Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ш. А. Алимов, О суммировании рядов по собственным функциям,
Докл. АН СССР, 1968, том 182, номер 5, 991–992

https://www.mathnet.ru/dan34177

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
17 января 2026 г., 03:37:25

Доклады Академии наук СССР
1968. Том 182, № 5

УДК 517.521.8 МАТЕМАТИКА

Ш. А. АЛИМОВ

О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

(*Представлено академиком А. Н. Тихоновым 26 II 1968*)

Рассмотрим в N-мерном пространстве нормальную область g с границей Γ и полную ортонормированную систему $\{u_n(x)\}$ собственных функций оператора Лапласа первой краевой задачи

$$\Delta u + \lambda u = 0,\ x \in g, \quad u|_\Gamma = 0.$$

Определим непрерывный треугольный метод суммирования, порождаемый функцией $\varphi_\lambda(t) \equiv 0$ при $t \geqslant \lambda$, абсолютно непрерывной при $t \geqslant 0$ и удовлетворяющей условию $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \varphi_\lambda(t) = 1$.

Ряд Σb_n назовем суммируемым методом φ к числу s, если существует предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{\lambda_n<\lambda} \varphi_\lambda(\lambda_n) b_n = s.$$

Настоящая заметка посвящена изучению свойств ядра этого метода суммирования

$$\Phi(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_n<\lambda} \varphi_\lambda(\lambda_n) u_n(x) u_n(y).$$

Для метода Рисса (R, λ_n, α) известны точные результаты ([1–4]), позволяющие просуммировать ряд Фурье $f(x) \in L_2(g)$. В случае кратных рядов Фурье Э. Штейном ([5]) получены результаты для $f(x) \in L_p(g)$, $p \geqslant 1$.

Для любого $\xi > 0$ и целого $k \geqslant 0$ определим

$$d_k(\xi) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{N/2} \frac{2^{-k}}{k!} \int_0^1 \varphi_\lambda(\lambda t^2) \frac{J_{(N-2)/2+k}(\xi t)}{\xi^{(N-2)/2+k}} t^{N/2+k} dt.$$

Обозначим для произвольного фиксированного $R > 0$ через g_R множество точек области g, отстоящих от Γ больше чем на R, и через $D_s(r, \lambda)$ функцию, при $r > R$ равную нулю и при $r \leqslant R$ определяемую равенством

$$D_s(r, \lambda) = \sum_{k=s}^{\infty} d_k(R\sqrt{\lambda}) \lambda^k (R^2 - r^2)^k, \quad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда из формулы среднего значения ([1], стр. 230) вытекает равенство

$$\Phi(x, y, \lambda) = D_s(r_{xy}, \lambda) + \Sigma\gamma_n u_n(x) u_n(y), \tag{1}$$

где

$$\gamma_n = (2\lambda)^s s!\,(2\pi)^{N/2} \int_R^\infty d_s(r\sqrt{\lambda}) \frac{J_\nu(r\sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n^{\nu/2}} r^{\nu+1} dr, \quad \nu = (N-2)/2 + s.$$

Заметим, что $D_0(r_{xy}, \lambda)$ при $r_{xy} \leqslant R$ совпадает с $\Phi^*(x, y, \lambda)$ — ядром суммирования методом φ разложения в обычный N-кратный интеграл Фурье.

Теорема 1. *Пусть сумматорная функция* $\varphi_\lambda(t)$ *имеет производную порядка* $l > N/p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *удовлетворяющую условию*

$$|\varphi_\lambda^{(l)}(t)| < c\lambda^{-l}. \tag{2}$$

Тогда равномерно относительно $x \in g_R$ *справедлива формула*

$$\|\Phi(x, y, \lambda) - \Phi^*(x, y, \lambda)\|_{L_q(g)} = o(1).$$

Норма берется по $y \in g$, $q = p/(p-1)$.

Для доказательства теоремы достаточно оценить правую часть (1), что нетрудно сделать, используя свойства ядер дробного порядка ([6]). Указанная схема соответствует методу Минакшисундарама ([1, 2]).

Теорема 1 утверждает равносуммируемость разложений в ряд по собственным функциям и в обычный интеграл Фурье. Следуя С. Бохнеру ([7]), можно установить суммируемость разложения в интеграл Фурье произвольной функции $f(x) \in L(g)$ к значению функции в каждой точке Лебега в случае, если φ удовлетворяет условию (2) с $l > (N+1)/2$.

Следствие. *Пусть* p *принадлежит интервалу* $1 \leqslant p \leqslant 2N/(N+1)$ *и для* $\varphi_\lambda(t)$ *справедливо* (2) *с* $l > N/p$.

Тогда ряд Фурье произвольной функции $f(x) \in L_p$ *суммируется методом* φ *к значению функции в каждой точке Лебега.*

Для метода Рисса из равенства (1) можно получить более точный результат.

Теорема 2. *Если* $f(x) \in L_p(g)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *то ее ряд Фурье по собственным функциям суммируется к ней методом Рисса* (R, λ_n, α) *порядка* $\alpha > N/p - 1/2$ *в каждой точке Лебега.*

Если $f(x) \in L_p(g)$, $1 < p < 2$, *то это же утверждение остается справедливым при* $\alpha = N/p - 1/2$.

Автор считает необходимым отметить, что аналогичные результаты могут быть получены из тауберовой теоремы Левитана — Марченко ([8]).

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность проф. В. А. Ильину за внимание к моей работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 II 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, 2, М., 1961. [2] K. Chandrasekharan, S. Minakshisundaram, Typical Means, Oxford, 1952. [3] Б. М. Левитан, Матем. сборн. 35 (77), 2, 267 (1954). [4] В. А. Ильин, Дифференциальные уравнения, 2, № 6, 816 (1966). [5] E. Stein, Aca Mathematica, 100, 93 (1958). [6] В. А. Ильин, Матем. сборн., 41 (83), 4, 459 (1957). [7] S. Bochner, Trans. Am. Math. Soc., 40, № 2, 175 (1936). [8] В. А. Марченко, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 381 (1955).