

УДК 517.5:516.6

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМА НАИЛУЧШЕГО СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

© 1995 г. В. Ф. Кравченко, В. Д. Нагорный, член-корреспондент РАН В. И. Пустовойт

Поступило 30.01.95 г.

1. Пусть \mathfrak{R} – пространство вещественнозначных функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$. Зададим в \mathfrak{R} скалярное произведение в виде

$$(u(x), v(x)) = \int_a^b u(x)v(x)d\sigma(x), \quad (1)$$

где $\sigma(x)$ – некоторая фиксированная функция ограниченной вариации, интеграл берется в смысле Лебега–Стилтьеса. Рассмотрим задачу аппроксимации функции $f \in \mathfrak{R}$ полиномом на отрезке $[a, b]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} x^k + \varepsilon(x), \quad (2)$$

где $\varepsilon(x)$ – ошибка аппроксимации. Тогда если коэффициенты полинома (2) определяются из условия минимума скалярного квадрата ошибки $b_{n,k}$: $(\varepsilon(x), \varepsilon(x)) \rightarrow \min, k = 0, \dots, n$, то такая задача является построением полинома наилучшего среднеквадратичного приближения функции. Известны [1, 2] два способа отыскания коэффициентов $b_{n,k}$: решением системы нормальных уравнений и разложением $f(x)$ по системе многочленов, ортогональных в смысле скалярного произведения (1). В данной работе показано, что коэффициенты $b_{n,k}$ могут быть представлены как средневзвешенные значения производных функции $f(x)$, порядком не превышающих k :

$$b_{n,k} = \int_a^b f^{(m)}(x) \omega_{n,k}(x) dx, \quad m \leq k, \quad (3)$$

и определен вид весовых функций $\omega_{n,k}(x)$.

2. Система нормальных уравнений для определения коэффициентов $b_{n,k}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} (x^0, x^0) & (x^0, x^1) & \dots & (x^0, x^n) \\ (x^1, x^0) & (x^1, x^1) & \dots & (x^1, x^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x^n, x^0) & (x^n, x^1) & \dots & (x^n, x^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n,0} \\ b_{n,1} \\ \vdots \\ b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x^0, f(x)) \\ (x^1, f(x)) \\ \vdots \\ (x^n, f(x)) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Набор формул для определения коэффициентов $b_{n,k}$ из системы (4) по теореме Крамера будем рассматривать как вектор функционалов $\mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}(x, f(x))$, ставящий в соответствие функции $f(x)$ вектор коэффициентов полинома ее наилучшего среднеквадратичного приближения. В явном виде

$$b_{n,k} = \mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}(x, f(x)) = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} (x^0, x^0) \dots (x^0, x^{k-1}) & (x^0, f(x)) & (x^0, x^{k+1}) \dots (x^0, x^n) \\ (x^1, x^0) \dots (x^1, x^{k-1}) & (x^1, f(x)) & (x^1, x^{k+1}) \dots (x^1, x^n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x^n, x^0) \dots (x^n, x^{k-1}) & (x^n, f(x)) & (x^n, x^{k+1}) \dots (x^n, x^n) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где Δ – определитель матрицы скалярных произведений (определитель Грама) из (4).

СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ $\mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}$

Свойство 1. $\mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}(x, f(x))$ линейны относительно $f(x)$:

$$\mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}\left(x, \sum_i \alpha_i f_i(x)\right) = \sum_i \alpha_i \mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}(x, f_i(x)), \quad (6)$$

где α_i – некоторые константы. Оно вытекает из общих свойств (см. [4]) определителей.

Свойство 2. Для $f(x) = x^m, m \in 0, \dots, n$, выполняется

$$\mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}(x, x^m) = \delta_{km} = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases} \quad (7)$$

Это справедливо, ибо при $k \neq m$ определитель из (5) становится равным нулю, так как в нем появляются равные столбцы, а при $k = m$ он совпадает с определителем Грама.

Свойство 3. Коммутативность относительно операций интегрирования и дифференцирования.

$$\mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}\left(x, \frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d}{dx}\mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}(x, f(x)), \quad (8)$$

$$\mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}\left(x, \int f(x)dx\right) = \int \mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}(x, f(x))dx.$$

Это следует из свойств [4] функциональных определителей.

Свойство 4. Для ошибки аппроксимации $\varepsilon(x)$ справедливо

$$\mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}(x, \varepsilon(x)) = 0. \quad (9)$$

Это следует из теоремы об ортогональности ошибки аппроксимации $\varepsilon(t)$ ко всем компонентам базиса пространства, которому принадлежит аппроксимирующая функция [1, 2], а также из общих свойств определителей [4].

3. Известны [3] обобщенные функции Дирака и Хевисайда. Первая из них, $\delta(x)$, равна нулю везде, кроме нуля, бесконечности в нуле и имеет единичную площадь. Известно свойство $\delta(x)$:

$$\int_a^b f(y)\delta(y-x)dy = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (10)$$

Функция Хевисайда $u(x)$ есть первый интеграл от функции Дирака:

$$u(x) = \int_0^x \delta(x)dx.$$

Для $u(x)$ имеем

$$\int_a^b f(y)u(y-x)dy = f(b) - f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (11)$$

Введем обобщенные функции, являющиеся интегралами последующих порядков от $\delta(x)$. Обозначим:

$$u_p(x) = \int_0^x \dots \int_0^x u(x) (dx)^p. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что

$$u_p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^p}{p!}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Свойство $u_p(x)$. Для $u_p(x)$ выполняется

$$\begin{aligned} & \int_a^b f^{(p)}(y)u_{p-1}(y-x)dy = \\ & = \sum_{m=1}^{p-1} (-1)^{p+m+1} (b-x)^m \frac{f^{(m)}(b)}{m!} + \\ & + (-1)^{p+1} (f(b) - f(x)), \end{aligned} \quad (14)$$

$p \geq 0, \quad x \in [a, b].$

В рамках введенных обозначений (12) следует условно полагать, что $\delta(x) = u_{-1}(x)$. Выражением для $\delta(x)$, аналогичным (14), является (10). Имеет место следующая

4. Теорема. Пусть для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существует полином наилучшей среднеквадратичной аппроксимации. Тогда коэффициенты этого полинома могут быть найдены в виде (3) как средневзвешенные на $[a, b]$ значения производных функции $f(x)$. При этом весовые функции ${}_m\omega_{n,k}(x)$ определяются в виде

$${}_m\omega_{n,k}(x) = (-1)^m \mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(y)}(y, u_{m-1}(x-y)). \quad (15)$$

Для доказательства теоремы необходимо p раз, $p \in 0, \dots, n$, продифференцировать, а затем проинтегрировать с весом ${}_m\omega_{n,k}(x)$ обе части равенства (2). Дальше можно реализовать две схемы доказательства:

(а) используя свойства (6) - (8), (14) и определение $\mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}$, показать, что левая часть получившегося равенства есть $b_{n,p}$, если $p = k$;

(б) используя свойства (6) - (9), (14), показать, что в правой части получившегося равенства интеграл от $\varepsilon^{(p)}(x)$ и все множители при коэффициентах $b_{n,k}$ для $k \neq p$ равны нулю, а для $k = p$ множитель равен 1.

СВОЙСТВА ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ${}_m\omega_{n,k}(x)$

Свойство 1. Для ${}_m\omega_{n,k}(x)$ выполняется равенство

$$k! \int_a^b {}_m\omega_{n,k}(x) dx = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m < k. \end{cases} \quad (16)$$

Оно справедливо в силу соотношений (8), (15), (7).

Свойство 2. Для ${}_m\omega_{n,k}(x)$ выполняется равенство

$${}_{m-1}\omega_{n,k}(x) = -\frac{d}{dx} {}_m\omega_{n,k}(x). \quad (17)$$

Это свойство позволяет свести задачу определения всего множества весовых функций к определению весовых функций вида ${}_k\omega_{n,k}(x)$.

5. Рассмотрим следующий пример. Пусть $\sigma(t)$ — неубывающая кусочно-постоянная функция, имеющая на отрезке $[0, T]$ N скачков величиной $1/N$ в точках t_i . Тогда скалярное произведение (1) примет вид

$$(u(t), v(t)) = N^{-1} \sum_{i=1}^N u(t_i)v(t_i). \quad (18)$$

Имеет место задача среднеквадратичной аппроксимации функции на дискретной сетке. В этом случае

$$\int_a^b y^k u_{k-1}(t-y) d\sigma(y) = N^{-1} \sum_{i=1}^N t_i^k u_{k-1}(t-t_i). \quad (19)$$

На рис. 1 представлены полученные на основе формулы (15) семейства весовых функций при аппроксимации квадратичной параболы ($n \doteq 2$) для различного числа равномерно расположенных узлов. При $N \rightarrow \infty$ имеем случай непрерывной аппроксимации. При этом весовые функции представляются полиномами порядка $n+k$:

$$\begin{aligned} {}_0\omega_{2,0}(t) &= 30\frac{t^2}{T^3} - 36\frac{t}{T^2} + \frac{9}{T}, \\ {}_1\omega_{2,1}(t) &= 60\frac{t^3}{T^4} - 96\frac{t^2}{T^3} + 36\frac{t}{T}, \\ {}_2\omega_{2,2}(t) &= 15\frac{t^4}{T^5} - 30\frac{t^3}{T^4} + 15\frac{t^2}{T^3}. \end{aligned} \quad (20)$$

6. Следует заметить, что на практике функция $\sigma(x)$ в скалярном произведении (1) чаще всего является либо непрерывной, либо кусочно-постоянной. Если при этом в первом случае $\sigma(x)$ отлична от x либо во втором случае скачки отличны от единичных, то в определении скалярного произ-

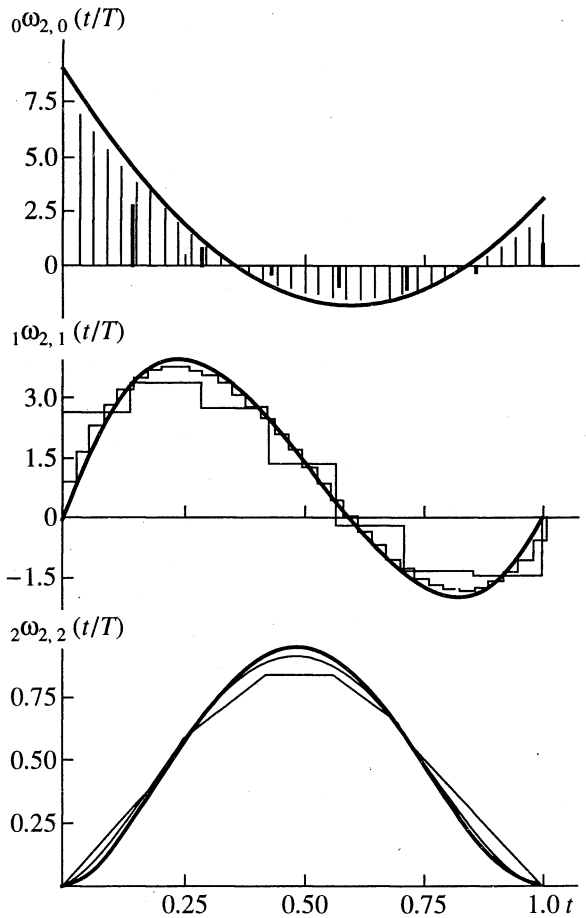


Рис. 1. Семейства весовых функций ${}_k\omega_{2,k}$ для 8, 35 и бесконечного (непрерывный случай) числа равномерно расположенных узлов аппроксимации. Семейство ${}_0\omega_{2,0}$ при $N < \infty$ является последовательностью δ -функций, изображенных вертикальными отрезками, высота которых есть увеличенная в N раз площадь соответствующих δ -функций.

ведения под знаком интеграла или суммы появляется дополнительный множитель ρ , зависящий от x :

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)\rho(x)dx \quad (21)$$

или

$$(u, v) = \sum_{i=1}^N u(x_i)v(x_i)\rho(x_i). \quad (22)$$

Этот множитель также называют весовой функцией. Однако эту функцию не следует путать с весовой функцией ${}_m\omega_{n,k}$.

Отметим физический смысл функций ${}_m\omega_{n,k}(x)$. Легко увидеть, что уравнение (3) с учетом (15) имеет тип свертки [5]. Из сопоставления (3) и (15) следует, что ${}_m\omega_{n,k}(x)$ можно рассматривать как

импульсную переходную функцию линейной системы с входным сигналом $f^{(m)}(x)$, выходным сигналом и $b_{n,k}$ и системным оператором $\mathcal{B}_{n,k}^{\sigma(x)}$. Такая интерпретация позволяет, в частности, по-новому подойти к построению теории цифровых измерителей параметров движения [6, 7].

7. Таким образом, в работе предложен и обоснован новый метод представления коэффициентов полинома наилучшего среднеквадратичного приближения функции. Данный подход может быть использован при решении широкого класса задач теории аппроксимации, математического моделирования, обработки наблюдений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
2. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 688 с.
3. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958. 306 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 522 с.
5. Siebert W.M. Circuits, Signals and Systems. The MIT Press, 1986.
6. Занимонский Е.М., Нагорный В.Д. // Измерительная техника. 1992. № 3. С. 34 - 36.
7. Нагорный В.Д. Обработка данных в баллистическом гравиметре. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ОИФЗ РАН, 1993. 121 с.