ldots, t$.

Представление матроидов. Бинарные матроиды. Графические матроиды. Одной из самых старых до сих пор нерешенных задач теории матроидов является проблема представления данного матроида векторами с координатами из поля (иначе называемая проблемой координатизации). Назовем матроид M на множестве S представимым над полем (телом) F, если существует векторное пространство V над F и отображение $\varphi: S \to V$, сохраняющее функцию ранга. Очевидно, что представимый над F матроид описывается матрицей размера $r \times n$, столбцами которой служат образы элементов S при отображении φ (если $|S| = n$ и ранг M равен r). Проблема представления состоит в том, чтобы определить, представим ли данный матроид M над заданным полем (телом) F.

Из общих результатов по проблеме представления следует отметить результаты работы [206], где доказано, что класс матроидов, представимых над некоторым заданным полем, не может быть охарактеризован никаким набором запрещенных миноров, и аналогичные утверждения доказаны для классов матроидов, представимых над некоторым полем характеристики 0, а также для матроидов, представимых над некоторым телом. В случае поля ненулевой характеристики положение иное, так как известна характеризация Татта в терминах запрещенных миноров бинарных матроидов, т. е. матроидов, представимых над полем $GF(2)$. Далее в работе [196] (и независимо в [41]) дается следующая характеристика матроидов M, представимых над полем из трех элементов $GF(3)$: M представим над $GF(3)$, если и только если он не имеет в качестве миноров матроида $U^2{}_5$ и матроида Фано, а также двойственных им. (Этот результат был известен уже давно, однако доказательства ранее не публиковались). В теории представления особый интерес представляют матроиды, представимые над любым полем (к ним, как известно, относятся графические матроиды). В [32] доказывается, что для заданной группы G и целого числа $k \geqslant 3$ существует матроид ранга k с группой автоморфизмов G, представимый над любым полем с достаточно большим числом элементов (он имеет также дополнительное свойство: любое множество с $k—1$ элементами независимо). Известен достаточный признак представимости Татта: если простой матроид G представим над $GF(2)$ и некоторым другим полем характеристики, отличной от 2, то G представим над всеми полями одновременно с помощью вполне унимодулярной матрицы (т. е. матрицы, все миноры которой равны 0, ± 1). В [54] дается краткое и конструктивное доказательство этой важной теоремы. Отметим еще один результат о представлениях другого типа. Матроид M на S называется алгебраическим, если существует такое инъективное отображение S в поле Ω, при котором имеется взаимно однозначное соответствие между независимыми подмножествами M и алгебраически независимыми множествами элементов Ω над некоторым подполем $K \subseteq \Omega$. Долгое время не существовало примера неалгебраического матроида. Такой пример был, наконец, найден в [118].

Наряду с общей проблемой представления большой интерес представляет проблема изоморфизма заданного матроида графическому матроиду («графического» представления). В качестве подхода к этой задаче проводится интенсивное изучение бинарных матроидов (т. е. представимых над $GF(2)$). Известно, что графические матроиды представимы над любым полем, поэтому они составляют подкласс класса бинарных матроидов. Другим подклассом бинарных матроидов является класс матроидов, представимых вполне унимодулярной матрицей; такие матроиды называются регулярными. Этот подкласс также включает графические матроиды; он состоит из матроидов, представимых над любым полем. В статье [218] устанавливается эквивалентность для бинарного матроида M на S следующих утверждений:

а) каждый коцикл M имеет четную мощность;

б) S может быть представлено как объединение непересекающихся коциклов.

В [56] доказывается однозначная представимость бинарных матроидов; при этом предгеометрия G ранга r на множестве из n элементов называется однозначно представимой над полем F, если G представима матрицей размера $r \times n$ над F и все такие представления проективно эквивалентны. В [197] показано, что бинарность матроида равносильна тому, что для каждого цикла C и коцикла D мощность их пересечения не равна 3. Известно, что для бинарного матроида можно определить свойство ориентируемости, используя (0,1)-матрицы инцидентности, связывающие элементы и циклы, а также элементы и коциклы матроида. Бинарный матроид ориентируем тогда и только тогда, когда он регулярен. В нескольких статьях (см., например, [45]) изучалось вводимое аксиоматически понятие ориентируемости матроида, более непосредственно обобщающее понятие ориентированного графа, но также равносильное регулярности бинарного матроида. Регулярным матроидам посвящена также работа [43], где дается следующее усиление известной характеристики Татта регулярного матроида: бинарный матроид регулярен тогда и только тогда, когда никакой его подматроид не есть расширение матроида Фано или двойственного ему.

Ряд работ последнего времени посвящен собственно графическим представлениям и свойствам графических матроидов. В частности, изучаются матроидальные семейства, т. е. такие семейства P связных графов, что для любого графа G подграфы, изоморфные графам этого семейства, составляют множество циклов некоторого матроида $P(G)$ на множестве ребер G. В [189] доказывается существование несчетного множества матроидальных семейств и дается единый метод построения, которым получаются все известные в настоящее время матроидальные семейства. Интересная конструкция на множестве ребер графа G — бициклические матроиды — рассмотрена в [155] (бицикл — связный подграф, содержащий в точности два независимых цикла): дается геометрическая характеристика этих матроидов, а также условия, когда бициклический матроид бинарен или регулярен.

Трансверсальные и родственные им матроиды. С тех пор, как в 1965 г. Эдмондсом и Фалкерсоном была доказана теорема о том, что частичные трансверсали (множества различных представителей) конечного семейства $\mathscr{A}$ подмножеств заданного множества S образуют систему независимых множеств матроида $M(\mathscr{A})$ на множестве S, теория трансверсалей стала развиваться в тесной связи с теорией матроидов, которая позволила более углубленно трактовать вопросы о системах представителей семейств подмножеств. С другой стороны, теория различных представителей вызвала к жизни новую ветвь теории матроидов, изучающую трансверсальные матроиды, т. е. матроиды M на множестве S, для которых существует такое семейство подмножеств $\mathscr{A}$, что $M = M(\mathscr{A})$ — множество частичных трансверсалей семейства $\mathscr{A}$. Ясно, что такое $\mathscr{A}$ по M определяется не единственным способом; $\mathscr{A}$ называется (трансверсальным) представлением матроида M. Изучаются различные представления заданного матроида и связи между ними. Важной проблемой является установление критерия трансверсальности матроида. Хотя эта проблема не решена, Бонди и Уэлшем в начале 70-х гг. было показано, что каждый матроид на множестве S получается как пересечение (в естественном смысле) нескольких трансверсальных матроидов на S, имеющих некоторое специальное представление. Другое доказательство этой теоремы, не использующее критерия Ф. Холла существования системы различных представителей, дано в [44].

Остановимся на некоторых результатах о трансверсалях, полученных матроидными рассмотрениями и формулируемыми в контексте теории матроидов. Типичным таким результатом является следующая теорема [156]: Пусть $\mathscr{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ — система подмножеств множества S, $\mathscr{E}$ — система независимых множеств некоторого матроида на S с функцией ранга ρ; тогда для числа $N(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ независимых (т. е. принадлежащих $\mathscr{E}$) трансверсалей системы справедливо неравенство

$$N(\mathscr{A}, \mathscr{E}) \geqslant \prod_{i=0}^{n} \max\{1, \rho A_i - i\}$$

при условии, что $N(\mathscr{A}, \mathscr{E}) > 0$ и $\rho A_i \leqslant \rho A_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-1$, и равенство достигается, если каждое A_i содержится в замыкании A_{i+1}. Отсюда следуют более ранние оценки $N(\mathscr{A}, \mathscr{E})$, данные Острандом (Ostrand) и Уллтангом (Ulltang). В [195] дается матроидная интерпретация известной теоремы о трансверсалях — теоремы Форда и Фалкерсона о минимальном разрезе и максимальном потоке в сети.

Наряду с трансверсальными матроидами, рассматриваются различные их обобщения, среди которых, в первую очередь, следует отметить гаммоиды. Они определяются следующим образом. Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный граф с множеством вершин V и множеством дуг E. Для заданного множества $B \subseteq V$ рассмотрим все множества $A \subseteq V$ со свойством: существует семейство $\{p(a), a \in A\}$ попарно непересекающихся путей из каждой вершины A в некоторую соответствующую ей вершину B. Совокупность всех таких множеств A обозначим через $L(G, B)$; она представляет собой совокупность независимых множеств некоторого матроида на V, называемого строгим гаммоидом. Гаммоид получается сужением $L(G, B)$ на некоторое подмножество множества V. Известно, что M — строгий гаммоид, если и только если M^* — трансверсальный матроид, а матроид, двойственный гаммоиду, — снова гаммоид. Частным случаем гаммоида, когда исходят от паросочетаний в двудольном графе, служит дельтоид. Гаммоидам и их дальнейшему обобщению — системам сочленения (linking systems) посвящен ряд работ (см. в том числе [192—193]).

В статье Брилавского [53] была предложена интересная геометрическая интерпретация трансверсальных матроидов как множеств точек симплекса в аффинном пространстве над полем действительных чисел с отношением независимости, совпадающим с аффинной независимостью точек. Им доказано, что любой трансверсальный матроид изоморфен такой предгеометрии, называемой свободной симплициальной геометрией. Это дало толчок к изучению трансверсальных матроидов с геометрической точки зрения (как свободных симплициальных геометрий) и выделению подклассов трансверсальных матроидов, допускающих достаточно полное исследование. Таков, например, класс свободных симплициальных геометрий со стягивающим симплексом, изучаемый в [48]. Из работ, примыкающих к этому направлению, отметим также [60—61].

Полиномы на матроидах. Критическая проблема. Отображения и расширения матроидов. При изучении матроидов особую роль играют функции, определенные на совокупности всех матроидов M, построенных на заданном множестве S и принимающие одинаковые значения на изоморфных матроидах. Такие функции называются матроидными инвариантами. Наиболее важными среди них являются инварианты Татта—Гротендика — так называются инварианты f со следующими дополнительными свойствами:

а) $f(M)=f(M|(S\setminus e))+f(M.(S\setminus e))$, если $e\in S$ не есть ни петля, ни копетля;

б) $f(M)=f(M_1)f(M|S\setminus T)$, если M_1 — матроид на $T\subseteq S$ — связная компонента M (о связности см. ниже).

Все инварианты Татта—Гротендика получаются из полинома Татта для матроида M:

$$T(M;\,x,\,y)=\sum_{A\subseteq S}(x-1)^{\rho S-\rho A}(y-1)^{|A|-\rho A},$$

где ρ — функция ранга для M. Через полином Татта выражается хроматический полином $P(M;\lambda)$ матроида M:

$$P(M;\,\lambda)=(-1)^{\rho S}\,T(M;\,1-\lambda,\,0);$$

минимальное натуральное число n, для которого $P(M;n)>0$, называется хроматическим числом $\chi(M)$ матроида M (эти определения обобщают соответствующие определения теории графов). Величины w_k коэффициентов при $\lambda^{\rho S-k}$ в $P(M;\lambda)$ называются числами Уитни первого рода. Пусть матроид M ранга r представим над полем $GF(q)$ из q элементов. k-выборка линейных функционалов $(f_1, \ldots, f_k)$ на векторном пространстве $V(r, q)$ размерности r над $GF(q)$ называется различающей множество $A \subseteq V(r, q)$, если для каждого $e \in A$ найдется индекс i такой, что $f_i(e) \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Критическим числом (или критической экспонентой) $c(M; q)$ матроида M на множестве S, представимого над $GF(q)$ с помощью отображения φ, называется минимальное k, для которого существует k-выборка линейных функционалов, различающая $\varphi(S)$ (это число не зависит от φ); если такого числа не существует, то $c(M; q) = \infty$. Нахождение числа $c(M; q)$ называется критической проблемой, которую Крапо и Рота полагают «центральной проблемой экстремальной комбинаторной теории»; к ней действительно сводится целый ряд нерешенных комбинаторных задач. Число $c(M; q)$ определяется, если известны значения $P(M; q^k)$ для всех k, поэтому критическая проблема тесно связана с изучением инвариантов Татта—Гротендика, в частности, хроматического числа матроида, а также коэффициентов хроматического полинома. В работе [52] даются оценки снизу модулей чисел Уитни связных комбинаторных геометрий, улучшающие известные оценки Даулинга и Уилсона (матроид связен, если для любой пары различных его элементов найдется цикл, которому они принадлежат; связная компонента — наибольшее подмножество, в котором любые два элемента входят в некоторый цикл). Ряд матроидных инвариантов и их комбинаторные интерпретации изучены в [51] и [56]. В [180] показано, что $\chi(M)-1$ не превосходит максимальной мощности коцикла матроида. Там же даны оценки сверху для хроматического числа регулярного матроида. Интересный результат по критической проблеме получен в [142]: если существует покрытие матроида M в пространстве $V(r, q)$ коциклами, мощность каждого из которых меньше q^k, то критическая экспонента M не превосходит k.

Полиномы Татта осуществляют связь теории матроидов с линейными кодами и упаковками, благодаря чему ряд проблем теории кодирования сводится к критической проблеме. Пусть $\mathfrak{M}_q$ — класс всех матриц размера $k \times n$ над $GF(q)$. С каждой $M \in \mathfrak{M}_q$ ранга k связывается, во-первых, линейный (n, k)-код $U(M)$, с другой стороны — простой матроид $G(C_M)$ на столбцах M. Весом $w(u)$ вектора u называется число его ненулевых компонент. Полином

$$A_U(z) = \sum_{u \in U} z^{w(u)} = \sum_{i=1}^{n} A_i z^i,$$

где A_i — число векторов $u \in U$ с $w(u) = i$, называется весовым энумератором линейного кода U. В [100] доказывается, что функция f, определенная на $\mathfrak{M}_q$ посредством

$$f(M) = \frac{1}{(1-z)^k z^{n-k}} A_{U(M)}(z),$$

является инвариантом Татта—Гротендика на $\mathfrak{M}_q$ и выражается через полином Татта для $G(C_M)$. Таким образом, через полином Татта выражается весовой энумератор линейного кода U.

Сложность критической проблемы заставила искать обходные пути ее решения. Среди них — изучение отображений матроидов и связанных с ними геометрических структур, а также расширений комбинаторных геометрий, согласующихся со структурой замкнутых подмножеств исходных геометрий. Следует отметить, однако, что восстановление свойств расширенной геометрии по свойствам исходной возможно далеко не всегда, даже при наличии тесной связи между ними. Так, результат работы [50] показывает, что для геометрий G и H на множестве S из $G\setminus p \simeq H\setminus p$ для всех p не всегда следует, что $G \simeq H$ (G изоморфна H). Тем не менее свойства расширений и связанных с ними отображений комбинаторных геометрий интенсивно изучаются. Рассматриваются два основных типа отображений $G \to H$ для геометрий, заданных на множествах S и T, соответственно: сильные (слабые) отображения, т. е. функции $f: S \cup \varnothing \to T \cup \varnothing$ такие, что $f(\varnothing) = \varnothing$ и прообраз любого замкнутого (независимого) множества из H замкнут (независим) в G. Каждое сильное отображение является слабым, но не наоборот. Конструкции, связанные с сильными отображениями (в том числе стандартные разложения сильных отображений), рассматриваются в [125, 143]. В [173, 174] изучаются сильные отображения и расширения геометрий на S, индуцируемые полумодулярными функциями на множестве подмножеств S. Свойства слабых отображений и связанных с ними конструкций на геометриях подробно исследуются в [147, 172, 15]. Рассмотрим следующее построение на комбинаторных геометриях. Пусть на S заданы две геометрии G и H рангов r и $r+1$, соответственно, причем структура замкнутых множеств G получается из структуры для H исключением всех ее гиперплоскостей. Тогда H называется наращением G. Эту конструкцию изучал Крапо в конце 60-х гг. Он доказал, в частности, что различные наращения G образуют полную структуру. В [14] дается конструкция наибольшего элемента в этой структуре, называемого свободным наращением. О наращениях см. также [42, 171].

§ 5. ТРАНСВЕРСАЛИ

Пусть задано (конечное) множество S и на нем (конечное) семейство подмножеств $\mathscr{A} = (A_i \mid i \in I)$. Пусть, далее, для некоторого подмножества $I_0 \subseteq I$ задана инъективная функция $f: I_0 \to S$ такая, что $f(i) \in A_i$ для всех $i \in I_0$ (функция выбора). Множество

$\{f(i) \mid i \in I_0\}$ называется тогда частичной трансверсалью семейства $\mathscr{A}$ (или частичной системой представителей). Если такая функция определена на всем I, то частичная трансверсаль называется трансверсалью семейства $\mathscr{A}$ (или системой различных представителей). Изучение трансверсалей и частичных трансверсалей — одна из классических задач комбинаторной математики, имеющая разнообразные математические и технические приложения.

Критерий существования трансверсали у заданного семейства был дан Ф. Холлом в 1935 г. для конечного S: а именно, для любого $I_0 \subseteq I$ должно быть $|I_0| \leqslant |\bigcup_{i \in I_0} A_i|$. Позднее он был обобщен М. Холлом на семейства конечных подмножеств бесконечного множества S. Актуальной нерешенной задачей остается нахождение подобного критерия для существования системы различных представителей, общей для нескольких семейств подмножеств, заданных на S; такая система называется общей системой представителей, или общей трансверсалью для этих семейств. Представляют интерес также различные свойства общих трансверсалей и способы их нахождения. В [185] изучаются общие трансверсали для двух заданных семейств подмножеств $\mathcal{A}=(A_1, \ldots, A_n)$ и $\mathscr{B}=(B_1, \ldots, B_n)$ на множестве S. Число $c(\mathcal{A}, \mathscr{B})=|\bigcup_{A \in \mathscr{A}_1} A \cap \bigcup_{B \in \mathscr{B}_1} B|-|\mathcal{A}_1|-|\mathscr{B}_1|+n$ называется критическим числом подсемейств $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ и $\mathscr{B}_1 \subseteq \mathscr{B}$. Обозначим через $h(\mathcal{A}, \mathscr{B})$ минимум критических чисел по всем непустым подсемействам $\mathcal{A}_1$ и $\mathscr{B}_1$; условие $h(\mathcal{A}, \mathscr{B})>0$ равносильно существованию общей трансверсали у $\mathcal{A}$ и $\mathscr{B}$. Доказывается, что если $h(\mathcal{A}, \mathscr{B}) \geqslant k>0$ и $x_1, \ldots, x_k$ — произвольные элементы из $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$, то найдется общая трансверсаль у $\mathcal{A}$ и $\mathscr{B}$, не содержащая этих элементов. В [47] рассматривались совокупности t семейств $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_t$, где каждое семейство $\mathcal{A}_i$ состоит из s конечных (не обязательно различных и непустых) множеств $A_j(1), \ldots, A_j(s)$, удовлетворяющих дополнительно свойству «разделения». Пусть $\Omega=\bigcup\{A_j(i)\}$, $A_j(0)=\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{s} A_j(i)$, $1 \leqslant j \leqslant t$; скажем, что $\mathcal{A}$ разделяет точки Ω, если $|\bigcap\{A_j(a_j) \mid 1 \leqslant j \leqslant t\}| \leqslant 1$ для любой t-выборки $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$, где $0 \leqslant a_j \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant t$. Для разделяющих совокупностей семейств $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_t)$ устанавливается, что

а) если каждое $\mathscr{A}_i$ покрывает Ω и $|\Omega|>s^t-s^{t-1}$, то общая трансверсаль для $\mathscr{A}$ существует, и эта граница — наилучшая из возможных;

б) если $|\Omega| \geqslant (s+1)^t-(s+1)^{t-1}-1$, то общая трансверсаль существует, и эта граница — наилучшая.

В [69] исследовались дизъюнктные общие трансверсали для заданных двух семейств, состоящих из непересекающихся подмножеств; были обобщены многие из ранее известных результатов.

Другим направлением было изучение трансверсалей с некоторыми дополнительными свойствами. Так, в [2] даны условия существования r совместных трансверсалей для заданного семейства из n подмножеств конечного множества. При этом трансверсали $T_1, \ldots, T_r$, где $T_i=(t_1^{(i)}, \ldots, t_n^{(i)})$ называются совместными, если $t_k^{(i)} \neq t_k^{(j)}$ при $i \neq j$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant r$, $1 \leqslant k \leqslant n$. В [190] для системы множеств $\mathcal{A}=(A_i \mid i \in I)$ изучался вопрос о существовании такого множества B, что $B \cap A_i$, $A_i \setminus B \neq \varnothing$ для всех $i \in I$ и был дан достаточный признак существования в виде условия типа критерия Ф. Холла. Доказано также, что если система непустых множеств содержит две непересекающиеся максимальные частичные трансверсали, то она имеет две непересекающиеся трансверсали. Максимальные частичные трансверсали изучаются также в [183]. Подсемейство $\mathcal{B}$ семейства $\mathcal{A}=(A_i \mid i \in I)$ называется максимальным представимым подсемейством, если множество функций выбора непусто для $\mathcal{B}$, но пусто для любого подсемейства, содержащего $\mathcal{B}$. Максимальные представимые семейства характеризуются с помощью критических семейств (т. е. с равенством в критерии Ф. Холла).

Теория трансверсалей развивалась в последние годы, как уже было отмечено, во взаимодействии с теорией матроидов. Некоторые результаты о трансверсалях в связи с теорией матроидов см. в § 4 ([156, 195]).

§ 6. ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О (0,1)-МАТРИЦАХ

Задачи о покрытии принадлежат к центральным задачам комбинаторной математики. Они формулируются в различных терминах. Приведем одну из общих формулировок. Пусть на конечном множестве S задана система множеств $\mathcal{A}=(A_i \mid i \in I)$ со свойством $\bigcup\limits_{i \in I} A_i=S$. Какова наименьшая по мощности покрывающая подсистема, т. е. система $\mathcal{A}'=(A_i \mid i \in I')$ со свойством $\bigcup\limits_{i \in I'} A_i=S$? Какова минимальная мощность $|I'|$ подмножества $I' \subseteq I$, для которого существует покрывающая подсистема $\mathcal{A}'=(A_i \mid i \in I')$? Задача о покрытии допускает естественную интерпретацию в терминах (0,1)-матриц. Если ввести отношение инцидентности между элементами S и подмножествами из $\mathcal{A}$ — вхождение элемента в подмножество и рассмотреть соответствующую матрицу инцидентности A, где строкам соответствуют подмножества, а столбцам — элементы, то минимальное покрытие определяется выбором наименьшего возможного числа ε строк в A таких, что сумма элементов в каждом столбце соответствующей подматрицы положительна. Такое число ε называется глубиной матрицы, которая, тем самым, совпадает с мощностью минимального покрытия. Если же строки в A выбраны так, что сумма элементов в каждом столбце соответствующей подматрицы не меньше заданного числа $\alpha>0$, то мы приходим к понятию α-глубины.

Вопрос о нахождении минимального покрытия является весьма сложным. Об алгоритмических его аспектах см. обзор [16]. Алгоритмам покрытия посвящены также работы [5, 25]. В связи с тем, что создание эффективного алгоритма для решения общей задачи покрытия проблематично (см. [16]), представляет интерес рассмотрение различных частных случаев. Интересной задачей такого рода является задача о покрытии всех l-подмножеств k-подмножествами в n-элементном множестве S, $0\leqslant l\leqslant \leqslant k\leqslant n$. Пусть $M(n, k, l, \alpha)$ — мощность минимального множества $\mathscr{B}$ k-подмножеств такого, что каждое l-подмножество встречается в множествах из $\mathscr{B}$ не менее α раз. В [8] изучено при $l=k-1$ асимптотическое поведение $M(n, k, l, \alpha)$. Показано, что если функция $k=k(n)$ такова, что $k(n)/\sqrt{n}\to\infty$ при $n\to\infty$, то $M(n, k, k-1, \alpha)\sim\alpha(k^n-1)k^{-1}$. Отсюда следует справедливость гипотезы Эрдёша об асимптотическом поведении $M(n, k, k-1, \alpha)$. Был получен в последнее время ряд результатов в общей задаче о мощности минимального покрытия (а также α-покрытия), которые удобно формулировать в терминах глубины (0,1)-матриц (или ширины, которая определяется для столбцов так же, как глубина для строк). При тех или иных предположениях были найдены оценки сверху глубины матриц из достаточно широких классов (см. [21]). Уделялось внимание также асимптотическим оценкам α-глубины, которые позволяют лучше представить себе поведение функции глубины при изменяющихся параметрах класса матриц. Отметим в этой связи работы [10] и [9]. В первой из них, кроме того, прослеживались связи задачи о глубине матрицы с оценками параметров графов. Во второй — рассматривался класс $A(n, m, k)$ матриц размера $n\times m$ с k единицами в каждом столбце и изучалось асимптотическое поведение глубины (а также α-глубины) матриц из этого класса при различных предположениях о k, m, n. Интересен результат автора, показавшего, что при некоторых естественных условиях почти все матрицы из $A(m, n, k)$ имеют глубину, асимптотически совпадающую с максимальной. Эта работа по своему направлению примыкает к [132], где впервые был сформулирован новый подход к задаче о глубине, а именно, изучение распределения глубины на множестве всех матриц некоторого класса, и получены первые результаты такого типа. Из примечательных частных результатов о ширине отметим факт из [93], где сообщалось, что была исследована на ЭВМ ширина матрицы инцидентности для системы троек Штейнера на 27 элементах, которая, вопреки сделанному ранее предположению, оказалась равной 18. Авторы вносят предложение (и обосновывают его) — рассматривать задачи о нахождении ширины матрицы как тестовые для оценки вычислительной эффективности в целочисленном программировании и алгоритмах решения задачи о покрытии. О. Б. Лупановым была поставлена задача о протыкании граней единичного n-мерного куба, одна из модификаций задачи о покрытии. В [7] доказано, что эта задача не проще, чем известная в теории кодирования задача о построении кодов экспоненциальной мощности с линейным кодовым расстоянием.

Остановимся в заключение на некоторых результатах экстремального характера о $(0,1)$-матрицах, непосредственно не связанных с задачей о глубине. $(0,1)$-матрица порядка n называется α-избыточной, если не менее αn^2 ее элементов являются единицами ($1/2 \leqslant \alpha < 1$); через $\varphi_\alpha(n)$ обозначим такое наибольшее число k, что любая α-избыточная матрица порядка n содержит α-избыточную матрицу порядка k. В [57] доказывается, что

$$\frac{1-\varepsilon \ln n}{\ln (2\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha})} < \varphi_\alpha(n) < \frac{2 \ln n}{\ln (2\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha})}$$

при любом $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших n.

§ 7. ШПЕРНЕРОВЫ СЕМЕЙСТВА. ТЕОРЕМЫ О ПЕРЕСЕЧЕНИИ МНОЖЕСТВ. Δ-СИСТЕМЫ

Пусть задано конечное n-элементное множество S. Семейство $\mathscr{A} = (A_i \mid i \in I)$ различных подмножеств S называется шпернеровым семейством (иначе, антицепью, беспорядком), если $A_i \subseteq A_j \Rightarrow A_i = A_j$ для любых i, $j \in I$. Примерами шпернеровых семейств (ш. с.) служат многие известные системы множеств, например, все базисы или все циклы матроида на S. По известной теореме Шпернера для максимального числа m множеств в ш. с. справедливо неравенство

$$m \leqslant \binom{n}{[n/2]}. \qquad (1)$$

Для ш. с. справедливо также неравенство Мешалкина — Ямамото:

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{n}{|A_i|}^{-1} \leqslant 1. \qquad (2)$$

Неравенства (1) и (2) послужили отправной точкой для многочисленных исследований семейств подмножеств, заданных на конечном множестве, на которые стали накладываться разнообразные ограничения, связанные с пересечениями, а позднее — и с объединениями подмножеств, входящих в семейство (см. обзор [123]). Классическим результатом такого рода является теорема Эрдёша—Ко—Радо: Если ш. с. $\mathcal{A}=(A_i \mid i\in I)$ таково, что $|A_i|\leqslant k$ для всех $i\in I$ и $|A_i\cap A_j|\neq\varnothing$ для всех $i, j\in I$ для заданного $k\leqslant\frac{n}{2}$, то

$$m\leqslant\binom{n-1}{k-1}.$$

Наряду с ш. с., сходными методами интенсивно исследуются семейства с условиями на пересечения, не являющиеся антицепями.

Основные направления, по которым в последнее время велась работа по исследованию ш. с.:

а) подробно изучались условия на объединение множеств, входящих в семейство;

б) детально рассматривались ограничения на число множеств заданной мощности в $\mathcal{A}$ (параметры семейства);

в) вводились обобщения ш. с. (k-семейства в частично упорядоченных множествах, рассмотрение мультимножеств с естественным отношением включения);

г) рассматривалась структура ш. с.

Остановимся на некоторых конкретных результатах по ш. с. Пусть $\mathcal{A}=(A_i \mid i\in I)$ — ш. с. и $p_j=|\{A\in\mathcal{A} : |A|=j\}|$, $j=1,\ldots,m$ — его параметры. В [101] при различных ограничениях получены неравенства, связывающие p_j; так, например, если $p_j=p_{m-j}$, $0\leqslant j<m/2$, то

$$\sum_{j=0}^{[m/2]}\frac{p_j}{\binom{m-1}{j-1}}+\sum_{j=[m/2]+1}^{m}\frac{p_j}{\binom{m-1}{m-j-1}}\leqslant 2,\quad \sum_{j=0}^{m}p_j\leqslant 2\binom{m-1}{[m/2]-1}.$$

В [184] показано, что если $n=2k$ и $\mathcal{A}$ содержит не более $\frac{1}{2}\binom{n}{k}$ подмножеств мощности k, то $m\leqslant\binom{n}{[(n-1)/2]}$.

В [89] рассматривались ш. с. $\mathcal{A}$ с $|A_{i_l}\cap A_{j_l}|\geqslant s$, причем $\left|\bigcup_{l=1}^{k}A_{i_l}\right|\leqslant l$ для любых k множеств $A_1,\ldots,A_k$ из $\mathcal{A}$, где $k\geqslant 2$, $s\geqslant 1$ и l имеет единственное представление в виде $l=hr+r+s$ (h, r — целые числа, $0\leqslant r\leqslant k$); выведены оценки сверху для мощности $\mathcal{A}$, зависящие от n, h, k, r, s. В [58] исследуется число $s(\mathcal{A})$ одновременно непересекающихся пар в ш. с. (т. е. таких (A_{i_k}, A_{j_k}), что $A_{i_k}\cap A_{j_k}=\varnothing$, $k=1, 2, \ldots, s$); дается формула для минимума $s(\mathcal{A})$. k-семейства в частично упорядоченных множествах P вводятся в [102] как подмножества P, не содержащие цепей длины $k+1$. «Шпернеровы» k-семейства — k-семейства наибольшей мощности. Подробно изучена структура множества всех таких k-семейств. Отметим еще результат работы [20], где неравенство (2) выводится как следствие формулы для суммирования «валентностей наборов» (некоторых функций на мультимножествах).

В работах по семействам $\mathcal{A}$ множеств, не связанным условием «шпернеровости», обычно также стремятся оценить мощность $\mathcal{A}$ при ограничениях, связанных либо с пересечениями членов семейства, либо с их объединениями, либо, наконец, присутствуют те и другие ограничения. Характерным примером результата типа «теоремы пересечения» может служить следующий ([113]): Пусть $k, t \geqslant 1$ и $\mathcal{A}_1 = (A_{11}, \ldots, A_{1r_1}), \ldots, \mathcal{A}_t = (A_{t1}, \ldots, A_{tr_t})$ — семейства подмножеств из $\{1, 2, \ldots, n\}$, состоящие каждое из k-элементных попарно различных множеств, причем $A_{i_1 j_1} \cap A_{i_2 j_2} \neq \varnothing$ для любых i_1, j_1, i_2, j_2. Тогда

$$r_1 + \ldots + r_t \leqslant \begin{cases} \binom{n}{k}, & \text{если } n/k \geqslant t, \\ t\binom{n-1}{k-1}, & \text{если } n/k \leqslant t, \end{cases}$$

и эти оценки являются наилучшими возможными. Другие образцы «теорем пересечения» дают результаты из [86—88]. В [87] предполагается, что $|A_i \cap A_j| \geqslant t$ для любых $i, j \in I$ и для заданного числа $c > 0$ каждый элемент S содержится менее чем в $c|\mathcal{A}|$ членах $\mathcal{A}$; полученные результаты дают оценку сверху для $|\mathcal{A}|$ и структуру максимального такого семейства.

Работы [127, 85] посвящены условиям на объединения. Так, в [127] доказывается, что для мощности m семейства $\mathcal{A} = (A_i | i \in I)$ со свойством $A_i \cup A_j \notin \mathcal{A}$ для всех i, j справедлива оценка:

$$m \leqslant \binom{n}{[n/2]} + 2^n/n.$$

Несколько интересных результатов было получено в последнее время о Δ-системах. Сильной Δ-системой ($\Delta(k)$-системой) называется система из k множеств, в которых каждая пара имеет одно и то же пересечение; слабой Δ-системой — система из k множеств, в которой пересечение каждой пары множеств имеет одинаковую мощность. Мощности максимальных сильных и слабых Δ-систем исследованы в [27, 203]; в частности, для сильных Δ-систем получены оценки и некоторые асимптотические соотношения. В [79] выводится одно достаточное условие существование семейства $\mathcal{A}$ на S, содержащего слабую Δ-систему: $|\mathcal{A}| < n^{\log n}/4\log\log n$, а также достаточное условие существования в семействе $\mathcal{A}$ трех множеств, образующих сильную Δ-систему. Близки к этим исследованиям результаты работы [210], где изучаются родственные семейства подмножеств.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Арлазаров В. Л., Бараев А. М., Гольфанд Я. Ф., Фараджев И. А.*, Построение с помощью ЭВМ всех латинских квадратов порядка 8. В сб. «Алгоритм. исслед. в комбинаторике». М., 1978, 129—141 (РЖМат, 1979, 1В592)

2. *Асратян А. С.*, О совместных системах различных представителей. В сб. «Дискретн. анализ». Вып. 27. Новосибирск, 1975, 3—12 (РЖМат, 1976, 1В594)
3. *Брэгман Л. М.*, Некоторые свойства неотрицательных матриц и их перманентов. Докл. АН СССР, 1973, *211*, № 1, 27—30 (РЖМат, 1973, 10В310)
4. *Добровольский М. А.*, О четырехстрочных латинских прямоугольниках. В сб. «Материалы межвузовской научной конференции педагогических институтов центральной зоны». Тула, 1968, 72—75
5. *Зюбина Т. К.*, Исследование одного нового метода решения задачи о покрытии множества (Ин-т кибернет. АН УССР. Препринт — 76—40). Киев, 1976, 36 с., ил. — 11 к., на ротапринте (РЖМат, 1977, 4В434К)
6. *Кононенко А. М.*, *Феденя О. А.*, О перманенте многомерных матриц. Изв. АН БССР. Сер. физ-мат н., 1978, № 4, 5—8 (РЖМат, 1978, 12А616)
7. *Коспанов Э. Ш.*, К задаче о протыкании граней единичного n-мерного куба. Сб. тр. Ин-т мат. Сиб. отд. АН СССР, 1977, № 31, 57—60 (РЖМат, 1978, 9В525)
8. *Кузюрин Н. Н.*, О минимальных покрытиях и максимальных упаковках $(k-1)$-подмножеств k-подмножествами. Мат. заметки, 1977, *21*, № 4, 565—571 (РЖМат, 1977, 9В452)
9. —, Об асимптотических оценках глубины (0, 1)-матриц. Прикл. мат. и мат. обеспеч. ЭВМ. М., 1979, 115—119 (РЖМат, 1980, 5В404)
10. *Леонтьев В. К.*, Алгоритм локальной оптимизации для решения некоторых комбинаторных задач. В сб. «Вопр. кибернетики». Вып. 15. М., 1975, 61—67 (РЖМат, 1976, 4В407)
11. *Минеев М. П.*, *Павлов А. И.*, О числе (0,1)-матриц с заданными суммами по строкам и столбцам. Докл. АН СССР, 1976, *230*, № 2, 271—274 (РЖМат, 1977, 2В435)
12. *Пантелеева Л. И.*, Нахождение трансверсалей латинского квадрата. В сб. «Логич. и игровые задачи на ЭВМ. Мат. обеспечение ЭВМ «Мир-1». Курск, 1976, 190—194 (РЖМат, 1977, 7В484)
13. Перечислительные задачи комбинаторного анализа (сборник переводов). М., Мир, 1979, 363 с. (РЖМат, 1980, 3В545К)
14. *Ревякин А. М.*, О наращениях комбинаторных геометрий. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1976, № 4, 59—62 (РЖМат, 1977, 2В418)
15. —, Об одной конструкции в категориях комбинаторных геометрий и отображений. Докл. АН СССР, 1976, *229*, № 5, 1055—1058 (РЖМат, 1976, 12В515)
16. *Сапоженко А. А.*, *Асратян А. С.*, *Кузюрин Н. Н.*, Обзор некоторых результатов по задачам о покрытии. Сб. тр. Ин-т мат. Сиб. отд. АН СССР, 1977, *30*, 46—75 (РЖМат, 1978, 5В419)
17. *Сачков В. Н.*, Комбинаторные методы дискретной математики. М., Наука, 1977, 320 с. (РЖМат, 1978, 4В321К)
18. —, Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М., Наука, 1978, 288 с. (РЖМат, 1979, 2В7)
19. *Соколин С. Г.*, Об одном классе целочисленных матриц. Вестн. ЛГУ, 1977, № 19, 70—75 (РЖМат, 1978, 8В463)
20. *Стечкин Б. С.*, Неравенство Ямамото и наборы. Мат. заметки, 1976, *19*, № 1, 155—160 (РЖМат, 1976, 7В368)
21. *Тараканов В. Е.*, О системах представителей. В сб. «Вопр. кибернетики». Вып. 16. М., 1975, 110—124 (РЖМат, 1976, 6В387)
22. *Тышкевич Р. И.*, Характеризация (0, 1)-матриц, определяемых числом единиц в строках и столбцах, и униграфических последовательностей. Докл. АН БССР, 1978, *22*, № 7, 592—595 (РЖМат, 1978, 12В916)
23. —, Перечисление (0, 1)-матриц, определяемых числом единиц в строках и столбцах. Докл. АН БССР, 1979, *23*, № 7, 589—591 (РЖМат, 1979, 11В414)
24. *Холл М.*, Комбинаторика. М., Мир, 1970, 424 с. (РЖМат, 1971, 1В262К)

25. *Чернышев Ю. О., Насекин В. Я.*, К решению задачи о покрытии градиентным алгоритмом. Кибернетика, 1976, № 4, 85—88 (РЖМат, 1977, 2В421)
26. *Юцис А. А.*, Число симметрических целочисленных неотрицательных матриц с заданными суммами элементов в строках. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1977, *17*, № 1, 205—208 (РЖМат, 1977, 7В465)
27. *Abbott H. L., Hanson D.*, On finite Δ-systems. II. Discrete Math., 1977, *17*, № 2, 121—126 (РЖМат, 1977, 12В587)
28. *Abramson M., Promislow D.*, Enumeration of arrays by column rises. J. Combin. Theory, 1978, *A24*, № 2, 247—250 (РЖМат, 1978, 9В549)
29. *Achilles E.*, Permanents of doubly stochastic matrices with fixed zero pattern. Linear and Multilinear Algebra, 1977, *5*, № 1, 63—70 (РЖМат, 1978, 6А390)
30. *Aigner M.*, Kombinatorik. II. Matroide und Transversaltheorie. Berlin e. a., Springer, 1976, XIII, 324 S. (РЖМат, 1977, 11В519К)
31. *Atkin A. O., Hay L., Larson R. G.*, Construction of Knut Vik designs. J. Statist. Plann. and Interference, 1977, *1*, № 3, 269—297 (РЖМат, 1978, 6В582)
32. *Babai L.*, Vector representable matroids of given rank with given automorphism group. Discrete Math., 1978, *24*, № 2, 119—125 (РЖМат, 1979, 3В498)
33. *Bailey R. A.*, Enumeration of totally symmetric latin squares. Util. Math., 1979, *15*, 193—216 (РЖМат, 1979, 11В417)
34. *Bammel S. E., Rothstein J.*, The number of 9×9 latin squares. Discrete Math., 1975, *11*, № 1, 93—95 (РЖМат, 1975, 6В447)
35. *Beasley L. B., Commings L. J.*, Permanent groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *34*, № 2, 351—355 (РЖМат, 1973, 3А375)
36. —, —, Permanent groups. II. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, *40*, № 2, 358—364 (РЖМат, 1974, 6А462)
37. —, —, Permanent semigroups. Linear and Multilinear Algebra, 1978, *5*, № 4, 297—302 (РЖМат, 1978, 10А265)
38. *Békéssy A., Békéssy P., Komlós J.*, Asymptotic enumeration of regular matrices. Stud. sci. math. hung., 1972, *7*, № 3-4, 343—353 (РЖМат, 1974, 5В338)
39. *Bender E. A.*, The asymptotic number of non-negative integer matrices with given row and column sums. Discrete Math., 1974, *10*, № 3-4, 217—223 (РЖМат, 1975, 7В368)
40. —, *Canfield E. R.*, The asymptotic number of labelled graphs with given degree sequences. J. Combin. Theory, 1978, *A24*, № 3, 296—307 (РЖМат, 1978, 11В696)
41. *Bixby R. E.*, On Reid's characterization of the ternary matroids. J. Combin. Theory, 1979, *B26*, № 2, 174—204 (РЖМат, 1979, 12В458)
42. —, Note the solution to a matroid problem of Knuth. Discrete Math., 1978, *21*, № 1, 87—88 (РЖМат, 1978, 8В466)
43. —, A strengthened form of Tutte's characterization of regular matroids. J. Combin. Theory, 1976, *B20*, № 3, 216—221 (РЖМат, 1977, 1В400)
44. —, A simple proof that every matroid is an intersection of fundamental transversal matroids. Discrete Math., 1977, *18*, № 3, 311—312 (РЖМат, 1978, 7В700)
45. *Bland R. G., Las Vergnas M.*, Orientability of matroids. J. Combin. Theory, 1978, *B24*, № 1, 94—123 (РЖМат, 1978, 7В709)
46. *Brouwer A. E., de Vries A. J., Wieringa R. M. A.*, A lower bound for the length of partial transversals in a latin square. Nieuw arch. wisk., 1978, *26*, № 2, 330—332 (РЖМат, 1979, 2В452)
47. *Brown T. C.*, Common transversals. J. Combin. Theory, 1976, *A21*, № 1, 80—85 (РЖМат, 1977, 1В397)
48. *Brualdi R. A., Dinolt G. W.*, Truncations o principal geometries. Discrete Math., 1975, *12*, № 2, 113—138 (РЖМат, 1976, 1В593)
49. —, *Gibson P. M.*, The convex polyhedra of doubly stochastic matrices. I. J. Combin. Theory, 1977, *A22*, № 2, 194—230 (РЖМат, 1977, 12В711)

50. *Brylawski T. H.,* On the nonreconstructibility combinational geometries. J. Combin. Theory, 1975, *B19*, № 1, 72—76 (РЖМат, 1976, 2B433)
51. —, A combinatorial perspective on the Radon convexity theorem. Geom. Dedic., 1976, *5*, № 4, 459—466 (РЖМат, 1978, 2B410)
52. —, Connected matroids with the smallest Whitney numbers. Discrete Math., 1977, *18*, № 3, 243—252 (РЖМат, 1978, 9B523)
53. —, An affine representation for transversal geometries. Stud. Appl. Math., 1975, *54*, № 2, 143—160 (РЖМат, 1975, 12B435)
54. —, A note on Tutte's unimodular representation. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *52*, 499—502 (РЖМат, 1976, 5B505)
55. —, The broken-circuit complex. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *234*, № 2, 417—433 (РЖМат, 1978, 8B468)
56. —, *Lucas D.,* Uniquely representable combinatorial geometries. Colloq. int. Teor. comb., Roma, 1973. T. 1. Roma, 1976, 83—104 (РЖМат, 1978, 4B326)
57. *Burkill H., Mirsky L.,* Combinatorial problems on the existence of large submatrices. II. Discrete Math., 1977, *20*, № 2, 103—108 (РЖМат, 1978, 8B460)
58. *Clements G. F.,* Intersection theorems for sets of subsets of a finite set. Quart. J. Math., 1976, *27*, № 107, 325—337 (РЖМат, 1977, 4B440)
59. *Converse G., Katz M.,* Symmetric matrices with given row sums. J. Combin. Theory, 1975, *A18*, № 2, 171—176 (РЖМат, 1975, 7B385)
60. *Cordovil R.,* Sur le geometries simpliciales. C. r. Acad. sci., 1978, *AB286*, № 25, A1219—A1222 (РЖМат, 1978, 12B859)
61. —, *Las Vergnas M.,* Geometries simpliciales unimodulaires. Discrete Math., 1979, *26*, № 3, 213—217 (РЖМат, 1979, 11B390)
62. *Crapo H. H., Rota G.-C.,* On the foundations of combinatorial theory. II. Combinatorial geometries. Stud. Appl. Math., 1970, *49*, № 2, 109—133 (РЖМат, 1971, 3B269)
63. *Cruse A. B.,* Some combinatorial properties of centrosymmetric matrices. Linear Algebra and Appl., 1977, *16*, № 1, 65—77 (РЖМат, 1978, 9A371)
64. —, A number-theoretic function related to latin squares. J. Combin. Theory, 1975, *A19*, № 3, 264—277 (РЖМат, 1976, 4B427)
65. *Csima J.,* A class of counterexamples on permanents. Pacif. J. Math., 1971, *37*, № 3, 655—656 (РЖМат, 1972, 2B322)
66. *Cummings L. J., Wallis J. S.,* An algorithm for the permanent of circulant matrices. Can. Math. Bull., 1977, *20*, № 1, 67—70 (РЖМат, 1978, 2B413)
67. *Dacić R.,* On the completion of incomplete latin squares. Publ. Inst. math., 1978, *23*, 75—80 (РЖМат, 1979, 2B451)
68. *Davies J.,* On bases of independence structures intersecting in a set of prescribed cardinality. J. London Math. Soc., 1976, *12*, № 4, 455—458 (РЖМат, 1976, 10B335)
69. —, *McDiarmid C.,* Disjoint common transversals and exchange structures. J. London Math. Soc., 1976, *14*, № 1, 55—62 (РЖМат, 1977, 4B442)
70. *Deza M., Mullin R. C., Vanstone S. A.,* Orthogonal systems. Aequat. math., 1978, *17*, № 2-3, 322—330 (РЖМат, 1978, 12B924)
71. *Doković D. Z.,* On a conjecture by van der Waerden. Math. Vesnik, 1967, *4*, № 19, 272—276 (РЖМат, 1968, 7B12)
72. *Dubois J.,* A note on the van der Waerden permanent conjecture. Can. J. Math., 1974, *26*, № 2, 352—354 (РЖМат, 1974, 11B408)
73. *Dulmage A. L., McMaster G. E.,* A formula for counting three-line latin rectangles. Proc. 6th Southeast. Conf. Combinatorics, Graph Theory and Comput., Boca Raton, 1975. Winnipeg, 1975, 279—289 (РЖМат, 1978, 12B897)
74. *Eberlein P. J.,* Remarks on the van der Waerden conjecture. II. Linear Algebra and Appl., 1969, *2*, № 3, 311—320 (РЖМат, 1970, 3B280)
75. *Edmonds F. Ch.,* Rectangular arrays. Discrete Math., 1977, *19*, № 3, 213—227 (РЖМат, 1978, 7B722)

76. —, Enumeration of arrays of a given size. Discrete Math., 1977, *18*, № 1, 1—22 (РЖМат, 1978, 1B472)
77. *Eggleton R. B., Hartman A.*, A note on equidistant permutation arrays. Lect. Notes Math., 1978, № 686, 136—147 (РЖМат, 1979, 6B558)
78. *Erdös P., Kaplansky I.*, The asymptotic number of latin rectangles. Amer. J. Math., 1946, *68*, № 2, 230—236
79. —, *Szemerédi E.*, Combinatorial properties of systems of sets. J. Combin. Theory, 1978, *A24*, № 3, 308—313 (РЖМат, 1978, 12B876)
80. *Evans T.*, Embedding incomplete latin squares. Amer. Math. Mon., 1960, *67*, № 10, 958—961 (РЖМат, 1961, 11A141)
81. *Everett C. J., Stein P. R.*, The asymptotic number of integer stochastic matrices. Discrete Math., 1971, *1*, № 1, 55—72 (РЖМат, 1974, 7B465)
82. —, —, The asymptotic number of (0, 1)-matrices with zero permanent. Discrete Math., 1973, *6*, № 1, 29—34 (РЖМат, 1974, 2B427)
83. *Foregger T. H.*, A note on matrices with constant permanental minors. Linear and Multilinear Algebra, 1979, *7*, № 2, 127—128 (РЖМат, 1979, 11A328)
84. —, An upper bound for the permanent of a fully indecomposable matrix. Proc. Amer. Math. Soc., 1975, *49*, № 2, 319—324 (РЖМат, 1976, 3B525)
85. *Frankl P.*, Families of finite sets satisfying a union condition. Discrete Math., 1979, *26*, № 2, 111—118 (РЖМат, 1979, 9B563)
86. —, The proof of a conjecture of G. O. H. Katona. J. Combin. Theory, 1975, *A19*, № 2, 208—213 (РЖМат, 1976, 2B435)
87. —, On intersecting families of finite sets. J. Combin. Theory, 1978, *A24*, № 2, 146—161 (РЖМат, 1978, 12B864)
88. —, Families of finite sets satisfying and intersection condition. Bull. Austral. Math. Soc., 1976, *15*, № 1, 73—79 (РЖМат, 1977, 6B399)
89. —, A Sperner-type theorem for families of finite sets. Period. math. hung., 1978, *9*, № 4, 257—267 (РЖМат, 1979, 2B438)
90. *Friedland Sh.*, Matrices satisfying the van der Waerden conjecture. Linear Algebra and Appl., 1974, *8*, № 6, 521—528 (РЖМат, 1975, 7A507)
91. —, A study of the van der Waerden conjecture and its generalizations. Linear and Multilinear Algebra, 1978, *6*, № 2, 123—143 (РЖМат, 1979, 3A336)
92. —, *Minc H.*, Monotonicity of permanents of doubly stochastic matrices. Linear and Multilinear Algebra, 1978, *6*, № 3, 227—231 (РЖМат, 1979, 5A303)
93. *Fulkerson D. R., Nemhauser G. L., Trotter L. E., Jr.*, Two computationally difficult set covering problem that arise in computing the 1-width of incidence matrices of Steiner triple systems. Math. Program. Study 2. Amsterdam, 1974, 72—81 (РЖМат, 1976, 3B510)
94. *Gergely E.*, A simple method for constructing doubly diagonalized latin squares. J. Combin. Theory, 1974, *A16*, № 2, 266—272 (РЖМат, 1974, 9B410)
95. *Gibson P. M.*, A lower bound for the permanent of a (0, 1)-matrix. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *33*, № 2, 245—246 (РЖМат, 1972, 12B190)
96. —, Conversion of the permanent into the determinant. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, *27*, № 3, 471—476 (РЖМат, 1972, 4B301)
97. —, Real permanental roots of doubly stochastic matrices. Linear Algebra and Appl., 1978, *21*, № 3, 289—291 (РЖМат, 1979, 4A413)
98. *Gordon B., Motzkin T. S., Welch L.*, Permanents of (0, 1)-matrices. J. Combin. Theory, 1974, *A17*, № 2, 145—155 (РЖМат, 1975, 2B466)
99. *Graham R. L., Lehmer D. H.*, On the permanent of Schur's matrix. J. Austral. Math. Soc., 1978, *A21*, № 4, 487—497 (РЖМат, 1977, 2A421)
100. *Greene C.*, Weight enumeration and the geometry of linear codes. Stud. Appl. Math., 1976, *55*, № 2, 119—128 (РЖМат, 1977, 2B420)
101. —, *Hilton A. J. W.*, Some results on Sperner families. J. Combin. Theory, 1979, *A26*, № 2, 202—209 (РЖМат, 1979, 9B560)
102. —, *Kleitman D. J.*, The structure of Sperner *k*-families. J. Combin. Theory, 1976, *A20*, № 1, 41—68 (РЖМат, 1976, 5B501)

103. *Gyires B.,* On permanent inequalities. Combinatorics. Vol. 1. Amsterdam e. a., 1978, 471—484 (РЖМат, 1979, 12А411)
104. *Häggkvist R.,* A partial solution of the Evans conjecture for latin squares. Dep. Math. Univ. Umea (Publ.), 1976, № 6, 17 pp. (РЖМат, 1977, 2В447)
105. —, A solution of the Evans conjecture for latin squares of large size. Combinatorics. Vol. 1. Amsterdam e. a., 1978, 495—513 (РЖМат, 1979, 11В422)
106. *Hall M., Jr.,* Construction of block designs. Surv. Combin. Theory. Amsterdam e. a., 1973, 251—258 (РЖМат, 1974, 4В287)
107. *Hartfiel D. J.,* A simplified form for nearly reducible and nearly decomposable matrices. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, *24*, № 2, 388—393 (РЖМат, 1971, 8А292)
108. —, A lower bound on the permanent of a (0, 1)-matrix. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, *39*, № 1, 83—85 (РЖМат, 1974, 2В426)
109. —, *Crosby J. W.,* On the permanent of a certain class of (0, 1)-matrices. Can. Math. Bull., 1971, *14*, № 4, 507—511 (РЖМат, 1972, 8В357)
110. —, —, A lower bound for the permanent of $U_n(k, k)$. J. Combin. Theory, 1972, *A12*, № 2, 283—288 (РЖМат, 1972, 8В360)
111. *Heinrich K., van Ress G. H. J.,* Some constructions for equidistant permutation arrays of index one. Util. Math., 1978, *13*, 193—200 (РЖМат, 1978, 12В930)
112. *Hilton A. J. W.,* On double diagonal and cross latin squares. J. London Math. Soc., 1973, *6*, № 4, 679—689 (РЖМат, 1973, 12В376)
113. —, An intersection theorem for a collection of families of subsets of a finite set. J. London Math. Soc., 1977, *15*, № 3, 369—376 (РЖМат, 1978, 1В465)
114. *Hishi Akihiro,* An elementary proof of Johnson-Dulmage-Mendelsohn's refinement of Birkhoff's theorem on doubly stochastic matrices. Can. Math. Bull., 1979, *22*, № 1, 81—86 (РЖМат, 1979, 11В416)
115. *Hodges J. H.,* Ranked partitions of rectangular matrices over finite fields. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1976, *60*, № 1, 6—12 (РЖМат, 1978, 2В423)
116. *Houck D. J., Paul M. E.,* Non-singular 0-1 matrices with constant row and column sums. Linear Algebra and Appl., 1978, *22*, 263—266 (РЖМат, 1979, 9В589)
117. *Hull B.,* Two algorithms for matroids. Discrete Math., 1975, *13*, № 2, 121—128 (РЖМат, 1976, 4В446)
118. *Ingleton A. W., Main R. A.,* Non-algebraic matroids exist. Bull. London Math. Soc., 1975, 7, № 2, 144—146 (РЖМат, 1976, 3В506)
119. *Jackson D. M., van Rees G. H. J.,* The enumeration of generalized double stochastic nonnegative integer square matrices. SIAM J. Comput., 1975, *4*, № 4, 474—477 (РЖМат, 1976, 7В380)
120. *Jamamoto K.,* On asymptotic number of latin rectangles. Jap. J. Math., 1951, *21*, 113—119
121. *Johnson J. J.,* Bounds for certain permanents and determinants. Linear Algebra and Appl., 1974, *8*, № 1, 57—64 (РЖМат, 1974, 7А498)
122. *Jurkat W. B., Ryser H. J.,* Matrix factorizations of determinants and permanents. J. Algebra, 1966, *3*, № 1, 1—27 (РЖМат, 1966, 8А138)
123. *Katona G. O. H.,* Extremal problems for hypergraphs. Math. Centre Tracts, 1974, № 56, 13—42 (РЖМат, 1975, 4В409)
124. *Katz M.,* On the extreme points of certan convex polytope. J. Combin. Theory, 1970, *8*, № 4, 417—423 (РЖМат, 1970, 12В315)
125. *Kelly D. G., Kennedy D.,* The Higgs factorization of geometric strong map. Discrete Math., 1978, *22*, № 2, 139—146 (РЖМат, 1978, 10В653)
126. *Kim Ki Hang, Roush F. W.,* On a conjecture of Frdös and Renyi. Linear Algebra and Appl., 1979, *23*, 179—189 (РЖМат, 1979, 10В357)
127. *Kleitman D. J.,* Extremal properties of collections of subsets containing no two sets and their union. J. Combin. Theory, 1976, *A20*, № 3, 390—392 (РЖМат, 1977, 1В394)

128. *Knopp P. J., Sinkhorn R.,* Permanents of special classes of doubly stochastic matrices. Linear and Multilinear Algebra, 1976, *4*, № 2, 129—136 (РЖМат, 1977, 5А263)
129. *Koksma K. K.,* A lower bound for the order of a partial transversal in a latin square. J. Combin. Theory, 1969, *7*, № 1, 94—95 (РЖМат, 1969, 12В317)
130. *Koontz W.,* Convex sets of some doubly stochastic matrices. J. Combin. Theory, 1978, *A24*, № 1, 111—112 (РЖМат, 1978, 7В707)
131. *Kung J. P. S.,* The Radon transforms of a combinatorial geometry. I. J. Combin. Theory, 1979, *26*, № 2, 97—102 (РЖМат, 1979, 11В391)
132. *Lam C. W. H.,* The distribution of 1-widths of (0,1)-matrices. Discrete Math., 1977, *20*, № 2, 109—122 (РЖМат, 1978, 10В651)
133. *Leahey W. J., Herndon W. C., Phan V. T.,* A note on permanents. Linear and Multilinear Algebra, 1975, *3*, № 3, 193—196 (РЖМат, 1976, 9А380)
134. *Levow R. B.,* Lower bounds for permanents of incidence matrices. J. Combin. Theory, 1972, *A12*, № 2, 297—303 (РЖМат, 1972, 8В358)
135. —, Counterexamples to conjecture of Ryser and de Oliveira. Pacif. J. Math., 1973, *44*, № 2, 603—606 (РЖМат, 1973, 11В436)
136. *Lewin M.,* On the extreme points of the polytope of symmetric matrices with given row sums. J. Combin. Theory, 1977, *A23*, № 2, 223—231 (РЖМат, 1978, 2В412)
137. *Light F. W., Jr.,* A procedure for the enumeration of $4\times n$ latin rectangles. Fibonacci Quart., 1973, *11*, № 3, 241—246 (РЖМат, 1974, 5В333)
138. —, Enumeration of truncated latin rectangles. Fibonacci Quart., 1979, *17*, № 1, 34—36 (РЖМат, 1979, 9В592)
139. *Lim M. H.,* A note on the relation between the determinant and the permanent. Linear and Multilinear Algebra, 1979, 7, № 2, 145—147 (РЖМат, 1979, 11А329)
140. *Lindner Ch. C.,* On completing latin rectangles. Can. Math. Bull., 1970, *13*, № 1, 65—68 (РЖМат, 1970, 12В326)
141. —, Embedding orthogonal partial latin squares. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *59*, № 1, 184—186 (РЖМат, 1977, 7В481)
142. *Lindström B.,* On the chromatic number of regular matroids. J. Combin. Theory, 1978, *B24*, № 3, 367—369 (РЖМат, 1978, 11В616)
143. —, Note on strong joins and pushout of combinatorial geometries. J. Combin. Theory, 1978, *A25*, № 1, 77—79 (РЖМат, 1978, 11В617)
144. *Little C. H. C.,* A characterization of convertible (0,1)-matrices. J. Combin. Theory, 1975, *B18*, № 3, 187—208 (РЖМат, 1976, 1В592)
145. *London D.,* Some notes on the van der Waerden conjecture. Linear Algebra and Appl., 1971, *4*, № 2, 155—160 (РЖМат, 1971, 12А462)
146. *Lorimer P.,* Maximal sets of permutations constructed from projective planes. Discrete Math., 1979, *25*, № 3, 269—273 (РЖМат, 1979, 11В410)
147. *Lucas D.,* Weak maps of combinatorial geometries. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *206*, 247—279 (РЖМат, 1976, 2В430)
148. *Marcus M., May F. C.,* The permanent function. Can. J. Math. 1962, *14*, № 2, 177—189 (РЖМат, 1962, 11А127)
149. —, *Minc H.,* On a conjecture of B. L. van der Waerden. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1967, *63*, № 2, 305—309 (РЖМат, 1968, 7В11)
150. —, —, Some results on doubly stochastic matrices. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, *13*, № 4, 571—579 (РЖМат, 1963, 3А166)
151. —, —, Extensions of classical matrix inequalities. Linear Algebra and Appl., 1968, *1*, № 3, 421—444 (РЖМат, 1969, 3А293)
152. —, —, On the relation between the determinant and the permanent. Ill. J. Math., 1961, *5*, № 3, 376—381 (РЖМат, 1962, 5А175)
153. —, *Newman M.,* On the minimum of the permanent of a doubly stochastic matrix. Duke Math. J., 1959, *26*, № 1, 61—72 (РЖМат, 1960, 1358)
154. *Marica J., Schönheim J.,* Incomplete diagonals of latin squares. Can. Math. Bull., 1969, *12*, № 2, 235 (РЖМат, 1970, 4В314)

155. *Matthews L. R.,* Bicircular matroids. Quart. J. Math., 1977, *28*, № 110, 213—227 (РЖМат, 1978, 2B411)
156. *McDiarmid C. J. H.,* On the number of systems of distinct representatives in a independence structure. J. Math. Anal. and Appl., 1976, *53*, № 1, 133—136 (РЖМат, 1976, 7B369)
157. *Metropolis N., Stein M. L., Stein P. R.,* Permanents of cyclic (0,1)-matrices. J. Combin. Theory, 1969, *7*, № 4, 291—321 (РЖМат, 1970, 8B234)
158. *Minc H.,* Upper bounds for permanents of (0,1)-matrices. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, *69*, № 6, 789—791 (РЖМат, 1969, 9A115)
159. —, On lower bounds for the permanents of (0,1)-matrices. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, *22*, № 1, 117—123 (РЖМат, 1970, 4B312)
160. —, On permanents of circulants. Pacif. J. Math., 1972, *42*, № 2, 477—484 (РЖМат, 1973, 5A377)
161. —, Rearrangements. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, *159*, 497—504 (РЖМат, 1972, 6B241)
162. —, (0,1)-matrices with minimal permanents. Isr. J. Math., 1973, *15*, № 1, 27—30 (РЖМат, 1974, 1B309)
163. —, Subpermanents of doubly stochastic matrices. Linear and Multilinear Algebra, 1975, *3*, № 1-2, 91—94 (РЖМат, 1976, 8A493)
164. —, The invariance of elementary symmetric functions. Linear and Multilinear Algebra, 1976, *4*, № 3, 209—215 (РЖМат, 1977, 6A265)
165. —, Doubly stochastic matrices with minimal permanents. Pacif. J. Math., 1975, *58*, № 1, 155—157 (РЖМат, 1976, 3A380)
166. —, Evaluation of permanents. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1979, *22*, № 1, 27—32 (РЖМат, 1979, 11B386)
167. *Minieka E.,* Finding the circuits of a matroid. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1976, *B80*, № 3, 337—342 (РЖМат, 1977, 10B316)
168. *Mirsky L.,* Transversal theory. An account of some aspects of combinatorial mathematics. New York, Acad. Press, 1971. IX, 255 pp. (РЖМат, 1973, 3B343K)
169. *Moyls B. N., Marcus M., Minc H.,* Permanent preservers on the space of doubly stochastic matrices. Can. J. Math., 1962, *14*, № 2, 190—194 (РЖМат, 1962, 11A128)
170. *Mullin R. C., Nemeth E.,* An improved bound for equidistant permutation arrays of index one. Util. Math., 1978, *13*, 77—85 (РЖМат, 1978, 12B929)
171. *Nguyen Hien Quang,* Covering relation in the lattice of erections of a combinatorial geometry. Proc. Nat. Acad. Sci., 1977 (1978), *37*, 101—102 (РЖМат, 1979, 3B502)
172. —, Projections and weak maps in combinatorial geometries. Discrete Math., 1978, *24*, № 3, 281—289 (РЖМат, 1979, 7B553)
173. —, Semimodular functions and combinatorial geometries. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *238*, 355—383 (РЖМат, 1978, 11B615)
174. —, Functors of the category of combinatorial geometries and strong maps. Discrete Math., 1977, *20*, № 2, 143—158 (РЖМат, 1978, 9B522)
175. *Nijenhuis A.,* On permanents and the zeros of rook polynomials. J. Combin. Theory, 1976, *A21*, № 2, 240—244 (РЖМат, 1977, 5B323)
176. —, *Wilf H. S.,* Combinatorial algorithms. New York, Acad. Press, 1975. XIV, 233 pp. (РЖМат, 1978, 3B409K)
177. *Oliveira G. N. de,* Note on the function per$(\lambda E - A)$. Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1970—1971, *A13*, № 2, 199—201 (РЖМат, 1972, 11B289)
178. —, A conjecture and some problems on permanents. Pacif. J. Math., 1970, *32*, № 2, 495—499 (РЖМат, 1970, 11A259)
179. *O'Neil P. E.,* Asymptotics and random matrices with row-sum and column-sum restrictions. Bull. Amer. Math. Soc., 1969, *75*, № 6, 1276—1282 (РЖМат, 1970, 12B324)
180. *Oxley J. G.,* Colouring, packing and the critical problem. Quart. J. Math., 1978, *29*, № 113, 11—22 (РЖМат, 1978, 11B607)

181. *Oyama Tatsuo,* Necessary condition for the completion of partial latin squares. J. Oper. Res. Soc. Jap., 1978, *21*, № 1, 109—123 (РЖМат, 1978, 11В648)
182. *Perfect H.,* Positive diagonals of ± 1 matrices. Monatsh. Math., 1973, *77*, № 3, 225—240 (РЖМат, 1974, 2В425)
183. *Podewski K.-P., Steffens K.,* Maximal representable subfamilies. Bull. London Math. Soc., 1976, *8*, № 2, 186—189 (РЖМат, 1977, 1В398)
184. *Purdy G.,* A result on Sperner collections. Util. Math., 1977, *12*, 95—99 (РЖМат, 1978, 5В423)
185. *Razen R. A., Schnitzer F. J.,* Einige Sätze über gemeinsame Transversalen zweier Mengenfamilien. Arch. Math., 1976, *27*, № 3, 312—318 (РЖМат, 1977, 3В362)
186. *Rothaus O. S.,* Study of the permanent conjecture and some of its generalizations. Isr. J. Math., 1974, *18*, № 1, 75—96 (РЖМат, 1976, 5А376)
187. *Sasser D. W., Slater M. L.,* On the inequality $\Sigma x_i y_i \geqslant \frac{1}{n} \Sigma x_i \cdot \Sigma y_i$ and the van der Waerden permanent conjecture. J. Combin. Theory, 1967, *3*, № 1, 25—33 (РЖМат, 1968, 11В304)
188. *Schellenberg P. J., Vanstone S. A.,* Recursive constructions for equidistant permutation arrays. J. Austral. Math. Soc., 1977, *A24*, № 2, 216—223 (РЖМат, 1978, 9В562)
189. *Schmidt R.,* On the existence of uncountably many matroidal families. Discrete Math., 1979, *27*, № 1, 93—97 (РЖМат, 1979, 11В454)
190. *Schönheim J., Milner E. C.,* A Hall-type condition for property *B*. Proc. 6th Southeast. Conf. Combinatorics, Graph Theory, and Comput., Boca Raton, 1975. Winnipeg, 1975, 523—530 (РЖМат, 1978, 12В873)
191. *Schrage G.,* Some inequalities for multidimensional (0,1)-matrices. Discrete Math., 1978, *23*, № 2, 169—175 (РЖМат, 1979, 1В578)
192. *Schrijver A.,* Matroids and linking systems. J. Combin. Theory, 1979, *B26*, № 3, 349—369 (РЖМат, 1979, 12В459)
193. —, Matroids and linking systems. Math. Centre Tracts, 1978, № 88, VII, 125 pp., ill. (РЖМат, 1978, 11В614)
194. —, A short proof of Minc's conjecture. J. Combin. Theory, 1978, *A25*, № 1, 80—83 (РЖМат, 1978, 12В870)
195. *Seymour P. D.,* The matroids with the max-flow min-cut property. J. Combin. Theory, 1977, *B23*, № 2-3, 189—222 (РЖМат, 1978, 7В708)
196. —, Matroid representation over *GF*(3). J. Combin. Theory, 1979, *B26*, № 2, 159—173 (РЖМат, 1979, 12В455)
197. —, The forbidden minors of binary clutters. J. London Math. Soc., 1976, *12*, № 3, 356—360 (РЖМат, 1976, 7В366)
198. *Sinkhorn R.,* Doubly stochastic matrices which have certain diagonals with constant sums. Linear Algebra and Appl. 1977, *16*, № 1, 79—82 (РЖМат, 1978, 9А372)
199. —, Concerning a conjecture of Marshall Hall. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, *21*, № 1, 197—201 (РЖМат, 1970, 2В342)
200. —, Doubly stochastic matrices with dominant *p*-minors. Linear and Multilinear Algebra, 1977, *5*, № 2, 107—117 (РЖМат, 1978, 6А397)
201. —, Doubly stochastic matrices whose squares decrease the permanent. Linear and Multilinear Algebra, 1976, *4*, № 2, 123—128 (РЖМат, 1977, 4А386)
202. —, Doubly stochastic matrices whose squares leave the permanent invariant. Linear and Multilinear Algebra, 1973, *1*, № 2, 103—118 (РЖМат, 1974, 8В290)
203. *Spencer J.,* Intersection theorems for systems of sets. Can. Math. Bull., 1977, *20*, № 2, 249—254 (РЖМат, 1978, 3В413)
204. *Stein C. M.,* Asymptotic evaluation of the number of latin rectangles. J. Combin. Theory, 1978, *A25*, № 1, 38—49 (РЖМат, 1978, 11В636)
205. *Stein S. K.,* Transversals of latin squares and their generalizations. Pacif. J. Math., 1975, *59*, № 2, 567—575 (РЖМат, 1976, 7В387)

206. *Vámos P.*, The missing axiom of matroid theory is lost forever. J. London Math. Soc., 1978, *18*, № 3, 403—408 (РЖМат, 1979, 6B528)
207. *Vanstone S. A.*, The asymptotic behaviour of equidistant permutation arrays. Can. J. Math., 1979, *31*, № 1, 45—48 (РЖМат, 1979, 9B593)
208. —, *Schellenberg P. J.*, A construction for equidistant permutation arrays of index one. J. Combin. Theory, 1977, *A23*, № 2, 180—186 (РЖМат, 1978, 1B483)
209. *Voorhoeve M.*, A lower bound for the permanents of certain (0,1)-matrices. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1979, *A82*, № 1, 83—86 (РЖМат, 1979, 9B558)
210. *Wang Da-Lun, Wang Ping*, Some results about the Chvátal conjecture. Discrete Math., 1978, *24*, № 1, 95—101 (РЖМат, 1979, 2B439)
211. *Wang Edward Tsu-hsia*, On permanents of (—1,1)-matrices. Isr. J. Math., 1974, *18*, № 4, 353—361 (РЖМат, 1975, 11B343)
212. —, On a conjecture of M. Marcus and H. Minc. Linear and Multilinear Algebra, 1977, *5*, № 2, 145—148 (РЖМат, 1978, 6A391)
213. —, Permanental pairs of doubly stochastic matrices. Amer. Math. Mon., 1978, *85*, № 3, 188—190 (РЖМат, 1979, 2A270)
214. —, A new class of finite cyclic permanent groups. J. Combin. Theory, 1974, *A17*, № 2, 261—264 (РЖМат, 1975, 2B467)
215. *Watkins W., Merris R.*, Convexes sets of doubly stochastic matrices. J. Combin. Theory, 1974, *A16*, № 1, 129—130 (РЖМат, 1974, 6A473)
216. *Wells A. L., Jr.*, On the completion of partial latin squares. J. Combin. Theory, 1977, *A22*, № 3, 313—321 (РЖМат, 1977, 11B551)
217. *Welsh D. J. A.*, Matroid theory. London, Acad. Press, 1976. XI, 433 pp. (РЖМат, 1978, 2B415K)
218. *Wilde P. J.*, The Euler circuit theorem for binary matroids. J. Combin. Theory, 1975, *B18*, № 3, 260—264 (РЖМат, 1976, 1B664)
219. —, Matroids with given restrictions and contractions. J. Combin. Theory, 1977, *B22*, № 2, 122—130 (РЖМат, 1977, 8B416)
220. *Woolbright D. E.*, An $n \times n$ latin square has a transversal with at least $n-\sqrt{n}$ distinct symbols. J. Combin. Theory, 1978, *A24*, № 2, 235—237 (РЖМат, 1978, 9B560)