



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. V. Lebedev, On l^p -Multipliers of Functions Analytic in the Disk, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 2014, Volume 48, Issue 3, 92–96

DOI: 10.4213/faa3159

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.153.44

November 3, 2024, 01:20:37



$$q(x) = \frac{l(l+1)}{x^2} + \tilde{q}(x), \quad x \geq x_0, \quad \int_{x_0}^{\infty} x|\tilde{q}(x)| dx < \infty.$$

(i) Если $l \in [-1/2, 1/2)$, то A подобен самосопряженному.

(ii) Если $l \geq 1/2$, то A подобен самосопряженному в точности тогда, когда решение $s(x)$ неограничено.

Отметим, что случай $l = 0$ исследован другим методом в [8, разд. 4].

Автор признателен М. М. Маламуду за многочисленные полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Р. В. Акопян, Изв. АН Арм. ССР, Сер. матем., **15**:5 (1980), 357–364. [2] R. Beals, J. Differential Equations, **56**:3 (1985), 391–407. [3] C. Bennewitz, Proc. London Math. Soc., (3), **59**:2 (1989), 294–338. [4] P. Binding, A. Fleige, Oper. Matrices, **5**:4 (2011), 735–755. [5] B. Ćurgus, A. Fleige, A. Kostenko, Integral Equations Operator Theory, **77**:4 (2013), 533–557. [6] B. Ćurgus, H. Langer, J. Differential Equations, **79**:1 (1989), 31–61. [7] И. М. Карабаш, А. С. Костенко, Функц. анализ и его прил., **43**:1 (2009), 81–84. [8] I. M. Karabash, A. S. Kostenko, M. M. Malamud, J. Differential Equations, **246**:3 (2009), 964–997. [9] I. M. Karabash, M. M. Malamud, Oper. Matrices, **1**:3 (2007), 301–368. [10] J. Korevaar, *Tauberian Theory: A Century of Developments*, Springer-Verlag, Berlin, 2004. [11] A. Kostenko, Math. Nachr., (2014) (to appear), DOI: 10.1002/mana.201300104; <http://arxiv.org/abs/1202.2444>. [12] H. Langer, in: Lect. Notes in Math., vol. 948, 1982, 1–46. [13] И. С. Кац, М. Г. Крейн, *О спектральных функциях струны. Доп. II к книге Ф. Аткинсона «Дискретные и непрерывные задачи»*, Мир, М., 1968. [14] А. И. Парфенов, Сиб. матем. журн., **44**:4 (2003), 810–819. [15] С. Г. Пятков, в кн.: Неклассические уравнения математической физики, Изд-во Института математики СО РАН, Новосибирск, 2005, 240–251. [16] S. G. Pyatkov, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 221, Birkhäuser/Springer-Verlag, Basel, 2012, 549–570. [17] K. Veselić, Glasnik Math. Ser. III, **7**:2 (1972), 229–248.

Faculty of Mathematics, University of Vienna
e-mail: Oleksiy.Kostenko@univie.ac.at

Поступило в редакцию
11 июля 2012 г.

УДК 517.948+513.8

Об l^p -мультипликаторах функций, аналитических в круге*

© 2014. В. В. ЛЕБЕДЕВ

Для произвольной функции f , аналитической в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ комплексной плоскости \mathbb{C} , рассмотрим ее разложение в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \widehat{f}(n) z^n, \quad z \in D. \quad (1)$$

*Исследование осуществлено в рамках программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2013–2014 гг., проект №12-01-0079.

При $1 \leq p \leq \infty$ пусть $A_p^+(D)$ — пространство всех функций (1), таких, что последовательность коэффициентов Тэйлора $\hat{f} = \{\hat{f}(n), n = 0, 1, \dots\}$ принадлежит l^p . Для $f \in A_p^+(D)$ положим $\|f\|_{A_p^+(D)} = \|\hat{f}\|_{l^p}$. Аналитическая в D функция m называется l^p -мультипликатором, если для любой функции f из $A_p^+(D)$ имеем $m \cdot f \in A_p^+(D)$. Класс всех таких мультипликаторов обозначим через $M_p^+(D)$. Этот класс является банаховой алгеброй относительно естественной нормы

$$\|m\|_{M_p^+(D)} = \sup_{\|f\|_{A_p^+(D)} \leq 1} \|m \cdot f\|_{A_p^+(D)}$$

и обычного умножения функций. Классы $M_p^+(D)$ изучались в работах [1]–[6]¹⁾. Отметим, что случай $p \neq 1, \infty, 2$ представляет отдельный интерес. Хорошо известно, что $M_p^+(D) = M_q^+(D)$ при $1/p + 1/q = 1$ и

$$A_1^+(D) = M_1^+(D) = M_\infty^+(D) \subseteq M_p^+(D) \subseteq M_2^+(D) = H^\infty(D),$$

где $H^\infty(D)$ — пространство Харди ограниченных аналитических функций в D .

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ — открытая область, содержащая круг D . Мы укажем класс областей Ω , таких, что всякая ограниченная аналитическая функция в Ω принадлежит $M_p^+(D)$. Случай, когда Ω содержит замыкание круга D , тривиален; в этом случае всякая ограниченная аналитическая функция в Ω принадлежит $A_1^+(D)$ и, следовательно, принадлежит $M_p^+(D)$ при всех p , $1 \leq p \leq \infty$. Нетривиальным является случай, когда граница области Ω имеет общие точки с границей $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ круга D .

Виноградов [2] показал, что если $r > 1$, $0 \leq \alpha < \pi/2$ и m — ограниченная аналитическая функция в области

$$\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r, \alpha < \arg(z - 1) < 2\pi - \alpha\}, \quad (2)$$

то $m \in \bigcap_{1 < p < \infty} M_p^+(D)$. С помощью этого результата Виноградов впервые указал примеры нетривиальных (т.е. бесконечных) произведений Бляшке в $M_p^+(D)$. Заметим, что граница всякой области (2) имеет лишь одну общую точку с границей круга D (а именно точку $z = 1$). Как мы увидим, утверждение, аналогичное результату Виноградова, верно для областей значительно более широкого класса. Функции, аналитические в областях, рассматриваемых ниже, могут иметь несчетное множество особенностей на границе круга²⁾.

Как обычно, для произвольной области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ через $H^\infty(\Omega)$ будем обозначать пространство Харди ограниченных аналитических функций в Ω . Для $g \in H^\infty(\Omega)$ полагаем $\|g\|_{H^\infty(\Omega)} = \sup_{z \in \Omega} |g(z)|$.

Пусть J — дуга на граничной окружности ∂D , причем длина $|J|$ этой дуги строго меньше π . Пусть T_J — произвольный открытый равнобедренный треугольник, основанием которого служит хорда, стягивающая дугу J , и боковые стороны которого лежат вне круга D . Обозначим через θ_{T_J} угол между окружностью ∂D и боковой стороной треугольника T_J .

¹⁾ В §6 работы автора [6] имеется неточность. Вместо написанного там «интеграл Пуассона» должно быть «проекция Рисса $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \rightarrow \sum_{k \geq 0} c_k z^k$ ».

²⁾ Попутно отметим, что в теореме Виноградова условие $\alpha < \pi/2$ является существенным. Например, функция $S(z) = \exp\{(z+1)/(z-1)\}$ ограничена в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$, но, как показал Вербицкий [4], принадлежит $M_p^+(D)$ лишь в тривиальном случае $p = 2$.

Рассмотрим произвольное замкнутое множество $F \subseteq \partial D$. Пусть $\tau(F)$ — семейство всех дуг, дополнительных к F (т. е. компонент связности дополнения $\partial D \setminus F$). Будем предполагать, что каждая дуга семейства $\tau(F)$ имеет длину, строго меньшую, чем π . Рассмотрим область

$$\Omega_F = D \cup \bigcup_{J \in \tau(F)} T_J,$$

причем потребуем выполнения условия

$$\inf_{J \in \tau(F)} \theta_{T_J} > 0. \quad (3)$$

Всякую область Ω_F , полученную указанным образом, назовем звездобразной областью, порожденной множеством F .

Мы покажем, что при некотором условии, наложенном на множество $F \subseteq \partial D$, всякая ограниченная аналитическая в Ω_F функция принадлежит $M_p^+(D)$.

Пусть E — замкнутое множество лебеговой меры нуль на прямой \mathbb{R} . Рассмотрим семейство $\tau(E)$ всех интервалов, дополнительных к E (т. е. компонент связности дополнения $\mathbb{R} \setminus E$). Для произвольного интервала $I \subseteq \mathbb{R}$ определим оператор S_I , полагая

$$\widehat{S_I(f)} = 1_I \widehat{f}, \quad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}),$$

где $\widehat{}$ означает преобразование Фурье и 1_I — характеристическая функция интервала I (т. е. $1_I(t) = 1$ при $t \in I$, $1_I(t) = 0$ при $t \notin I$). Следуя [7], скажем, что множество E обладает свойством $\text{LP}(p)$ ($1 < p < \infty$), если соответствующая квадратичная функция Литтлвуда–Пэли

$$S(f) = \left(\sum_{I \in \tau(E)} |S_I(f)|^2 \right)^{1/2}$$

удовлетворяет условию

$$c_1(p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|S(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_2(p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad f \in L^p(\mathbb{R})$$

(с положительными константами $c_1(p)$, $c_2(p)$, не зависящими от f). В случае, если E обладает свойством $\text{LP}(p)$ при всех p , $1 < p < \infty$, скажем, что E обладает свойством LP .

Пусть теперь F — замкнутое множество меры нуль на граничной окружности ∂D . Скажем, что F обладает свойством $\text{LP}(p)$ или свойством LP , если $F = \{e^{it}, t \in E\}$, где $E \subseteq [0, 2\pi]$ — множество, обладающее свойством $\text{LP}(p)$ или свойством LP соответственно.

Замечание 1. Классическим примером бесконечного множества $E \subseteq \mathbb{R}$, обладающего свойством LP , является $E = \{\pm 2^k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, где \mathbb{Z} — множество целых чисел. Вместе с тем существуют несчетные множества, обладающие свойством LP . Впервые это было установлено Хеар и Клемешем [8]. Существование таких множеств также отмечалось в [9]; детали изложены в [10, §4]. Сформулируем соответствующий результат для множеств на ∂D . При каждом p , $1 < p < \infty$, существует константа β_p ($0 < \beta_p < 1$), такая, что верно следующее. Пусть $F \subseteq \partial D$ — замкнутое множество меры нуль. Предположим, что дуги J_k , $k = 1, 2, \dots$, дополнительные к F , будучи занумерованы в порядке невозрастания их длин, удовлетворяют условию $|J_{k+1}|/|J_k| \leq \beta_p$ при всех достаточно

больших k . Тогда F обладает свойством $LP(p)$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что если $\lim_{k \rightarrow \infty} |J_{k+1}|/|J_k| = 0$, то F обладает свойством LP .

Результатом настоящей заметки является следующая

Теорема. Пусть множество $F \subseteq \partial D$ обладает свойством $LP(p)$ и Ω_F — звездообразная область, порожденная F . Тогда $H^\infty(\Omega_F) \subseteq M_p^+(D)$. Если F обладает свойством LP , то $H^\infty(\Omega_F) \subseteq \bigcap_{1 < p < \infty} M_p^+(D)$.

Доказательство. Пусть G — абелева группа и Γ — группа, двойственная к G . Рассмотрим функцию $m \in L^\infty(\Gamma)$ и оператор Q , определяемый соотношением

$$\widehat{Q}f = m\widehat{f}, \quad f \in L^p \cap L^2(G),$$

где $\widehat{}$ означает преобразование Фурье на G . Функция m называется L^p -мультипликатором Фурье, если соответствующий оператор Q является ограниченным оператором в $L^p(G)$ ($1 \leq p \leq \infty$). Класс всех таких мультипликаторов обозначается через $M_p(\Gamma)$, при этом полагаем $\|m\|_{M_p(\Gamma)} = \|Q\|_{L^p(G) \rightarrow L^p(G)}$. Хорошо известна [11] (см. также [12]) связь между мультипликаторами Фурье на прямой \mathbb{R} и на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Нам потребуется теорема Джодета [12] о периодическом продолжении мультипликаторов. Согласно этой теореме, если $f \in M_p(\mathbb{R})$ — функция, аннулирующаяся вне отрезка $[0, 2\pi]$, и g есть 2π -периодическая функция, совпадающая с f на $[0, 2\pi]$, то $g \in M_p(\mathbb{T})$. Отметим, что между пространствами $M_p^+(D)$ и $M_p(\mathbb{T})$ имеется непосредственная связь. Имея произвольную функцию $m \in H^\infty(D)$, рассмотрим ее (некасательную) граничную функцию $m^*(t) = m(e^{it})$. Условия $m \in M_p^+(D)$ и $m^* \in M_p(\mathbb{T})$ эквивалентны [3] (см. также [5]).

Нам потребуется также следующее утверждение. Пусть множество $E \subseteq \mathbb{R}$ обладает свойством $LP(p)$. Предположим, что функция $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ непрерывно дифференцируема на каждом интервале, дополнительном к E , и ее производная f' удовлетворяет условию

$$|f'(t)| \leq \frac{c}{\text{dist}(t, E)}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus E, \quad (4)$$

где $\text{dist}(t, E)$ означает расстояние от точки t до множества E и $c > 0$ не зависит от t . Тогда $f \in M_p(\mathbb{R})$. Этот результат, принадлежащий Шёгрёну и Шёлину [7], является обобщением хорошо известной теоремы Михлина–Хёрмандера.

Заметим теперь, что условие (3) влечет за собой существование константы $c = c(\Omega_F) > 0$, такой, что если $e^{it} \in \partial D \setminus F$, то окружность с центром в e^{it} и радиусом $r(t) = c \cdot \text{dist}(e^{it}, F)$ целиком содержится в Ω_F . Обозначим эту окружность через $\gamma(t)$. Пусть $m \in H^\infty(\Omega_F)$. Рассмотрим произвольную дугу J , дополнительную к F . Пусть $e^{it} \in J$. Рассмотрим соответствующую окружность $\gamma(t)$. Для произвольной точки z , лежащей внутри окружности $\gamma(t)$, имеем

$$m'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(t)} \frac{m(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

В частности

$$m'(e^{it}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(t)} \frac{m(\zeta)}{(\zeta - e^{it})^2} d\zeta.$$

Отсюда для производной $(m^*)'$ граничной функции $m^*(t) = m(e^{it})$ получаем

$$\begin{aligned} |(m^*)'(t)| &= |ie^{it}m'(e^{it})| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(t)} \frac{m(\zeta)}{(\zeta - e^{it})^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(t)} \frac{|m(\zeta)|}{|\zeta - e^{it}|^2} |d\zeta| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r(t) \|m\|_{H^\infty(\Omega_F)} \frac{1}{(r(t))^2} = c_1(\Omega_F) \|m\|_{H^\infty(\Omega_F)} \frac{1}{\text{dist}(e^{it}, F)}. \quad (5) \end{aligned}$$

Пусть $E \subseteq [0, 2\pi]$ — множество, такое, что $F = \{e^{it}, t \in E\}$ и E обладает свойством LP(p). Не ограничивая общности, можем считать, что E содержит точки 0 и 2π . Определим функцию f на прямой \mathbb{R} , полагая $f(t) = 1_{[0, 2\pi]}(t)m^*(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Мы видим (см. (5)), что функция f удовлетворяет условию (4). Следовательно, по теореме Шёгрена–Шёлина, имеем $f \in M_p(\mathbb{R})$. Отсюда, пользуясь теоремой Джодета, получаем $m^* \in M_p(\mathbb{T})$. В силу связи между мультипликаторами на \mathbb{T} и мультипликаторами функций, аналитических в круге D , получаем, что $m \in M_p^+(D)$.

Замечание 2. Насколько известно автору, вопрос о существовании множеств, обладающих свойством LP(p) при каком-то p , $p \neq 2$, и не обладающих свойством LP, открыт.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. А. Виноградов, ДАН СССР, **254:6** (1980), 1301–1306. [2] С. А. Виноградов, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **39** (1974), 30–39. [3] Н. К. Никольский, Сиб. матем. ж., **7** (1966), 146–158. [4] И. Э. Вербицкий, Функци. анализ и его прил., **14:3** (1980), 67–68. [5] В. В. Лебедев, Функци. анализ и его прил., **32:4** (1998), 10–21. [6] V. V. Lebedev, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 113, 2000, 205–212. [7] P. Sjögren, P. Sjölin, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **31:1** (1981), 157–175. [8] K. Hare, I. Klemes, Trans. Amer. Math. Soc., **347:10** (1995), 4105–4127. [9] V. Lebedev, A. Olevskii, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **322** (1996), 143–147. [10] В. В. Лебедев, А. М. Олевский, Изв. РАН, сер. Матем., **70:3** (2006), 129–166. [11] K. de Leew, Ann. Math., **81** (1965), 364–379. [12] M. Jodeit, Studia Math., **34** (1970), 215–226.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Московский институт электроники и математики
e-mail: lebedevhome@gmail.com

Поступило в редакцию
22 марта 2013 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 24.07.2014. Дата выхода в свет 20.08.2014. Формат 70×100/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,4 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 172 экз. Заказ 374.

Учредители: Российская академия наук, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90

Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6