



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. Yu. Smol'kin, M. O. Snegur, A numerical research of a proper wave spectrum of an anisotropic dielectric waveguide,  
*University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*, 2018, Issue 1, 72–82

<https://www.mathnet.ru/eng/ivpnz168>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

May 18, 2025, 01:04:20



## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН АНИЗОТРОПНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА<sup>1</sup>

### Аннотация.

*Актуальность и цели.* Цель работы – исследование спектра задачи о распространяющихся электромагнитных волнах анизотропного диэлектрического волновода с круговым сечением.

*Материалы и методы.* Для определения решения использована вариационная формулировка задачи. Физическая задача сводится к решению задачи на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нахождения численного решения задачи применяется метод Галеркина с использованием финитных кусочно-линейных базисных функций.

*Результаты.* Разработан и реализован численный метод решения задачи распространения нормальных волн анизотропного диэлектрического волновода с круговым сечением, проведен ряд численных экспериментов.

*Вывод.* Предложенный численный метод является эффективным способом нахождения приближенного решения задачи распространения электромагнитных волн.

**Ключевые слова:** задача распространения электромагнитных волн, анизотропный диэлектрический волновод с круговым сечением, уравнение Максвелла, дифференциальные уравнения, вариационная формулировка, пространства Соболева, метод Галеркина.

Е. Ю. Smol'kin, М. О. Snegur

## A NUMERICAL RESEARCH OF A PROPER WAVE SPECTRUM OF AN ANISOTROPIC DIELECTRIC WAVEGUIDE

### Abstract.

*Background.* The aim of this work is to study the spectrum of the problem of propagating electromagnetic waves of an anisotropic dielectric waveguide with a circular cross section.

*Materials and methods.* To determine the solution, we use the variational formulation of the problem. The physical problem is reduced to solving the eigenvalue problem for a system of ordinary differential equations. To find the numerical solution of the problem, we use the Galerkin method with the use of finite piecewise linear basis functions.

*Results.* A numerical method for solving the problem of propagation of normal waves of an anisotropic dielectric waveguide with a circular cross-section was developed and implemented; a number of numerical experiments were carried out.

---

<sup>1</sup> Работа написана при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ (госзадание № 1.894.2017/4.6).

*Conclusion.* The proposed numerical method is an effective way of finding an approximate solution to the problem of propagation of electromagnetic waves.

**Key words:** problem of propagation of electromagnetic waves, anisotropic dielectric waveguide with circular cross section, Maxwell's equation, differential equations, variational formulation, Sobolev spaces, Galerkin method.

### Введение

Анализ распространения волн в волноводах представляет собой важный класс векторных электромагнитных задач. Однако нередко требуются среды с необычными свойствами (или заданными свойствами), которые можно получить, используя анизотропные по составу среды. При исследовании процессов распространения волн в таких волноведущих структурах возникают краевые задачи на собственные значения. Для исследования спектральных свойств таких задач оказывается естественным и эффективным методом оператор-функций. После сведения исходной краевой задачи к изучению некоторой оператор-функции, можно использовать аппарат функционального анализа для исследования его спектральных свойств [1, 2].

Численные методы расчета параметров различных типов волноведущих структур описаны в монографиях и обзорных работах [3–5]. Однако следует сказать, что большинство методов, применяемых к однородным волноводам, не являются общими и их трудно реализовать и применять для конкретных анизотропных структур.

В этой работе численное исследование проблемы распространения волн в диэлектрических анизотропных волноводах проведено с помощью метода Галеркина с использованием финитных кусочно-линейных базисных функций [1, 6]. Предложенный численный метод является эффективным способом нахождения приближенного решения задачи распространения электромагнитных волн. Проведен ряд численных экспериментов.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  с цилиндрической системой координат  $O\rho\varphi z$ . Экранированный волновод с образующей, параллельной оси  $Oz$ , и круговым поперечным сечением радиуса  $r$  помещен в  $\mathbb{R}^3$ . На рис. 1 представлена геометрия задачи. Волновод неограниченно продолжается в направлении  $z$ .

Задача о нормальных волнах волноведущей структуры состоит в отыскании нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны [7], т.е. с зависимостью  $e^{im\varphi+i\gamma z}$  от координаты  $\varphi$  и  $z$ , вдоль которых структура регулярна:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = (E_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + E_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi + E_z(\rho)\mathbf{e}_z)e^{im\varphi+i\gamma z},$$

$$\mathbf{H} = (H_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + H_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi + H_z(\rho)\mathbf{e}_z)e^{im\varphi+i\gamma z}, \quad (2)$$

причем должны быть удовлетворены следующие условия: ограниченность энергии поля в любом конечном объеме волновода и обращение в нуль касательных составляющих электрического поля на поверхности идеального проводника

$$E_{\varphi}|_{\rho=r} = 0, \quad E_z|_{\rho=r} = 0, \quad (3)$$

здесь  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.

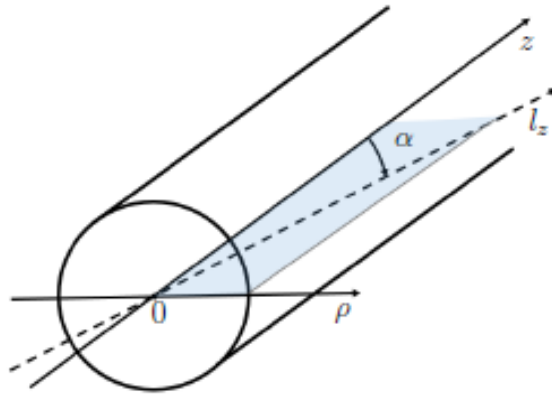


Рис. 1. Геометрия задачи. Оптическая ось  $l_z$  волновода лежит под углом  $\alpha$  к  $z$  в плоскости  $0\rho z$

Наиболее общий диэлектрический тензор  $\epsilon$  для анизотропной среды без потерь является симметричным и имеет шесть независимых элементов  $\epsilon_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Для простоты мы ограничимся рассмотрением случая, когда среда является одноосной, а оптическая ось  $l_z$  лежит в плоскости  $0\rho z$  под углом  $\alpha$  к  $z$ . Ссылаясь на эти оси, диэлектрический тензор примет вид

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где компоненты тензора определены следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_{\rho}, \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_{\rho} \cos^2 \alpha + \epsilon_z \sin^2 \alpha, \\ \epsilon_{33} &= \epsilon_{\rho} \sin^2 \alpha + \epsilon_z \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

$\epsilon_z$  и  $\epsilon_{\rho}$  – некоторые константы.

Задача о нормальных волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра

$\gamma$  – нормированной постоянной распространения (затухания) волноведущей структуры.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатном виде:

$$\begin{cases} i\frac{m}{\rho}H_z - i\gamma H_\varphi = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{11}E_\rho, \\ i\gamma H_\rho - H'_z = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{22}E_\varphi, \\ \frac{1}{\rho}(\rho H_\varphi)' - i\frac{m}{\rho}H_\rho = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{33}E_z, \\ i\frac{m}{\rho}E_z - i\gamma E_\varphi = i\omega\mu_0 H_\rho, \\ i\gamma E_\rho - E'_z = i\omega\mu_0 H_\varphi, \\ \frac{1}{\rho}(\rho E_\varphi)' - i\frac{m}{\rho}E_\rho = i\omega\mu_0 H_z, \end{cases} \quad (6)$$

и выразим функции  $E_\rho$ ,  $H_\rho$ ,  $E_\varphi$ ,  $H_\varphi$  через  $E_z$  и  $H_z$  из 1, 2, 4 и 5-го уравнений последней системы, получаем

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{m\omega\mu_0}{\rho k_1^2} H_z - i\frac{\gamma}{k_1^2} E'_z, & H_\rho &= -i\frac{\gamma}{\rho k_2^2} H'_z - \frac{m\omega\varepsilon_0\varepsilon_{22}}{\rho k_2^2} E_z, \\ E_\varphi &= i\frac{\omega\mu_0}{k_2^2} H'_z + \frac{\gamma m}{\rho k_2^2} E_z, & H_\varphi &= \frac{\gamma m}{\rho k_1^2} H_z - i\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{11}}{k_1^2} E'_z, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $k_1^2 = \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_{11}$ ,  $k_2^2 = \gamma^2 - k_0^2\varepsilon_{22}$ ,  $k_0^2 = \omega\mu_0\varepsilon_0$ .

Из последних формул следует, что поле нормальной волны в волноводе может быть представлено при помощи двух скалярных функций:

$$u_e := iE_z(\rho), \quad u_m := H_z(\rho). \quad (8)$$

Тем самым задача сводится к нахождению функций  $u_e$  и  $u_m$  – компонент электрического и магнитного полей. Всюду  $(\cdot)'$  обозначает дифференцирование по  $\rho$ .

Для компонент поля  $u_e$  и  $u_m$  имеем следующую задачу (задача  $P_m$ ) на собственные значения: найти такие  $\gamma \in \mathbb{R}$ , что при заданном значении  $m \in \mathbb{Z}$  существуют нетривиальные решения следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \left( \frac{\rho u'_e}{k_1^2} \right)' - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \rho^2 + \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \frac{m^2}{k_2^2} \right) u_e = \frac{\gamma m \omega \mu_0}{k_1^2 k_2^2} \left( \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} - 1 \right) u'_m, \\ \left( \frac{\rho u'_m}{k_2^2} \right)' - \frac{1}{\rho} \left( \rho^2 + \frac{m^2}{k_1^2} \right) u_m = -\frac{\gamma m \omega \varepsilon_0}{k_1^2 k_2^2} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) u'_e, \end{cases} \quad (9)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения на границе  $r$

$$u_e|_r = 0, \quad u_m'|_r = 0 \quad (10)$$

и условиям ограниченности поля во всякой конечной области.

Зная компоненты поля  $u_e$  и  $u_m$  как решение задачи  $P_m$ , можно определить оставшиеся компоненты по формулам (7). Определенное так поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  удовлетворяет всем условиям (1)–(3).

## 2. Вариационное соотношение

Перепишем систему (9) следующим образом:

$$\begin{aligned} L_e u_e &:= p_e u_e'' + h_e u_e' - q_e u_e = f_e' u_m, \\ L_m u_m &:= p_m u_m'' + h_m u_m' - q_m u_m = f_m' u_e, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} p_e &= k_2^2 \rho^2, \quad p_m = k_1^2 \rho^2, \quad h_e = k_2^2 \rho, \quad h_m = k_1^2 \rho, \\ q_e &= k_1^2 \left( k_2^2 \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \rho^2 + \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} m^2 \right), \quad q_m = k_2^2 (k_1^2 \rho^2 + m^2), \\ f_e &= -\gamma m \omega \mu_0 \left( \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} - 1 \right) \rho, \quad f_m = \gamma m \omega \varepsilon_0 (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \rho, \\ k_1^2 &= \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_{11}, \quad k_2^2 = \gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_{22}. \end{aligned}$$

Будем искать решения  $u_e$  и  $u_m$  задачи  $P_m$  в пространствах Соболева  $H_0^1(0, r)$  и  $H^1(0, r)$ , соответственно, со скалярным произведением и нормой

$$(f, g)_1 = \int_0^r (f \bar{g}' + \bar{f} g') d\rho, \quad \|f\|_1^2 = (f, f)_1 = \int_0^r (|f'|^2 + |f|^2) d\rho.$$

**Определение 1.** Если для заданного  $m \in \mathbb{Z}$  существуют нетривиальные функции

$$u_e \in H_0^1(0, r), u_m \in H^1(0, r),$$

отвечающие некоторому  $\gamma \in \mathbb{R}$ , которые являются решением системы уравнений (11), а также удовлетворяют условиям (10), то  $\gamma$  называется характеристическим числом задачи  $P_m$ .

Основная цель работы: численное исследование свойств характеристических чисел  $\gamma$  задачи  $P_m$ .

Дадим другую вариационную формулировку задачи  $P_m$ . Умножим уравнения системы (11) соответственно на произвольные пробные функции  $v_e$  и  $v_m$ , считая их пока непрерывно дифференцируемыми на отрезке  $[0, r]$ . Используя формулу Грина, получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^r vLud\rho &= \int_0^r pvu''d\rho + \int_0^r hvu'd\rho - \int_0^r qvud\rho = \\
&= pvu'|_0^r - \int_0^r (pv' + p'v)u'd\rho + \int_0^r hvu'd\rho - \int_0^r qvud\rho = \\
&= -\int_0^r (pv' + p'v)u'd\rho + \int_0^r hvu'd\rho - \int_0^r qvud\rho, \quad (12)
\end{aligned}$$

где  $u = u_j$ ,  $v = v_j$ ,  $h = h_j$ ,  $p = p_j$ ,  $q = q_j$ ,  $j = e$  или  $m$ .

Применяя полученную формулу (12) отдельно для первого и второго уравнений системы (11) на отрезке  $[0, r]$  и складывая результаты, получим

$$\begin{aligned}
\int_0^r (v_e L_e u_e + v_m L_m u_m) d\rho &= -\int_0^r (q_e u_e v_e + q_m u_m v_m) d\rho + \\
+ \int_0^r ((h_e - p'_e) u'_e v_e + (h_m - p'_m) u'_m v_m) d\rho &- \int_0^r (p_e u'_e v'_e + p_m u'_m v'_m) d\rho. \quad (13)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание правые части уравнений системы (11), имеем

$$\int_0^r (v_e L_e u_e + v_m L_m u_m) d\rho = \int_0^r (f_e u'_m v_e + f_m u'_e v_m) d\rho. \quad (14)$$

Из (13) с учетом (14), получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^r (q_e u_e v_e + q_m u_m v_m) d\rho + \int_0^r (h_e u'_e v_e + h_m u'_m v_m) d\rho + \\
+ \int_0^r (p_e u'_e v'_e + p_m u'_m v'_m) d\rho + \int_0^r (f_e u'_m v_e + f_m u'_e v_m) d\rho. \quad (15)
\end{aligned}$$

**Замечание 1.** Вариационное соотношение (15) получено для гладких функций  $v_e$  и  $v_m$ .

Соотношение (15) распространяется на любые функции  $v_e \in H_0^1(0, r)$ ,  $v_m \in H^1(0, r)$  по непрерывности.

### 3. Проекционный метод

Используя проекционный метод [1, 2], сведем вариационное соотношение (15) к системе алгебраических уравнений. Во-первых, разделим отрезок  $[0, r]$  на  $n$  отрезков длиной  $h = r/n$ . Определим набор из  $(n-1)$  отрезков:

$$\Phi_i = [(i-1)h, (i+1)h], \quad i = 1, \dots, n-1,$$

и набор из  $n$  отрезков

$$\Psi_j = [(j-1)h, (j+1)h], \quad j = 1, \dots, n-1 \text{ и } \Psi_n = [(n-1)h, r].$$

Эти отрезки мы назовем *носителями*.

В соответствии со схемой проекционного метода необходимо ввести *базисные функции*  $\varphi_i$  и  $\psi_j$ , чтобы определить приближенное решение уравнения (15). Базисные функции определены для каждого носителя  $\Phi_i$  и  $\Psi_j$ :

Базисные функции  $\varphi_i$  определены на  $\Phi_i$ , имеют вид

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{\rho - (i-1)h}{h}, & \rho < ih, \\ -\frac{\rho - (i+1)h}{h}, & \rho > ih, \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (16)$$

Базисные функции  $\psi_j$  определены на  $\Psi_j$  и имеют вид

$$\psi_j = \begin{cases} \frac{\rho - (j-1)h}{h}, & \rho < jh, \\ -\frac{\rho - (j+1)h}{h}, & \rho > jh, \end{cases} \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (17)$$

и

$$\psi_n = \frac{\rho - r + h}{l}. \quad (18)$$

Так, определенные базисные функции учитывают краевые условия (10). Приближенные решения рассматриваемой задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_e^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varphi_i, \\ u_m^{(n)} &= \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \psi_j, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\alpha_i, \beta_j$  – неизвестные коэффициенты.

Подставляя функции  $u_e^{(n)}$  и  $u_m^{(n)}$  с представлением (19) в вариационное соотношение (15), мы получим систему линейных уравнений относительно  $\alpha_i$  и  $\beta_j$  (для фиксированного значения  $\gamma$ )

$$A(\gamma)x = 0, \quad (20)$$

где матрицы  $A = A(\gamma)$  и  $x$  имеют вид



$$A = \begin{pmatrix} A_{ee}^{1,1} & \dots & A_{ee}^{1,n-1} & A_{em}^{1,1} & \dots & A_{em}^{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{ee}^{n-1,1} & \dots & A_{ee}^{n-1,n-1} & A_{em}^{n-1,1} & \dots & A_{em}^{n,n} \\ \\ A_{me}^{1,1} & \dots & A_{me}^{1,n-1} & A_{mm}^{1,1} & \dots & A_{mm}^{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{me}^{n,1} & \dots & A_{me}^{n,n-1} & A_{mm}^{n,1} & \dots & A_{mm}^{n,n} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

где

$$A_{ee}^{i,j} = \int_{\Phi_i} q_e \Phi_i \Phi_j d\rho + \int_{\Phi_i} p_e \Phi_i' \Phi_j' d\rho + \int_{\Phi_i} h_e \Phi_i' \Phi_j d\rho, \quad i, j = \overline{1, n-1};$$

$$A_{em}^{i,j} = \int_{\Phi_i} f_m \Phi_i' \Psi_j d\rho, \quad i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, n}, \quad A_{me}^{i,j} = \int_{\Psi_j} f_e \Psi_i' \Phi_j d\rho, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n-1},$$

$$A_{mm}^{i,j} = \int_{\Psi_j} q_m \Psi_i \Psi_j d\rho + \int_{\Psi_j} h_m \Psi_i' \Psi_j d\rho + \int_{\Psi_j} p_m \Psi_i' \Psi_j' d\rho, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Обозначим через  $\Delta$  определитель матрицы  $A$ . Если интервал  $[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}]$  таков, что  $\Delta(\underline{\gamma}) \times \Delta(\overline{\gamma}) < 0$ , то это означает, что существует  $\gamma = \tilde{\gamma} \in [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}]$ , которое является спектральным параметром (постоянной распространения) задачи  $P_m$ . Это значение может быть вычислено с любой заданной точностью.

#### 4. Численные результаты

##### 4.1. Точное решение

Проведем сравнение результатов численного решения задачи  $P_m$  с решением явного дисперсионного уравнения для конкретной структуры.

Пусть  $\epsilon_\rho = \epsilon_z = \epsilon_c = \text{const}$ , т.е. волновод заполнен однородной изотропной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью. Для такой структуры известно точное дисперсионное уравнение, которое имеет вид

$$J_m(\tilde{k}_1 r) J_m'(\tilde{k}_1 r) = 0, \tag{21}$$

где  $\tilde{k}_1^2 = k_0^2 \epsilon_c - \gamma^2$ .

##### 4.2. Численное исследование

Ниже приведены результаты численного решения задачи о распространяющихся электромагнитных волнах анизотропной волноведущей структуры (рис. 2).

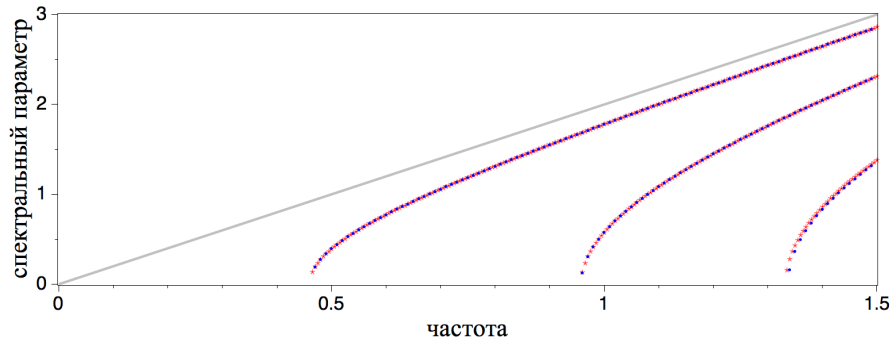


Рис. 2. Сравнение точного решения (звездочки) и решения задачи  $P_m$ , полученных с использованием проекционного метода (точки).  
Значение параметров:  $r = 2\text{mm}, \varepsilon_c = 4, m = 1$

На рис. 3 представлены дисперсионные кривые (графики зависимости  $\gamma(\omega)$ ), построенные для разных значений угла  $\alpha$ . При  $\alpha = 0$  дисперсионные кривые не отличаются от известных кривых (сравнение с дисперсионными кривыми в задаче [1, 6]). При увеличении значения  $\alpha$  дисперсионные кривые изменяют форму, появляются новые собственные значения (спектральные параметры) отсутствующие в случае  $\alpha = 0$ .

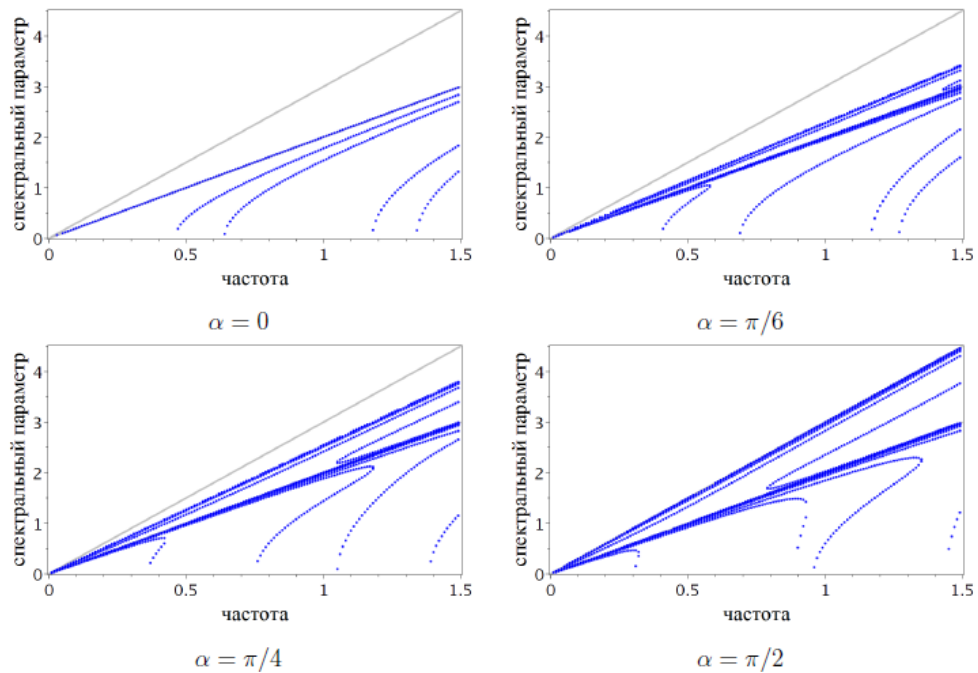


Рис. 3. Дисперсионные кривые. Значение параметров:  $r = 2\text{ mm}, \varepsilon_\rho = 4, \varepsilon_z = 9, m = 1$

### Заключение

Исходная задача о нормальных волнах анизотропной волноведущей структуры сведена к краевой задаче для продольных компонент электромаг-

нитного поля в пространствах Соболева. Для определения решения использована вариационная формулировка задачи.

### Библиографический список

1. **Смолькин, Е. Ю.** Численный метод решения задачи распространения электромагнитных волн в цилиндрическом анизотропном неоднородном волноводе с продольным намагничиванием / Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 2 (42). – С. 32–43.
2. **Смирнов, Ю. Г.** О дискретности спектра в задаче о азимутальных симметричных волнах открытого неоднородного анизотропного волновода с продольным намагничиванием / Ю. Г. Смирнов, Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 3 (43). – С. 50–64.
3. **Lifante, G.** Numerical methods for optical waveguide devices / G. Lifante, F. Cusso and E. Cantelar // International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. – Kharkiv, 2006. – P. 77–82.
4. **Saad, S. M.** Review of Numerical Methods for the Analysis of Arbitrarily-Shaped Microwave and Optical Dielectric Waveguides / S. M. Saad // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 1985. – Vol. 33, №10. – P. 894–899.
5. **Baumert, J. C.** Numerical method for the calculation of mode fields and propagation constants in optical waveguides / J. C. Baumert and J. Hoffnagle // Journal of Lightwave Technology. – 1993. – Vol. 4, № 11. – P. 1626–1630.
6. **Смолькин, Е. Ю.** Численное исследование спектра нормальных волн открытого неоднородного волновода с круговым сечением / Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур, Э. А. Хорошева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 4 (44). – С. 76–86.
7. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009.
8. **Lu, M.** Anisotropic dielectric waveguides / M. Lu and M. M. Fejer // J. Opt. Soc. Am. A. – 1992. – Vol. 10, № 2. – P. 246–261.

### References

1. Smol'kin E. Yu., Snegur M. O. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 2 (42), pp. 32–43.
2. Smirnov Yu. G., Smol'kin E. Yu., Snegur M. O. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 3 (43), pp. 50–64.
3. Lifante G., Cusso F., Cantelar E. *International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*. Kharkiv, 2006, pp. 77–82.
4. Saad S. M. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1985, vol. 33, no. 10, pp. 894–899.
5. Baumert J. C., Hoffnagle J. *Journal of Lightwave Technology*. 1993, vol. 4, no. 11, pp. 1626–1630.
6. Smol'kin E. Yu., Snegur M. O., Khorosheva E. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 4 (44), pp. 76–86.
7. Smirnov Yu. G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki* [Mathematical methods of electrodynamic problems researching]. Penza: Inf.-izd. tsentr PenzGU, 2009.
8. Lu M., Fejer M. M. *J. Opt. Soc. Am. A*. 1992, vol. 10, no. 2, pp. 246–261.

***Смолькин Евгений Юрьевич***

кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, научно-исследовательский центр «Суперкомпьютерное моделирование в электродинамике», Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

***Smol'kin Evgeniy Yur'evich***

Candidate of physical and mathematical sciences, research assistant, the research center "Supercomputer modeling in electrodynamics", Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

***Снегур Максим Олегович***

студент, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: snegur.max15@gmail.com

***Snegur Maksim Olegovich***

Student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

---

УДК 517.958;621.372.8

**Смолькин, Е. Ю.**

**Численное исследование спектра нормальных волн анизотропного диэлектрического волновода / Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 1 (45). – С. 72–82. – DOI 10.21685/2072-3040-2018-1-6.**