



Общероссийский математический портал

Р. Н. Карасёв, О трансверсалиях семейств транслятов двумерного выпуклого компакта, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1998, том 252, 67–77

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.238.202.29

10 ноября 2024 г., 18:15:02



Р. Н. Карасёв

О ТРАНСВЕРСАЛЯХ СЕМЕЙСТВ ТРАНСЛЯТОВ ДВУМЕРНОГО ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

В известном обзоре [1] (см. [2, 3], а также [4], гл. 2.1, стр.407, гипотеза 6.2), Грюнбаумом была поставлена следующая задача: существует ли для семейства транслятов выпуклого компакта на двумерной плоскости, в котором любые два множества пересекаются, *3-трансверсаль*, то есть такие три точки, что каждое множество семейства содержит хоть одну из них. В литературе приведены частичные решения в случае евклидовых кругов [5, 6], треугольников [7], центрально-симметричных множеств [8] или множеств постоянной ширины [9]. В настоящей работе дается полное решение этой задачи (результат анонсирован в [13]):

Теорема 1. *Для любого семейства $F = \{K + x : x \in X\}$ транслятов выпуклого компакта K в \mathbb{R}^2 , в котором любые два множества пересекаются, существует 3-трансверсаль.*

В [4] содержится также информация по поводу аналогичных утверждений в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, а именно: об оценке порядка трансверсали семейства транслятов выпуклого компакта, в котором любые два множества семейства пересекаются. Далее из формулировки теоремы 2 будет видно, что эта задача аналогична вопросу о разрезании фигур на меньшие части (задача Борсука), а также задаче о покрытии фигуры ее уменьшенными копиями (задача Хадвигера).

Сначала переформулируем утверждение теоремы 1. Для двух множеств A и B положим $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$.

Теорема 2. *Если $X - X \subseteq K - K$ для множества $X \in \mathbb{R}^2$ и выпуклого компакта K , то X можно покрыть тремя транслятами компакта $-K$.*

Так как $K - K$ — центрально-симметрично, то условие $X - X \subseteq K - K$ не меняется при замене K на $-K$, так что далее, при

При работе над данной статьей авторы Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 96-01-01054.

доказательстве теоремы 2, мы будем устанавливать покрытие X тремя транслятами K .

Лемма 1. *Теоремы 1 и 2 эквивалентны.*

Доказательство. Покажем, что теорема 1 следует из теоремы 2. Так как $K + x_1 \cap K + x_2 \neq \emptyset$, для любых $x_1, x_2 \in X$ найдется такая точка p , что $p = x_1 + y_1$ и $p = x_2 + y_2$, где $y_1, y_2 \in K$ или, иначе $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$, что и означает $X - X \subseteq K - K$.

По теореме 2 существуют такие точки x_1, x_2, x_3 , что для любой точки $x \in X$ найдется такое $i = 1, 2, 3$ и $y \in K$, что $x = x_i - y$ или, иначе говоря, для $x_i \in x + K$, что и требуется в теореме 1.

В обратную сторону утверждение доказывается теми же рассуждениями в обратном порядке.

Определение. Для ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ шириной $w(X, K, \epsilon)$ в направлении $\epsilon \in S^{n-1}$ (S^{n-1} – единичная сфера) относительно выпуклого компакта K будем называть отношение расстояний между параллельными опорными гиперплоскостями к X и K , с направляющим вектором ϵ . Выпуклый компакт X будем называть телом постоянной ширины относительно K , если $w(X, K, \epsilon) = \text{const}$. Очевидно, что $w(X, K, \epsilon) = 2w(X, K - K, \epsilon)$, $w(X - X, K, \epsilon) = 2w(X, K, \epsilon)$, $w(X, K, \epsilon) = w(X - X, K - K, \epsilon)$ и что $w(X, K, \epsilon)$ равно расстоянию между параллельными опорными гиперплоскостями X и K , с направляющим вектором ϵ , в банаховой метрике $d_B(x, y)$, задаваемой единичным шаром $B_1 = K - K$.

Простая лемма 2 объясняет геометрический смысл включения $X - X \subseteq K - K$.

Лемма 2. *Следующие утверждения равносильны:*

- (1) $X - X \subseteq K - K$.
- (2) X имеет диаметр $\text{diam } X \leq 1$, в метрике $d_B(x, y)$, $B_1 = K - K$.
- (3) $w(X, K, \epsilon) \leq 1$.

Доказательство. (1) \Leftrightarrow (2). Очевидно.

(2) \Rightarrow (3). Имеем, $w(X, K, \epsilon) = w(X - X, K - K, \epsilon)$ и так как $X - X \subseteq K - K$, то $w(X, K, \epsilon) = w(X - X, K - K, \epsilon) \leq 1$.

(3) \Rightarrow (1). Так как $w(X, K, \epsilon) = w(X - X, K - K, \epsilon) \leq 1$. Множества $K - K$ и $X - X$ центрально-симметричны с центром в 0, а $K - K$ – выпукло и поэтому является пересечением центрально симметричных полос с центром в 0. Так как $w(X, K, \epsilon) =$

$w(X - X, K - K, \epsilon) \leq 1$, то выпуклая оболочка $\text{conv}(X - X) \subseteq K - K$ и $X - X \subseteq K - K$.

Из леммы 2 следует, что множество X в теореме 2 можно считать выпуклым, так как условие (3) леммы 2 не меняется при замене X на $\text{conv } X$.

Лемма 3. *Если B двумерное банахово пространство с единичным шаром B_1 , множество $X \subset B$, $\text{diam } X \leq 1$, то существует такое F , что $X \subseteq F$ и $w(F, B_1, \epsilon) = 1/2$ для всех $\epsilon \in S^1$.*

Замечание. Лемма 3 является известным утверждением, однако оказалось затруднительно найти место, где приведено доказательство. Приведем ее доказательство, совершенно аналогичное доказательству теоремы о том, что множество диаметра 1 в евклидовом пространстве можно поместить в тело постоянной ширины 1 (см. [10], п. 64, а также [11, 12]).

Ясно, что множества в лемме 3 можно считать выпуклыми компактами, так как переход к замыканию выпуклой оболочки не меняет диаметров и ширин множеств. Теперь лемма 3 может быть выведена из следующей леммы 4 с использованием леммы Порна, но мы обойдемся без последней (как это сделано в [8], при доказательстве частного случая леммы 3).

Лемма 4. *Если $X \subset B$ – такое замкнутое выпуклое множество в двумерном банаховом пространстве B , что $\text{diam } X \leq 1$ и $w(X, B_1, \epsilon) < 1/2$ для некоторого $\epsilon \in S^1$, то X можно заключить в такое X_0 , $X \neq X_0$, что $\text{diam } X_0 \leq 1$.*

Доказательство леммы 4. Пусть ϵ такое, что $w(X, B_1, \epsilon) < 1/2$. Предположим противное, что $w(X \cup \{p\}, B_1, \epsilon_0) > 1/2$ для любой точки $p \in B$ и некоторого ϵ_0 – то есть существуют две опорные прямые к $\text{conv}(X \cup \{p\})$ с направляющим вектором ϵ_0 с расстоянием между ними > 1 . Так как $\text{diam } X \leq 1$, то $w(X, B_1, \epsilon) \leq 1/2$ для всех ϵ . Поэтому эти две прямые не могут быть опорными к X – то есть одна из них проходит через p .

Итак, пусть $w(X, B_1, \epsilon_0) = 1/2 - \epsilon$, $\epsilon > 0$ для некоторого ϵ_0 . Так как ширина $w(X, B_1, \epsilon)$ зависит от $\epsilon \in S^1$ непрерывно, то существуют такие ϵ_1 и ϵ_2 – ближайшие к ϵ_0 против и по часовой стрелке, что $w(X, B_1, \epsilon_0) = w(X, B_1, \epsilon_0) = 1/2 - \epsilon/2$. В самом деле, тогда $\text{diam } X \leq 1 - \epsilon$, и если взять такую точку $p \notin X$, что $d_B(p, X) \leq \epsilon$, то $\text{diam } X \cup \{p\} = 2w(X \cup \{p\}, B_1, \epsilon_0) \leq 1$. Противоречие.

Возьмем опорные к X прямые в направлениях e_1 и e_2 и пусть P – параллелограмм, ими образованный. Пусть опорные прямые к P в направлении e пересекают его в вершинах p_1 и p_2 . Докажем, что $w(P, B_1, e_0) > 1/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Предположим противное и рассмотрим параллелограмм P' , образованный опорными прямыми к B_1 в направлениях e_1 и e_2 . Очевидно, что P' подобен P с коэффициентом $1/(1 - \varepsilon/2)$, следовательно

$$w(P', B_1, e_0) \leq \frac{1/2 - \varepsilon}{1/2 - \varepsilon/2} < 1.$$

Но это невозможно, так как P' содержит B_1 .

Отсюда следует, что либо $p_1 \notin X$, либо $p_2 \notin X$. Пусть это, например, p_1 . Уголок параллелограмма около p_1 не принадлежит X , и в нем можно взять такую точку p , что $d_B(p, X) = \varepsilon/2$.

Докажем, что множество $w(X \cup \{p\}, B_1, e) \leq 1/2$ для всех $e \in S^1$. Предположим противное, что $w(X \cup \{p\}, B_1, e) \leq 1/2$ для некоторого $e \in S^1$. Так как одна из опорных к $X \cup \{p\}$ прямых в направлении e проходит через p , то легко видеть (см. рис. 1), что вектор e лежит между e_1 и e_2 на той же дуге, что и e_0 , а для всех e на этой дуге $w(X, B_1, e) \leq 1/2 - \varepsilon$ там ширина X не больше $1 - \varepsilon/2$, но расстояние от p до X не больше $\varepsilon/2$, то есть ширина $X \cup \{p\}$ в этом направлении не более $1 - \varepsilon/2$ – значит $X \cup \{p\}$ все таки подходит.

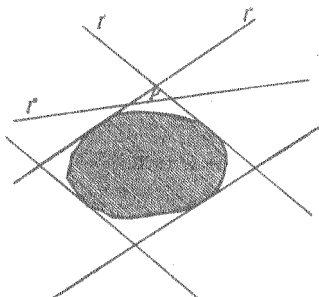


Рис. 1.

Доказательство леммы 3. Пусть X – множество в формулировке леммы. Определим последовательность выпуклых компактов

$\{X_n\}_{n \geq 0}$. Пусть $X_0 = \overline{\text{conv } X}$, а считая определенным X_n определим X_{n+1} следующим образом: рассмотрим все выпуклые компактные множества диаметра, не большего единицы, содержащие X_n , так как их площадь ограничена сверху (например, площадью единичного круга), то среди этих множеств найдется некоторое множество – обозначим его X_{n+1} – такое, что выпуклое множество, содержащее X_n , имеет площадь, превышающую площадь X_{n+1} не более чем на 10^{-n} . Пусть $X = \overline{\bigcup X_n}$, тогда X имеет диаметр, не больший 1. Докажем, что ширина X в любом направлении равна 1. В противном случае по лемме 3 нашлось бы выпуклое и компактное множество X' диаметра, не большего 1, такое, что $X \subset X'$, а, значит, нашлось бы некоторое n такое, что разность между площадями X и X' больше 10^{-n} , но существование такого X' противоречит определению X_{n+1} . Значит, ширина X в любом направлении действительно равна 1.

Таким образом, теперь теорема 2 с помощью леммы 3 может быть выведена из своего частного случая:

Теорема 3. Если $X, K \subset \mathbb{R}^2$ выпуклые компакты и $X - X = K - K$, то X можно покрыть тремя транслятами компакта K .

Замечание. Условие $X - X = K - K$ равносильно тому, что X и K имеют одинаковую ширину в любом направлении (см. лемму 2).

Теперь сформулируем лемму, которая будет играть основную роль в доказательстве теоремы 3:

Лемма 5. Пусть $\Delta A_1 B_1 C_1$ составлен из середин сторон ΔABC . Если прямая l не пересекает $\Delta A_1 B_1 C_1$, то l образует с некоторыми двумя сторонами треугольника ABC треугольник площади, большей, чем площадь треугольника ABC .

Доказательство леммы 5. Достаточно рассмотреть два существенно различных случая (см. рис. 2 и 3):

1) Прямая l не пересекает ΔABC и точка A наиболее удалена от l . Тогда, очевидно, l образует с прямыми AB и AC треугольник большей площади, чем $S_{\Delta ABC}$.

2) Прямая l пересекает стороны AB и AC и луч BC в точках F, E и D , соответственно. Тогда из условия леммы следует, что $AE < EC$. Легко видеть, что симметричный ΔDEC относительно точки E треугольник содержит ΔAFE , а, следовательно, $S_{\Delta AFE} < S_{\Delta DEC}$. Значит, $S_{\Delta BFD} > S_{\Delta ABC}$.

Остальные случаи сводятся к этим переобозначением вершин треугольника. Для удобства изложения введем некоторые обозначения (см. рис. 4).

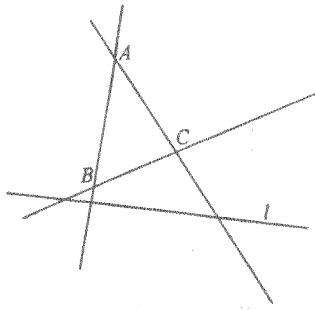


Рис. 2.

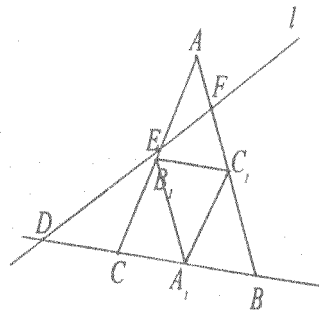


Рис. 3

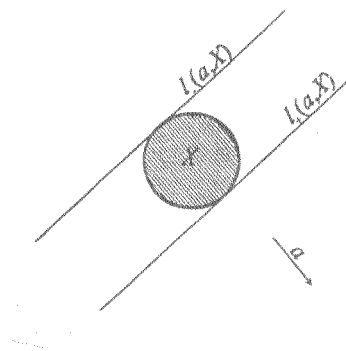


Рис. 4.

Пусть a – вектор на плоскости, а X – некоторый выпуклый компакт. Тогда пусть $l_+(a, X)$ и $l_-(a, X)$ – опорные прямые к X , перпендикулярные a , причем такие, что $(a, (l_+(a, X) - l_-(a, X))) > 0$ (внешние скобки обозначают скалярное произведение в \mathbb{R}^2), то есть l_+ лежит от начала 0 дальше чем l_- , если смотреть вдоль a . За $m(a, X)$ обозначим прямую, делящую пополам ширину X в направлении, перпендикулярном a , иначе говоря, $m(a, X) =$

$(l_+(a, X) + l_-(a, X))/2$. Заметим, что сумма или разность двух параллельных прямых – прямая, параллельная им обоим (в смысле $l_1 - l_2 = \{x - X : x \in l_1, X \in l_2\}$).

Доказательство теоремы 3. Сначала мы построим явную конструкцию трех трансляций K , а потом докажем, что получаемые трансляты покрывают X .

Для любого вектора $a \neq 0$ рассмотрим прямую $l(a) = l_+(a, X) - l_+(a, K)$. На самом деле имеют место равенства $l(a) = l_-(a, X) - l_-(a, K) = m(a, X - K)$, которые следуют из того, что множества X и K имеют равные ширины в направлении, перпендикулярном a (см. рис. 5).

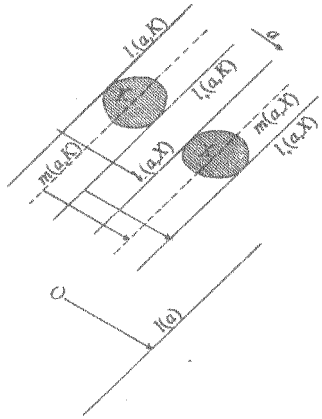


Рис. 5

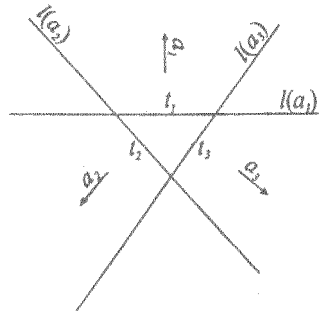


Рис. 6.

Последнее из этих равенств показывает, что при замене вектора a на противоположный $l(a)$ не меняется. Очевидно $l(a)$ – непрерывно зависит от a . Для трех векторов a_1, a_2 и a_3 обозначим площадь треугольника, образованного прямыми $l(a_1), l(a_2)$ и $l(a_3)$ как $S(a_1, a_2, a_3)$. Так как $m(a_1, X - K)$ и $m(a_2, X - K)$ пересекаются внутри $X - K$, то, очевидно, площадь треугольника, образованного $l(a_1), l(a_2)$ и $l(a_3)$ не превосходит величины $\frac{1}{2}D^2 \sin \varphi$, где φ – угол между $l(a_1)$ и $l(a_2)$, а D – диаметр $X - K$. Значит

$S(a_1, a_2, a_3)$ стремится к нулю, когда какие-то два из направлений $l(a_1)$, $l(a_2)$, $l(a_3)$ стремятся друг к другу, поэтому ее можно считать непрерывной функцией направлений a_1 , a_2 и a_3 . При нормировке $\|a_i\| = 1$ площадь S становится функцией на компакте $S^1 \times S^1 \times S^1$ и при некоторых a_1 , a_2 и a_3 достигает максимума. Если максимум равен нулю, то это означает, что все $l(a_i)$ пересекаются в одной точке t . Тогда $K+t$ покрывает X , так как опорные прямые к ним в любом направлении совпадают ($t \in l_+(a, X) - l_+(a, K) \Rightarrow 0 \in l_+(a, K+t) - l_+(a, X) \Rightarrow l_+(a, K+t) = l_+(a, X)$), и утверждение теоремы верно. Иначе пусть t_1 , t_2 и t_3 — середины соответствующих сторон треугольника со сторонами на прямых $l(a_1)$, $l(a_2)$ и $l(a_3)$. В качестве искомого трансляции возьмем $K_i = K + t_i$.

Заменой знаков к a_i можно добиться того, что $(a_i, t_i - t_i) > 0$ ($i \neq j$), что и будет в дальнейшем подразумеваться (см. рис. 6).

Возьмем на границе K точки y_i , принадлежащие $l_-(a_i, K)$. Докажем, что $y_i + t_i - t_j$ лежит в K (это будет означать, что $y_i + t_i \in K_j$, $i, j = 1, 2, 3$, см. рис. 7).

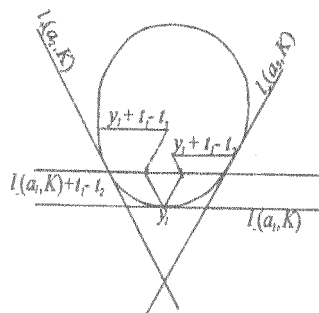


Рис. 7.

Докажем это, например, для $y_1 + t_1 - t_2$ и $y_1 + t_1 - t_3$, так как ситуация не меняется при выборе разных $i = 1, 2, 3$. В таком случае это будет следовать из того, что $l_+(a_2, K)$ или $l_+(a_3, K)$ не может пересекать K строго между $l_-(a_1, K)$ и $l_-(a_1, K) + t_1 - t_2 = l_-(a_1, K) + t_1 - t_3$ (последняя прямая содержит точки $y_1 + t_1 - t_2$ и $y_1 + t_1 - t_3$ — см. рис. 7) — в этом случае выпуклая оболочка точек касания $l_+(a_2, K)$ и $l_+(a_3, K)$ и точки y_1 содержит y_1 , $y_1 + t_1 - t_2$

и $y_1 + t_1 - t_3$ и сама содержится в K . Без ограничения общности докажем для одной прямой, что $l_+(a_3, K)$ не может касаться K строго между $l_-(a_1, K)$ и $(l_-(a_1, K) + t_1 - t_2)$. Сдвинем все на вектор t_2 и будем рассматривать K_2 вместо K . Тогда нам нужно доказать, что $l_+(a_3, K_2)$ не касается K_2 строго между $l_-(a_1, K_2)$ и $l_-(a_1, K_2) + t_1 - t_2 = l_-(a_1, K) + t_1 = l_-(a_1, X)$ (последнее равенство следует из того, что $t_1 \in l(a_1) = l_-(a_1, X) - l_-(a_1, K)$). Предположим противное и возьмем направление a , немного отличающееся от a_3 в сторону вращения к a_1 — тогда при достаточно малом отличии от a_3 прямые $l_+(a_3, K)$ и $l_+(a, K_2)$ будут пересекаться между $l_-(a_1, K_2)$ и $l_-(a_1, X)$ (см. рис. 8 — $l_+(a_3, K_2)$ касается K_2 строго между $l_-(a_1, K_2)$ и $l_-(a_1, X)$).

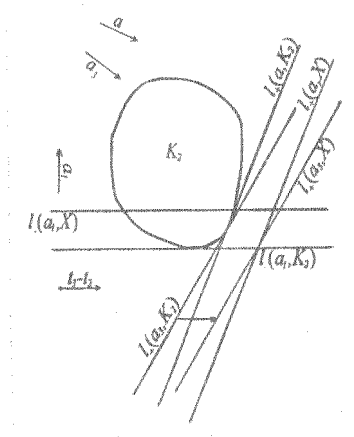


Рис. 8.

Но посмотрим теперь на прямые $l_+(a_3, X)$ и $l_+(a, X)$. Прямая $l_+(a_3, X)$ отличается от $l_+(a_3, K_2)$ сдвигом на вектор $t_3 - t_2$ в сторону a_3 (так как $t_3 \in l_+(a_3, X) - l_+(a_3, K_2)$, то есть $t_3 - t_2 \in l_+(a_3, X) - l_+(a_3, K_2)$). По лемме 5 прямая $l(a)$ пересекает треугольник из t_1 , t_2 и t_3 , а, в данном случае, обязана пересекать отрезок между t_2 и t_3 . Так как $l(a) = l_+(a, X) - l_+(a, K) = l_+(a, X) - l_+(a, K_2) + t_2$, то прямая $l_+(a, X)$ отличается от прямой $l_+(a, K_2)$ сдвигом на вектор, меньший $t_3 - t_2$, в сторону a_3 , а это означает, что $l_+(a_3, X)$ и $l_+(a, X)$ пересекаются по другую сторону от прямой $l_-(a_1, X)$ по сравнению с X также, как и пря-

мые $l_+(a_3, K_2)$ и $l_+(a, K_2)$ (см. рис. 8). Из рисунка 8 также видно, что при таком расположении все три прямые $l_+(a, X)$, $l_+(a_3, X)$ и $l_-(a_1, X)$ не могут быть опорными для X — противоречие.

Итак, по доказанному точки $y_i + t_i$ принадлежат всем K_j . Предположим, что K_j не покрывают X . Пусть $C = \text{conv} \bigcup_{i=1,2,3} K_i$. Докажем, что $X \subseteq C$. Рассмотрим прямую, перпендикулярную некоторому направлению a , отделяющую какие-то точки X от C , получим противоречие с леммой 5, так как в этом случае выходит, что прямые $l_+(a, X) - l_+(a, K_i)$ лежат по одну сторону от начала координат, то есть все три точки t_i лежат по одну сторону от $l(a)$ — противоречие с леммой 5.

А так как $y_i + t_i$ принадлежат всем K_j , то C отличается от $\bigcup_{i=1,2,3} K_i$ на объединение множеств, лежащих внутри треугольников T_i , натянутых на точки $y_i + t_j$ ($j = 1, 2, 3$, см. рис. 9).

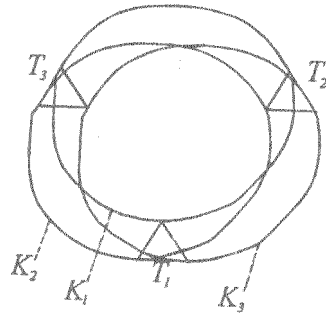


Рис. 9.

Но ΔT_i лежит по другую сторону от $l_-(a_i, X)$ по сравнению с X и, поэтому, не мешает $\bigcup_{i=1,2,3} K_i$ покрывать X .

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, *Helly's theorem and its relatives*. Convexity, Proc. of Symposia in Pure Math., Am. Math. Soc., Providence, RI, **7**, 101–180 (1963).
2. Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применение*. Мир, М. (1968).
3. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел*. Наука, М. (1971).

4. J. Eckhoff, *Helly, Radon and Carathéodory type theorems*. Handbook of Convex Geometry, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills. Amsterdam, North-Holland (1993).
5. H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, *Combinatorial geometry in the plane*. Holt, Rinehart and Winston, New York (1964).
6. Г. Хадвигер, Г. Дебруннер, *Комбинаторная геометрия на плоскости*. Наука, М. (1965).
7. G. D. Chakerian, S. K. Stein, *Some intersection properties of convex bodies*. — Proc. Am. Math. Soc. **18** (1967), 109–112.
8. B. Grünbaum, *On intersection of similar sets*. — Portugal Math. **18** (1959), 155–164.
9. G. D. Chakerian, G. T. Sallee, *An intersection theorem for sets of constant width*. — Duke Math. J. **36** (1969), 165–170.
10. T. Bonnesen, W. Fenchel, *Theorie der convexen Körper*. Berlin (1934).
11. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, *Разбиение фигур на меньшие части*. Наука, М. (1971).
12. H. Maehara, *A remark on certain completion of a convex set*. — Math. Jap. **1** (1991), 47–49.
13. Р. Н. Карасев, *О трансверселях семейства трансляций двумерного выпуклого компакта*. Соврем. пробл. мат. и информат. Ярославский гос. ун-т (1997), 19–21.

Karasev R. N. On transversals of the family of translates of two-dimensional convex compact.

The following theorem gives an affirmative answer to Grünbaum's old equisition. Let \mathcal{K} be the family of translates of a convex compact set $K \subset \mathbb{R}^2$. If every two elements of \mathcal{K} have a common point, then there exist three points $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ such that every element of \mathcal{K} contains some of these points.