V. N. Senichkin, The spectrum of the algebra of pseudodifferential operators on a manifold with smooth edges.,
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 6, 105–147

https://www.mathnet.ru/eng/aa745

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 6

СПЕКТР АЛГЕБРЫ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА МНОГООБРАЗИИ С ГЛАДКИМИ РЕБРАМИ

© В. Н. Сеничкин

Перечисляются все (с точностью до эквивалентности) неприводимые представления C^*-алгебры $\mathcal{A}$, порожденной псевдодифференциальными операторами нулевого порядка на многообразии с особенностями типа гладких ребер. Формулируются теоремы о спектральной топологии и о разрешимости алгебры $\mathcal{A}$.

В работе рассматриваются C^*-алгебры, порожденные псевдодифференциальными операторами (ПДО) на m-мерном многообразии $\mathcal{M}$ с особенностями типа гладких ребер. Операторы действуют в весовых пространствах $L^2_p(\mathcal{M})$. Цель статьи — описание спектра указанных алгебр. Напомним, что спектром C^*-алгебры называется множество всех классов эквивалентности неприводимых представлений $\mathcal{A}$, наделенное специальной топологией (так называемой топологией Джекобсона, см. [1]). Спектр алгебры обозначается через $\widehat{\mathcal{A}}$.

Локальными моделями m-мерного многообразия с гладкими ребрами вблизи особых точек являются поверхности "типа клина", т.е. множество вида $K \times \mathbb{R}^{m-n}$, где K — n-мерная коническая поверхность в $\mathbb{R}^N$. "Распрямляя" поверхность K в конической окрестности некоторой образующей (например, с помощью проектирования на касательную плоскость), мы получаем множество $K' \times \mathbb{R}^{m-n}$, где K' — открытый конус в $\mathbb{R}^n$. Поэтому изучение ПДО на многообразии с ребрами предполагает их предварительное определение и изучение в области $\mathbb{R}^m_n = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{m-n} : x^1 \neq 0\}$.

В §1 для любого числа $\mu \in \mathbb{C}$ вводится класс S_μ функций на $\mathbb{R}^m_n \times \mathbb{R}^m$, которые далее называются символами порядка μ. С помощью стандартной

Ключевые слова: псевдодифференциальные операторы на многообразиях с особенностями, C^*-алгебра, представление, спектр.

формулы

$$Au(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ix\xi} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi, \quad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_n^m) \tag{0.1}$$

каждому символу $a \in S_\mu$ сопоставляется ПДО $A = \operatorname{Op} a$ порядка μ. Затем определяются ПДО на поверхности типа клина и на многообразии с ребрами. Корректность определений следует из результатов статьи [2] и в настоящей работе не обсуждается. Это относится и к таким стандартным фактам теории ПДО, как замкнутость класса собственных ПДО относительно операций композиции, перехода к сопряженному оператору и т.п.

В §2 вводится C^*-алгебра $\mathcal{A}$, порожденная в пространстве $L^2(\mathcal{M})$ собственными ПДО нулевого порядка. Устанавливается, что спектр алгебры $\mathcal{A}$ является объединением спектров локальных алгебр $\mathcal{A}_z$, $z \in \mathcal{M}$, и класса эквивалентности [Id] тождественного представления $\mathcal{A}$ в $L^2(\mathcal{M})$. Если z — неособая точка, то $\mathcal{A}_z \cong C(S_z^*)$, где S_z^* — единичная сфера кокасательного пространства T_z^*. В случае особой точки имеем $\mathcal{A}_z \cong \mathcal{A}_0(\Lambda)$, где $\Lambda = K \times \mathbb{R}^{m-n}$ — поверхность типа клина, являющаяся локальной моделью для $\mathcal{M}$ в окрестности z, $\mathcal{A}_0(\Lambda)$ — алгебра ПДО нулевого порядка, символы которых удовлетворяют условию $a(x^1, x^2, \xi) = a(tx^1, 0, \xi/t)$, $x^1 \in K$, $x^2 \in \mathbb{R}^{m-n}$, $t > 0$.

В §3 доказываются некоторые вспомогательные результаты технического характера, которые затем применяются к описанию спектра алгебр $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}_n^m)$. При этом существенно используются результаты работ [3, 4].

В §4 перечисляются все неприводимые представления алгебр $\mathcal{A}_0(\Lambda)$. Учитывая соотношения $\mathcal{A}_0(\Lambda) \cong \mathcal{A}_z$ и $\widehat{\mathcal{A}} \setminus [\mathrm{Id}] = \bigcup_{z \in \mathcal{M}} \widehat{\mathcal{A}}_z$, мы получаем полный список неприводимых представлений алгебры $\mathcal{A}$. Переход от $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}_n^m)$ к $\mathcal{A}_0(\Lambda)$ осуществляется с помощью стандартных рассуждений, использующих разбиение единицы на поверхности Λ. Поэтому доказательства соответствующих предложений только намечаются. В оставшейся части §4 кратко обсуждается топология Джекобсона на спектре $\widehat{\mathcal{A}}$ и указываются разрешающие композиционные ряды для $\mathcal{A}$. В заключительном разделе рассматриваются обобщения полученных результатов на случай алгебр ПДО, действующих в весовых пространствах, а также алгебр, порожденных несобственными ПДО.

Данная работа является продолжением, с одной стороны, статей [3–5], в которых изучен спектр алгебр ПДО с разрывными символами на гладких многообразиях, а с другой — статьи [2], в которой дано определение ПДО на многообразиях с ребрами и построено исчисление таких ПДО. Отметим, что в работах различных авторов предлагались другие определения ПДО на особых многообразиях (см., например, [6, 7]). Однако в этих работах классы ПДО не изучались с точки зрения теории C^*-алгебр.

§1. Псевдодифференциальные операторы на многообразиях с ребрами

1.1. Некоторые обозначения. Пусть m, n — целые числа, $1 \leqslant n \leqslant m$. Элементы $x \in \mathbb{R}^m$ далее часто записываются в виде (x^1, x^2) или $(r\varphi, x^2)$, где $x^1 = (x_1, \ldots, x_n)$, $x^2 = (x_{n+1}, \ldots, x_m)$, $r = |x^1|$, $\varphi = x^1/|x^1|$. Если $x, y \in \mathbb{R}^m$, то $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$, $xy = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m$. Символ $\mathbb{Z}_+^m$ обозначает множество мультииндексов размерности m, т.е. векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ с координатами $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+ \equiv \{0, 1, \ldots\}$. Если X — локально компактное топологическое пространство, то $C_0(X)$ — пространство непрерывных функций на X, стремящихся к нулю на бесконечности, $C_c(X)$ — подпространство в $C_0(X)$, состоящее из функций с компактными носителями. Для гладкого многообразия X полагаем $C_c^\infty(X) = C^\infty(X) \cap C_c(X)$. Через $L_p^2(\mathbb{R}_n^m)$, $p \in \mathbb{R}$, обозначаем пополнение $C_c(\mathbb{R}_n^m)$ по норме

$$\|u; L_p^2(\mathbb{R}_n^m)\| = \left(\int |x^1|^{2p} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Вместо $L_0^2(\mathbb{R}_n^m)$ пишем $L^2(\mathbb{R}^m)$. Как обычно,

$$\widehat{u}(\xi) = (Fu)(\xi) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{-i\xi y} u(y) dy$$

— преобразование Фурье функции u,

$$\Delta = \Delta_x = (\partial/\partial x_1)^2 + \cdots + (\partial/\partial x_m)^2$$

— оператор Лапласа.

Все встречающиеся в тексте алгебры являются C^*-алгебрами, морфизмы — $*$-морфизмами, идеалы — замкнутыми и двусторонними. Через $\mathcal{B}H$ (соответственно $\mathcal{K}H$) обозначается алгебра всех ограниченных (соответственно компактных) операторов в гильбертовом пространстве H.

1.2. Псевдодифференциальные операторы в $\mathbb{R}_n^m$. Фиксируем $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n$.

Определение 1.1. Функция $\widetilde{a} \in C^\infty(\mathbb{R}_n^m \times \mathbb{R}^m)$ называется предсимволом порядка μ, $\mu \in \mathbb{C}$, если

1) $\|\partial_r^k \partial_{x^2}^\beta \partial_\xi^\gamma \widetilde{a}(r\cdot, x^2, \xi);\ C^q(S^{n-1})\| \leqslant C_{kq\beta\gamma} \langle \xi \rangle^{\operatorname{Re}\mu - |\gamma|}$, $k, q \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^{m-n}$, $\gamma \in \mathbb{Z}_+^m$;

2) существует предел $\widetilde{a}^{(0)}(x, \xi) = \lim_{t \to +\infty} t^{-\mu} \widetilde{a}(x, t\xi)$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}_n^m \times (\mathbb{R}^m \setminus 0)$;

3) функция $(x,\xi) \mapsto \widetilde{a}(x,\xi) - \zeta(\xi)\widetilde{a}^{(0)}(x,\xi)$, где $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\zeta(\xi) = 0$ при $|\xi| \leqslant 1/2$, $\zeta(\xi) = 1$ при $|\xi| \geqslant 1$, удовлетворяет условию 1) с заменой μ на $\mu - 1$.

Положим $\Omega = \mathbb{R} \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^{m-n}$, $\Omega_+ = \mathbb{R}_+ \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^{m-n}$ и обозначим через $\mathfrak{q}$ биекцию $\Omega_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m_n \times \mathbb{R}^m$: $(r,\varphi,x^2,\xi) \mapsto (r\varphi x^2,\xi)$. Пусть $\overline{C}^\infty(\mathbb{R}^m_n \times \mathbb{R}^m) = \{f \circ \mathfrak{q}^{-1} : f \in C^\infty(\overline{\Omega}_+ \times \mathbb{R}^m)\}$. Из условия 1) определения 1.1 вытекает, что все предсимволы принадлежат $\overline{C}^\infty(\mathbb{R}^m_n \times \mathbb{R}^m)$.

Определение 1.2. Каждому предсимволу $\widetilde{a}$ (произвольного порядка μ) сопоставим функцию $a(x,\xi) = \widetilde{a}(x,|x^1|\xi)$, которую назовем символом (того же порядка).

Класс всех предсимволов (соответственно символов) порядка μ будем обозначать через $\widetilde{S}_\mu(\mathbb{R}^m_n)$ (соответственно $S_\mu(\mathbb{R}^m_n)$).

Если $a \in \bigcup_\mu S_\mu(\mathbb{R}^m_n)$, то формула (0.1) определяет линейный непрерывный оператор $A = \operatorname{Op} a$ из $C^\infty_c(\mathbb{R}^m_n)$ в $C^\infty(\mathbb{R}^m_n)$. Ядро этого оператора задается осцилляторным интегралом

$$G(x,y) = (2\pi)^{-m} \int e^{i(x-y)\xi} a(x,\xi)\,d\xi, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^m_n \times \mathbb{R}^m_n.$$

Определение 1.3. Оператор A вида (0.1), где $a \in S_\mu$, называется псевдодифференциальным оператором порядка μ в $\mathbb{R}^m_n$. Будем говорить, что A — собственный ПДО, если при некотором $\delta \in (0,1)$ носитель его ядра содержится в области $\{(x,y) : |x^1|/|y^1| \in (\delta,\delta^{-1}),\ |x^2 - y^2| < \delta^{-1}(1 + |x^1|)\}$. Класс всех ПДО (соответственно собственных ПДО) порядка μ обозначим через $\overline{\Psi}_\mu(\mathbb{R}^m_n)$ (соответственно $\Psi_\mu(\mathbb{R}^m_n)$).

1.3. ПДО на поверхности типа клина. Для любого подмножества D сферы S^{N-1} пусть K_D обозначает конус в $\mathbb{R}^N \setminus 0$ с направляющим множеством D: $K_D = \{y \in \mathbb{R}^N : y = r\varphi, r > 0, \varphi \in D\}$. Если D — гладкое компактное $(n-1)$-мерное многообразие (без края), то множество $\Lambda = K_D \times \mathbb{R}^{m-n}$ есть гладкая m-мерная поверхность в $(\mathbb{R}^N \setminus 0) \times \mathbb{R}^{m-n}$. Такие поверхности будем называть поверхностями типа клина. Отметим, что $\Lambda = \mathbb{R}^m_n$ при $N = n$ и $D = S^{n-1}$.

Определение 1.4. Пусть $V^{(0)}$ — открытое подмножество многообразия D, допускающее диффеоморфное отображение $v^{(0)}$ на некоторое подмножество сферы S^{n-1}, и пусть $V^{(1)} = K_{V^{(0)}}$, $V = V^{(1)} \times \mathbb{R}^{m-n}$. Введем отображения $v^{(1)}\colon V^{(1)} \to \mathbb{R}^n \setminus 0$, $v\colon V \to \mathbb{R}^m_n$, полагая $v^{(1)}(r\varphi) = rv^{(0)}(\varphi)$, $v(r\varphi, x^2) = (\nu^{(1)}(r\varphi), x^2)$. Множество V (соответственно $V^{(1)}$) назовем координатной окрестностью , а пару (V,v) (соответственно $(V^{(1)}, v^{(1)})$ — локальной картой на поверхности Λ (соответственно K_D).

По аналогии с определениями многообразий Ω и Ω_+ (см. предыдущий раздел) положим $\Omega(\Lambda) = \mathbb{R} \times D \times \mathbb{R}^{m-n}$, $\Omega_+(\Lambda) = \mathbb{R}_+ \times D \times \mathbb{R}^{m-n}$. Пусть $\mathfrak{p}_\Lambda$ обозначает биекцию $\Omega_+(\Lambda) \longrightarrow \Lambda$: $(r, \varphi, x^2) \mapsto (r\varphi, x^2)$, а $\overline{C}^\infty(\Lambda)$ — пространство всех функций вида $\chi \circ \mathfrak{p}_\Lambda^{-1}$, $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega_+(\Lambda)})$. Если V — открытое подмножество поверхности Λ, $\eta \in \overline{C}^\infty(\Lambda)$ и $\operatorname{supp} \eta \subset V$, то η называется срезающей функцией (*срезкой*), подчиненной множеству V. Совокупность всех таких срезок обозначим через $\mathcal{CF}(V)$.

Определение 1.5. ПДО (соответственно собственный ПДО) порядка μ на поверхности Λ типа клина — это линейное отображение A: $C_c^\infty(\Lambda) \longrightarrow C^\infty(\Lambda)$ такое, что для всякой локальной карты (V, v) и любых срезок $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{CF}(V)$ оператор

$$u \mapsto [\eta_1 A \eta_2 (u \circ v)] \circ v^{-1}, \quad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_n^m),$$

принадлежит $\overline{\Psi}_\mu(\mathbb{R}_n^m)$ (соответственно $\Psi_\mu(\mathbb{R}_n^m)$). Введенные классы ПДО далее обозначаются через $\overline{\Psi}_\mu(\Lambda)$ и $\Psi_\mu(\Lambda)$.

1.4. Допустимые диффеоморфизмы. Пусть Λ - поверхность типа клина. Отображение $\mathfrak{p}_\Lambda : \Omega_+(\Lambda) \longrightarrow \Lambda$ можно продолжить до непрерывного сюръективного отображения $\overline{\mathfrak{p}}_\Lambda : \overline{\Omega_+(\Lambda)} \longrightarrow \overline{\Lambda}$. Если V — открытое подмножество $\overline{\Lambda}$, то его прообраз $\overline{\mathfrak{p}}_\Lambda^{-1}(V)$ представляет собой многообразие с краем (возможно, пустым).

Пусть даны m-мерные поверхности $\Lambda_1 = K_1 \times \mathbb{R}^{m-n}$, $\Lambda_2 = K_2 \times \mathbb{R}^{m-n}$, точки $(0, x^2) \in \overline{\Lambda}_1$, $(0, y^2) \in \overline{\Lambda}_2$ и их окрестности $V_1 \subset \overline{\Lambda}_1$, $V_2 \subset \overline{\Lambda}_2$.

Определение 1.6. Отображение f: $V_1 \longrightarrow V_2$ называется допустимым диффеоморфизмом, если $f \circ (\overline{\mathfrak{p}}_1 | \overline{\mathfrak{p}}_1^{-1}(V_1)) = \overline{\mathfrak{p}}_2 \circ F$, где $F : \overline{\mathfrak{p}}_1^{-1}(V_1) \longrightarrow \overline{\mathfrak{p}}_2^{-1}(V_2)$ — диффеоморфизм (класса C^∞) многообразий с краем.

Ясно, что f индуцирует диффеоморфизм $V_1 \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n})$ на $V_2 \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n})$.

1.5. w-многообразия. Компактное подмножество $\mathcal{M}$ топологического многообразия называется стратифицированным многообразием, если а) $\mathcal{M}$ есть конечное объединение попарно непересекающихся связных топологических многообразий (стратов); б) замыкание каждого страта состоит из него самого и объединения некоторого множества стратов меньших размерностей.

Пусть $\{s_i\}$ — семейство стратов, из которых состоит многообразие $\mathcal{M}$. Положим $m = \max \dim s_i$, $n_i = m - \dim s_i$, $I = \{i : \dim s_i < m\}$, $\mathcal{M}_0 = \bigcup_{i \notin I} s_i$. Далее предполагается, что

1) $\overline{s}_i = s_i$ при $i \in I$;

2) для каждой точки, принадлежащей страту s_i, $i \in I$, существуют окрестность $O \subset \mathcal{M}_0 \cup s_i$ этой точки, m-мерная поверхность $\Lambda = K \times \mathbb{R}^{m-n_i}$ типа

клина, открытое множество $V \subset \overline{\Lambda}$ и такой гомеоморфизм $\varkappa\colon O \to V$, что $\varkappa(s_i \cap O) = V \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n_i})$.

Из условий 1) и 2) следует, что (m-мерное) многообразие $\mathcal{M}_0$ плотно в $\mathcal{M}$, а множество $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$ является дизъюнктным объединением компактных многообразий (ребер). Пару $(O, \varkappa)$ из условия 2) назовем специальной локальной картой на $\mathcal{M}$. Если O' — координатная окрестность на $\mathcal{M}_0$ и $\varkappa'$ — гомеоморфизм этой окрестности на открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, то карту $(O', \varkappa')$ назовем стандартной. Атласом на $\mathcal{M}$ будем называть всякий конечный набор $\mathfrak{C} = \{(O_j, \varkappa_j)\}$ локальных карт, обладающий свойствами

(i) $\bigcup O_j = \mathcal{M}$;

(ii) если $(O_j, \varkappa_j)$, $(O_k, \varkappa_k) \in \mathfrak{C}$ — специальные карты, причем $O_j \cap s_{i_1} \neq \varnothing$, $O_k \cap s_{i_2} \neq \varnothing$, где $i_1, i_2 \in I$, $i_1 \neq i_2$, то $O_j \cap O_k = \varnothing$;

(iii) $\overline{O}_j \subset \mathcal{M}_0$ для всякой стандартной карты $(O_j, \varkappa_j) \in \mathfrak{C}$.

Определение 1.7. Атлас $\{(O_j, \varkappa_j)\}$ локальных карт на многообразии $\mathcal{M}$ с ребрами задает на $\mathcal{M}$ структуру w-многообразия, если любые две карты из этого атласа согласованы, то есть либо $O_j \cap O_k = \varnothing$, либо $O_j \cap O_k \neq \varnothing$ и отображение $\varkappa_k \circ \varkappa_j^{-1}\colon \varkappa_j(O_j \cap O_k) \to \varkappa_k(O_j \cap O_k)$ является

а) допустимым диффеоморфизмом открытых подмножеств поверхностей типа клина, если карты $(O_j, \varkappa_j)$, $(O_k, \varkappa_k)$ специальные);

б) диффеоморфизмом гладких многообразий в остальных случаях.

Обычным способом определяется эквивалентность двух атласов. Эквивалентные атласы задают на $\mathcal{M}$ одну и ту же w-структуру. Из определения 1.7 следует, что открытая всюду плотная часть $\mathcal{M}_0$ w-многообразия $\mathcal{M}$ является гладким многообразием. Кроме того, согласно сказанному после определения 1.6, w-структура индуцирует гладкую структуру на каждом ребре s_i, $i \in I$. В дальнейшем, рассматривая локальные карты на w-многообразии, мы всегда считаем, что они согласованы с w-структурой.

Обозначим через $\overline{C}^\infty(\mathcal{M}_0)$ совокупность всех C^∞-функций χ на $\mathcal{M}_0$, удовлетворяющих следующему условию: для любой специальной системы координат $\varkappa\colon O \to \overline{\Lambda}$ и любого компакта $E \subset O$ существует такая функция $\eta \in \overline{C}^\infty(\Lambda)$, что $\chi|(E \cap \mathcal{M}_0) = \eta \circ (\varkappa|(E \cap \mathcal{M}_0))$. Для открытого множества $V \subset \mathcal{M}_0$ положим $\mathcal{CF}(V) = \{\chi \in \overline{C}^\infty(\mathcal{M}_0) : \operatorname{supp}\chi \subset V\}$. Элементы пространства $\mathcal{CF}(V)$ будем называть *срезающими функциями, подчиненными множеству V*.

Пусть s_i, $i \in I$ — некоторое ребро w-многообразия $\mathcal{M}$. Рассмотрим покрытие $\{O_j\}_{j=1}^k$ этого ребра специальными координатными окрестностями и обозначим через W какую-нибудь окрестность s_i, удовлетворяющую условию $\overline{W} \subset \bigcup_{j=1}^k O_j$. Пусть $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_k$ — разбиение единицы на $\mathcal{M}_0$, подчиненное покрытию $\mathcal{M}_0 \setminus \overline{W}$, $O_1 \cap \mathcal{M}_0, \ldots, O_k \cap \mathcal{M}_0$, причем $\chi_j \in \mathcal{CF}(O_j)$ для $j \geqslant 1$.

Пусть еще $\varkappa_j = (\varkappa_j^1, \varkappa_j^2)$, $j \geqslant 1$, — координатное отображение окрестности O_j на открытое подмножество замкнутой поверхности $\overline{\Lambda}_j = \overline{K}_j \times \mathbb{R}^{m-n_j}$ типа клина. Положим

$$l_i(w) = \chi_0(w) + \sum_{j=1}^{k} \chi_j(w)|\varkappa_j^1(w)|, \quad w \in \mathcal{M}_0. \tag{1.1}$$

Тогда l_i — гладкая положительная функция на многообразии $\mathcal{M}_0$, $l_i = 1$ вблизи любого ребра, отличного от s_i, и $(l_i \circ \varkappa^{-1})(x) \sim r$, $x \in O \cap \mathcal{M}_0$, для каждой специальной системы координат $\varkappa\colon O \to \overline{\Lambda}$, $O \cap s_i \neq \varnothing$; здесь r — расстояние от точки $x \in \Lambda = K \times \mathbb{R}^{m-n_i}$ до "ребра" $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n_i}$, а соотношение $(l_i \circ \varkappa^{-1})(x) \sim r$ означает существование для всякого компактного множества $E \subset \varkappa(O)$ таких констант $C'(\varkappa, E)$, $C''(\varkappa, E)$, что

$$C'(\varkappa, E)r \leqslant (l_i \circ \varkappa^{-1})(x) \leqslant C''(\varkappa, E)r, \quad x \in E \cap \Lambda. \tag{1.2}$$

Замечание. Формула (1.1) сопоставляет ребру s_i бесконечное семейство функций, зависящих от выбора карт $(O_j, \varkappa_j)$ и срезок χ_j. Далее через l_i обозначается произвольная фиксированная функция из этого семейства.

Введем на многообразии $\mathcal{M}_0$ риманову метрику. Пусть $\mathfrak{C} = \{(O_j, \varkappa_j)\}$ — атлас на $\mathcal{M}$. Если $(O_j, \varkappa_j) \in \mathfrak{C}$ — специальная карта, то метрику на $O_j \cap \mathcal{M}_0$ определим как прообраз римановой метрики на поверхности $\varkappa_j(O_j \cap \mathcal{M}_0)$, индуцированной на ней евклидовой метрикой окружающего пространства. В случае стандартной карты $(O_j, \varkappa_j)$ (гладкую) метрику на O_j определим произвольным образом. На всем многообразии $\mathcal{M}_0$ метрика теперь склеивается с помощью разбиения единицы $\{\chi_j\}$, $\chi_j \in C\mathcal{F}(O_j)$. При другом выборе атласа $\mathfrak{C}$ или разбиения единицы $\{\chi_j\}$ метрика заменяется на эквивалентную. Гладкая мера на $\mathcal{M}_0$, порожденная метрикой, далее обозначается через ν. Отметим, что соотношения (1.2) равносильны двусторонней оценке $C' \operatorname{dist}(\cdot, s_i) \leqslant l_i(\cdot) \leqslant C'' \operatorname{dist}(\cdot, s_i)$ для функции l_i; здесь C', C'' — некоторые константы, а $\operatorname{dist}(w, s_i)$ — расстояние от точки $w \in \mathcal{M}_0$ до ребра s_i, определяемое метрикой.

1.6. ПДО на w-многообразии. Чтобы мотивировать последующие определения, рассмотрим произвольный ПДО в $\mathbb{R}^m_n$ вида $\eta_1(\operatorname{Op} a)\eta_2$, где a — некоторый символ, а функции $\eta_1, \eta_2 \in \overline{C_c^\infty}(\mathbb{R}^m_n)$ таковы, что замыкания (в $\mathbb{R}^m$) их носителей не пересекаются. Пусть G — ядро этого ПДО,

$$G(x, y) = (2\pi)^{-m} \int e^{i(x-y)\xi} \eta_1(x) a(x, \xi) \eta_2(y) d\xi.$$

Тогда $G \circ (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) \in C_c^\infty(\Omega \times \Omega)|(\Omega_+ \times \Omega_+)$ и, как показывают несложные вычисления [2], $|G(x,y)| \leqslant C_N|x^1|^N$ при всех $N \in \mathbb{N}$. Обратно, если функция $G \in C^\infty(\mathbb{R}^m_n \times \mathbb{R}^m_n)$ обладает указанными свойствами, то оператор

$$Bu(x) = \int G(x,y)u(y)dy$$

является сглаживающим ПДО, т.е. принадлежит $\bigcap_{\mu \in \mathbb{C}} \Psi_\mu(\mathbb{R}^m_n)$. Отметим для дальнейшего, что отображение $G \mapsto G \circ (\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ порождает изоморфизм $\overline{C}^\infty(\mathbb{R}^m_n)\widehat{\oplus}\overline{C}^\infty(\mathbb{R}^m_n) \cong C^\infty(\Omega \times \Omega)|(\overline{\Omega}_+ \times \overline{\Omega}_+)$.

Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_0, \nu$ обозначают то же, что и в разделе 1.5. Положим $l = \Pi_{i \in I} l_i$, где l_i — функция (1.1).

Определение 1.8. Будем говорить, что оператор

$$Bu(z) = \int G(z,w)u(w)d\nu(w), \quad u \in C_c^\infty(\mathcal{M}_0),$$

принадлежит классу $\overline{\Upsilon}(\mathcal{M})$, если $G \in \overline{C}^\infty(\mathcal{M}_0)\widehat{\oplus}\overline{C}^\infty(\mathcal{M}_0)$ и при любом $N \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|G(z,w)| \leqslant C_N l(z)^N$. Оператор B назовем собственным ($B \in \Upsilon(\mathcal{M})$), если существует такое $\delta \in (0,1)$, что $G(z,w) = 0$ всякий раз, когда $l_i(z)/l_i(w) \notin (\delta, \delta^{-1})$ хотя бы для одного $i \in I$.

Пусть W — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. Обозначим через $S_\mu(W)$ совокупность всех C^∞-функций a на $W \times \mathbb{R}^m$, допускающих представление $a = a_0 + a_1$, где a_0, $a_1 \in C^\infty(W \times \mathbb{R}^m)$, причем функция a_0 однородна степени μ при больших $|\xi|$, а a_1 для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^m_+$ и любого компакта $E \subset W$ удовлетворяет оценке

$$\sup\{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_1(x,\xi)|; x \in E\} \leqslant C_{\alpha,\beta,E}\langle\xi\rangle^{\operatorname{Re}\mu - |\beta| - 1}.$$

Оператор $A\colon C_c^\infty(\mathcal{M}_0) \to C^\infty(\mathcal{M}_0)$ назовем псевдодифференциальным оператором порядка μ на гладком многообразии $\mathcal{M}_0$, если для каждой (возможно, несвязной) координатной окрестности $O \subset \mathcal{M}_0$ и каждого диффеоморфизма $\varkappa\colon O \to W \subset \mathbb{R}^m$ отображение $A_\varkappa\colon u \mapsto [A(u \circ \varkappa)] \circ \varkappa^{-1}$, $u \in C_c^\infty(W)$, есть ПДО порядка μ в W. Последнее означает, что

$$A_\varkappa u(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ix\xi} a_\varkappa(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi,$$

где $a_\varkappa$ — некоторый элемент класса $S_\mu(W)$.

Положим $a_\varkappa^{(0)}(x,\xi) = \lim_{t\to+\infty}(t^{-\mu}a_\varkappa(x,t\xi))$. При фиксированном x функция $\xi \mapsto a_\varkappa^{(0)}(x,\xi)$ однородна степени μ. Из формулы замены переменных в ПДО вытекает, что $a_\varkappa^{(0)}$ есть выражение в локальных координатах некоторой функции $a^{(0)}$, инвариантно определенной на дополнении $T^*(\mathcal{M}_0)\setminus 0$ нулевого сечения кокасательного расслоения к $\mathcal{M}_0$. Функция $a^{(0)}$ называется главным символом ПДО A.

Класс всех ПДО порядка μ на многообразии $\mathcal{M}_0$ обозначим через $\overline{\Psi}_\mu(\mathcal{M}_0)$. Следуя стандартному определению, назовем ПДО $A \in \overline{\Psi}_\mu(\mathcal{M}_0)$ собственным ($A \in \Psi_\mu(\mathcal{M}_0)$), если обе проекции носителя его ядра — подмножества произведения $\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0$ — на сомножители этого произведения являются собственными отображениями.

Теперь можно дать определение ПДО на w-многообразии $\mathcal{M}$. Для упрощения формулировок будем называть носители функций χ_1, $\chi_2 \in \overline{C}^\infty(\mathcal{M}_0)$ дизъюнктными, если их замыкания (в $\mathcal{M}$) не пересекаются. Как и ранее, через Λ обозначаются m-мерные поверхности типа клина.

Определение 1.9. Класс $\overline{\Psi}_\mu(\mathcal{M})$ псевдодифференциальных операторов порядка μ на w-многообразии $\mathcal{M}$ состоит из всех ПДО $A \in \overline{\Psi}_\mu(\mathcal{M}_0)$, обладающих следующими свойствами:

1) для любой специальной системы координат $\varkappa\colon O \mapsto \overline{\Lambda}$ и любых двух срезок $\chi_1, \chi_2 \in C\mathcal{F}(O)$ оператор

$$u \mapsto [(\chi_1 A \chi_2)(u \circ \varkappa_0)] \circ \varkappa_0^{-1}, u \in C_c^\infty(\Lambda),$$

где $\varkappa_0 = \varkappa|(O \cap \mathcal{M}_0)$, принадлежит $\overline{\Psi}_\mu(\Lambda)$;

2) $\eta_1 A \eta_2 \in \overline{\Upsilon}(\mathcal{M})$ для всякой пары функций $\eta_1, \eta_2 \in \overline{C}^\infty(\mathcal{M}_0)$ с дизъюнктными носителями.

Заменяя в этом определении $\overline{\Psi}_\mu(\mathcal{M}_0)$, $\overline{\Psi}_\mu(\Lambda)$ и $\overline{\Upsilon}(\mathcal{M})$ на $\Psi_\mu(\mathcal{M}_0)$, $\Psi_\mu(\Lambda)$ и $\Upsilon(\mathcal{M})$, получаем определение класса $\Psi_\mu(\mathcal{M})$ собственных ПДО.

1.7. Пространства $L_p^2(\mathcal{M},\nu)$. Пусть, как и выше, $\{s_i\}_{i\in I}$ обозначает совокупность всех ребер w-многообразия $\mathcal{M}$, ν — гладкую меру на $\mathcal{M}_0$, порожденную римановой метрикой. Для каждого набора $p = \{p_i\}_{i\in I}$, $p_i \in \mathbb{R}$, положим $l^p = \Pi_{i\in I} l_i^{p_i}$, где l_i — функции (1.1). Обозначим через $L_p^2(\mathcal{M},\nu)$ пространство всех ν-измеримых функций таких, что

$$||u||_p = \left(\int l^{2p}|u|^2 d\nu\right)^{1/2} < +\infty.$$

Скажем, что "вектор" $p = \{p_i\}$ удовлетворяет условию Стейна, если $p_i \in (-n_i/2, n, n_i/2)$ для всех $i \in I$ (напомним, что $n_i = m - \dim s_i$).

В статье [2] установлено, что если $\operatorname{Re}\mu \leqslant 0$, то всякий ПДО $A \in \Psi_\mu(\mathcal{M})$ продолжается до непрерывного оператора в пространстве $L^2_p(\mathcal{M}, \nu)$ при любом p. Если p удовлетворяет условию Стейна, то аналогичное утверждение справедливо и для $A \in \overline{\Psi}_\mu(\mathcal{M})$.

Замечание. В [2] рассматривалась более широкая шкала пространств $H^s_p(\mathcal{M})$ (весовых аналогов классов Соболева), и теоремы об ограниченности ПДО были получены в этой шкале.

§2. Локальные алгебры

2.1. Принцип локализации. Пусть H — гильбертово пространство, $\dim H = \infty$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ — подалгебры в $\mathcal{B}L^2(H)$, причем алгебра $\mathcal{C}$ коммутативна. Для каждой точки $z \in \widehat{\mathcal{C}}$ положим $\mathcal{I}_z = \{C \in \mathcal{C} : \widehat{C}(z) = 0\}$, где $\widehat{C}(\cdot) \in C_0(\widehat{\mathcal{C}})$ — преобразование Гельфанда элемента $C \in \mathcal{C}$. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}H$ — наименьшая алгебра, содержащая $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, $\mathcal{J}_z$ — идеал в $\mathcal{A}$, порожденный идеалом $\mathcal{I}_z$, $\mathcal{B}_z$ — образ алгебры $\mathcal{B}$ при каноническом отображении $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}_z$. Переход от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}_z$ называется локализацией (в точке z), а алгебры $\mathcal{B}_z$ — локальными алгебрами.

Относительно $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ дополнительно предположим, что (i) $\mathcal{K}H \subset \mathcal{B}$, (ii) алгебра $\mathcal{C}$ содержит тождественный оператор I и хотя бы один оператор, отличный от скалярного; (iii) отображение $\mathcal{C} \to \mathcal{B}H/\mathcal{K}H$, индуцированное вложением $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}H$, является изометрией; (iv) если $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ и $C_1C_2 \in \mathcal{K}H$, то $C_1\mathcal{B}C_2 \subset \mathcal{K}H$.

Предложение 2.1 [8]. *Если выполнены условия* (i)–(iv), *то*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{z\in\widehat{\mathcal{C}}} \mathcal{B}_z \cup [\mathrm{Id}], \tag{2.1}$$

где $[\mathrm{Id}]$ *— класс эквивалентности тождественного представления* $\mathcal{B}$ *в* H.

Замечание 2.2. В общем случае слагаемые в правой части (2.1) не дизъюнктны. Однако если $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ (тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{A}/\mathcal{J}_z$), то дизъюнктность имеет место.

2.2. Локализация в алгебрах ПДО на w-многообразиях. Пусть $\mathcal{M}$ — w-многообразие, $\mathcal{M}_0$ — его открытая всюду плотная часть (объединение стратов максимальной размерности), $m = \dim \mathcal{M}_0$. Обозначим через $\mathcal{A}$ C^*-алгебру, порожденную собственными ПДО нулевого порядка в $L^2(\mathcal{M}) \equiv L^2_0(\mathcal{M},\nu)$, а через $\overline{C}(\mathcal{M}_0)$ — замыкание множества $\overline{C}^\infty(\mathcal{M}_0)$ в алгебре $C_b(\mathcal{M}_0)$ ограниченных непрерывных функций. Легко проверяется, что алгебра $\mathcal{A}$ неприводима. Операторы умножения $(f\cdot)$, $f \in \overline{C}(\mathcal{M}_0)$, принадлежат $\mathcal{A}$; это следует из того факта, что $(f\cdot) \in \Psi_0(\mathcal{M})$ при $f \in \overline{C}^\infty(\mathcal{M}_0)$. Мы будем рассматривать $\overline{C}(\mathcal{M}_0)$ как подалгебру в $\mathcal{A}$, отождествляя элементы $f \in \overline{C}(\mathcal{M}_0)$ с операторами $(f\cdot)$. Если $f_1, f_2 \in \overline{C}(\mathcal{M}_0)$ — функции с дизъюнктными носителями, то $f_1 A f_2 \in \overline{\Upsilon(\mathcal{M})} \subset \mathcal{K}L^2(\mathcal{M})$ для $A \in \mathcal{A}$. Значит, $\mathcal{A} \cap \mathcal{K}L^2(\mathcal{M}) \neq \varnothing$, и поэтому $\mathcal{K}L^2(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$ [1, 4.1.10]. Кроме того, отображение $\overline{C}(\mathcal{M}_0) \ni f \mapsto [f] \in \mathcal{A}/\mathcal{K}L^2(\mathcal{M})$ изометрично (это вытекает из существования последовательности $\{u_k\} \subset L^2(\mathcal{M})$, $\|u_k\| = 1$, слабо сходящейся к нулю и такой, что $\|fu_k\| \to \sup|f| = \|(f\cdot); \mathcal{B}L^2(\mathcal{M})\|$).

Для каждой точки $z \in \mathcal{M}$ положим $\mathcal{I}_z = \{f \in C(\mathcal{M}) : f(z) = 0\}$ и обозначим через $\mathcal{J}_z$ наименьший идеал в $\mathcal{A}$, содержащий $\mathcal{I}_z$.

Предложение 2.3. *Имеет место равенство*

$$\widehat{\mathcal{A}} = \bigcup_{z \in \mathcal{M}} (\mathcal{A}/\mathcal{J}_z)^\wedge \cup [\mathrm{Id}],$$

где $[\mathrm{Id}]$ *— класс эквивалентности тождественного представления* $\mathcal{A}$ *в* $L^2(\mathcal{M})$. *Если* $z \neq w$, *то подмножества* $(\mathcal{A}/\mathcal{J}_z)^\wedge$ *и* $(\mathcal{A}/\mathcal{J}_w)^\wedge$ *спектра* $\mathcal{A}^\wedge$ *дизъюнктны.*

Доказательство. Отображение $C(\mathcal{M}) \ni f \mapsto f|\mathcal{M}_0 \in \overline{C}(\mathcal{M}_0)$ изометрически вкладывает $C(\mathcal{M})$ в $\overline{C}(\mathcal{M}_0)$. Все свойства алгебры $\overline{C}(\mathcal{M}_0)$, перечисленные перед формулировкой предложения, справедливы и для ее подалгебры $C(\mathcal{M})$. Остается воспользоваться предложением 2.1 и замечанием 2.2.

2.3. Алгебры $\mathcal{A}/\mathcal{J}_z$ в случае $z \in \mathcal{M}_0$. Фиксируем точку $z \in \mathcal{M}_0$. Через S^*_z будем обозначать единичную сферу в кокасательном пространстве $T^*_z(\mathcal{M}_0)$.

Предложение 2.4. *Отображение* $\Psi_0(\mathcal{M}) \ni A \mapsto a^0|S^*_z$, *где* $a^{(0)}$ *— главный символ ПДО* A, *порождает изоморфизм* $\mathcal{A}/\mathcal{J}_z \cong C(S^*_z)$.

Наметим доказательство. Так как отображение $A \mapsto a^{(0)}$ линейно, мультипликативно и перестановочно с инволюцией (т.е. сопряженному ПДО A^* сопоставляет функцию $\overline{a^{(0)}}$), то достаточно для любого $A \in \Psi_0(\mathcal{M})$ установить равенство

$$\inf\{\|A + J\|; J \in \mathcal{J}_z\} = \|a^{(0)}|S^*_z; C(S^*_z)\|.$$

Покажем, что

$$\inf\{\|A+J\|;\, J\in\mathcal{J}_z\}\geqslant \|a^{(0)}|S_z^*\|. \tag{2.2}$$

Пусть $O\subset\mathcal{M}_0$ — координатная окрестность, содержащая точку z. Выберем произвольную функцию $\chi\in C\mathcal{F}(O)$, удовлетворяющую условиям $|\chi|\leqslant 1$, $\chi(z)=1$. Так как главные символы ПДО A и $\chi A\chi$ совпадают и $\|A+J\|\geqslant\|\chi A\chi+\chi J\chi\|$, то при доказательстве неравенства (2.2) можно предполагать, что носители ядер ПДО A и J содержатся в $O\times O$. Теперь дело сводится к случаю $O=\mathbb{R}^m$, $z=0$. При этом роль $\mathcal{A}$ играет алгебра, порожденная операторами вида $\chi A\chi$, где $A\in\overline{\Psi}_0(\mathbb{R}^m)$, $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, а роль $\mathcal{J}_z=\mathcal{J}_0$ — наименьший идеал в $\mathcal{A}$, содержащий все функции $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ с $\chi(0)=0$. Пусть h — плотность меры ν относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^m$, $L^2(\mathbb{R}^m)$ — пространство функций, квадратично интегрируемых по мере Лебега. Поскольку ПДО A и $h^{1/2}Ah^{-1/2}$ имеют одинаковые главные символы и $\|A;\mathcal{B}L^2(\mathbb{R}^m,\nu)\|=\|h^{1/2}Ah^{-1/2};\mathcal{B}L^2(\mathbb{R}^m)\|$, то можно считать, что ν совпадает с мерой Лебега.

Для каждого $t>0$ введем унитарный оператор $U_t\colon L^2(\mathbb{R}^m)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^m)\colon u\mapsto t^{m/2}u(t\cdot)$. Если $A=\operatorname{Op}a\in\overline{\Psi}_0(\mathbb{R}^m)$, то

$$(U_tAU_t^{-1})u(x)=(2\pi)^{-m/2}\int e^{ix\xi}a(tx,\xi/t)\widehat{u}(\xi)d\xi,\quad u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m).$$

Заменяя здесь A на $A+J$, $J\in\mathcal{J}_z$, и вводя обозначение $A_0=F^{-1}a^{(0)}(0,\xi)F$, получаем, что $U_t(A+J)U_t^{-1}\xrightarrow[t\to 0]{}A_0$ в сильной операторной топологии. Так как сильный предельный переход не увеличивает норму, а оператор F унитарен, то

$$\|A+J\|\geqslant\|A_0\|=\sup\{|a^{(0)}(0,\xi)|;\xi\in\mathbb{R}^m\setminus 0\}=\sup\{|a^{(0)}(0,\xi)|;\xi\in S^{m-1}\}.$$

Это доказывает неравенство (2.2).

Для доказательства противоположного неравенства рассмотрим ПДО B, определенный формулой $Bu(x)=F^{-1}_{\xi\longrightarrow x}a^{(0)}(0,\xi)(1-\chi(\xi))F_{y\longrightarrow\xi}u(y)$, где $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, $0\leqslant\chi\leqslant 1$, $\chi(0)=1$. Пусть $b_1(x,\xi)=a(x,\xi)-a(0,\xi)$, $b_2(x,\xi)=a(0,\xi)-a^{(0)}(0,\xi)(1-\chi(\xi))$. Тогда

$$\chi(A-B)\chi=\chi(\operatorname{Op}b_1)\chi+\chi(\operatorname{Op}b_2)\chi. \tag{2.3}$$

Оператор $\chi(\operatorname{Op} b_1)\chi$ принадлежит $\mathcal{J}_0$. Из равенства $\lim_{|\xi|\to\infty} b_2(x,\xi) = 0$ вытекает, что $\chi(\operatorname{Op} b_2)\chi \in \mathcal{K}L^2(\mathbb{R}^m)$, а так как $\mathcal{K}L^2(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{J}_0$ (ниже этот факт проверяется), то $\chi(\operatorname{Op} b_2)\chi \in \mathcal{J}_0$. Отсюда в силу равенства (2.3) следует включение $\chi(A-B)\chi \in \mathcal{J}_0$. Теперь имеем

$$\inf \|\chi A\chi + J\| \leqslant \|\chi B\chi\| \leqslant \sup |a^{(0)}(0,\xi)(1-\chi(\xi))| \leqslant \sup |a^{(0)}(0,\xi)|.$$

Осталось проверить, что $\mathcal{K}L^2(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{J}_0$. Поскольку $(1-\chi)K \subset \mathcal{J}_0$ для любого оператора $K \in \mathcal{K}L^2(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{A}$, то $\mathcal{J}_0 \cap \mathcal{K}L^2(\mathbb{R}^m) \neq \{0\}$. Кроме того, будучи идеалом неприводимой алгебры, идеал $\mathcal{J}_0$ неприводим [1, 2.11.3]. Значит, $\mathcal{J}_0 \supset \mathcal{K}L^2(\mathbb{R}^m)$.

2.4. Алгебры $\mathcal{A}/\mathcal{J}_z$ в случае $z \in \mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_0$. Пусть $\Lambda = K \times \mathbb{R}^{m-n}$ — поверхность типа клина (напомним, что K обозначает n-мерную коническую поверхность в некотором пространстве $\mathbb{R}^N$). Обозначим через $L^2(\Lambda)$ пространство функций, квадратично интегрируемых по евклидовой поверхностной мере, а через $\mathcal{A}(\Lambda)$ — подалгебру в $\mathcal{B}L^2(\Lambda)$, порожденную операторами вида $\chi A\chi$, где $A \in \Psi_0(\Lambda)$, $\chi \in \overline{C_c^\infty}(\Lambda)$. Для любого $t > 0$ введем унитарный оператор $U_t\colon L^2(\Lambda) \to L^2(\Lambda)$, полагая $U_t u = t^{m/2}u(t\cdot)$. Если $A \in \Psi_0(\Lambda)$ и

$$A_v u(x) = (2\pi)^{-m/2}\int e^{ix\xi} a_v(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi, \quad u \in C_c^\infty(\nu(V)),$$

— запись ПДО A в локальных координатах $v\colon V \to \mathbb{R}^m$ (см. 1.3), то

$$\begin{aligned}(U_t A U_t^{-1})_v(x) &= (2\pi)^{-m/2}\int e^{ix\xi} a_v(tx,\xi/t)\widehat{u}(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-m/2}\int e^{ix\xi}\widetilde{a}_v(tx,|x^1|\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что формула

$$A_0 u = \lim_{t\to 0}(U_t A U_t^{-1})u, \quad u \in C_c^\infty(\Lambda), \tag{2.4}$$

определяет ПДО A_0, допускающий продолжение до непрерывного оператора в $L^2(\Lambda)$, причем $\|A_0\| \leqslant \|A\|$. В локальных координатах

$$(A_0)_v u(x) = (2\pi)^{-m/2}\int e^{ix\xi}(\widetilde{a}_v)_0(\varphi,|x^1|\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi, \tag{2.5}$$

где $(\widetilde{a}_v)_0(\varphi,\xi) = \lim_{t\to 0}\widetilde{a}_v(tx,\xi)$, $\varphi = x^1/|x^1|$.

Обозначим через $\mathcal{A}_0(\Lambda)$ наименьшую подалгебру в $\mathcal{B}L^2(\Lambda)$, содержащую все операторы A_0 вида (2.4), а через $\mathcal{J}_0(\Lambda)$ — идеал алгебры $\mathcal{A}_0(\Lambda)$, порожденный операторами умножения на функции $\chi \in C_c(\overline{\Lambda})$ с $\chi(0) = 0$. Согласно сказанному выше, отображение $\Psi_0(\Lambda) \ni A \mapsto A_0$ продолжается до эпиморфизма $\mathcal{A}(\Lambda) \to \mathcal{A}_0(\Lambda)$, ядро которого содержит идеал $\mathcal{J}_0(\Lambda)$. Поэтому определен эпиморфизм

$$\mathcal{A}(\Lambda)/\mathcal{J}_0(\Lambda) \ni [A] \mapsto A_0 \in \mathcal{A}_0(\Lambda), \tag{2.6}$$

в действительности являющийся изоморфизмом. Для доказательства заметим,что если A_0 — оператор, соответствующий по формуле (2.4) собственному ПДО A, то при любом выборе функции $\chi \in \overline{C_c^\infty}(\Lambda)$ оператор $\chi A_0 \chi$ также будет собственным (это вытекает из определения собственного ПДО и равенства $t^m G(tx,ty) = G_t(x,y)$, $t > 0$, в котором G и G_t обозначают ядра ПДО A и $U_t A U_t^{-1}$). Если $\chi \in C_c(\overline{\Lambda}) \cap C^\infty(\Lambda)$, $\chi(0) = 1$, то образом класса вычетов $[\chi A_0 \chi]$ при отображении (2.6) будет оператор A_0. Отсюда, ввиду соотношений $A - \chi A_0 \chi \in \mathcal{J}_0(\Lambda)$ и $\|\chi A_0 \chi\| \leqslant (\sup|\chi|^2)\|A_0\|$, следует инъективность отображения (2.6).

Пусть теперь $\mathcal{M}$ — w-многообразие, $z \in \mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_0$ — произвольная фиксированная точка, $\varkappa\colon O \to \overline{\Lambda}$, $O \ni z$, — локальная карта на $\mathcal{M}$, $\varkappa(z) = 0$. Легко видеть (ср. 2.3), что $\mathcal{A}/\mathcal{J}_z \cong \mathcal{A}(\Lambda)/\mathcal{J}_0(\Lambda)$. Изоморфизм устанавливается отображением

$$\mathcal{A}/\mathcal{J}_z \ni A + \mathcal{J}_z \mapsto (\varkappa_0^{-1})^*(\chi A \chi)\varkappa_0^* + \mathcal{J}_0(\Lambda) \in \mathcal{A}(\Lambda)/\mathcal{J}_0(\Lambda),$$

где $\varkappa_0 = \varkappa|(O \cap \mathcal{M}_0)$, $\chi \in C\mathcal{F}(O)$, $\chi = 1$ вблизи точки z. Применяя к классу вычетов $[(\varkappa_0^{-1})^*(\chi A \chi)\varkappa_0^*]$ отображение (2.6), мы получаем некоторый элемент алгебры $\mathcal{A}_0(\Lambda)$, за которым сохраним обозначение A_0. Итак, имеет место

Предложение 2.5. *Для любой точки $z \in \mathcal{M}\setminus\mathcal{M}_0$ отображение $\mathcal{A} \ni A \mapsto A_0 \in \mathcal{A}_0(\Lambda)$, где A_0 — оператор, определенный формулой*

$$A_0 u = \lim_{t\to 0} U_t(\varkappa_0^{-1})^*(\chi A \chi)\varkappa_0^* U_t^{-1} u, \quad u \in C_c^\infty(\Lambda),$$

порождает изоморфизм $\mathcal{A}/\mathcal{J}_z \cong A_0(\Lambda)$.

Инвариантный смысл элементов алгебры $\mathcal{A}/\mathcal{J}_z$ будет выяснен в дальнейшем.

2.5. Алгебра $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m_n)$. Для гладких функций $\mathbb{R}^m_n \times \mathbb{R}^m_n \ni (x,\xi) \mapsto f(x,\xi)$, удовлетворяющих условию $f(x,\xi) = f(tx^1, 0, \xi)$, $t > 0$, вместо $f(x,\xi)$ будем использовать запись $f(\varphi,\xi)$.

Пусть $\widetilde{a} \in \widetilde{S}_0(\mathbb{R}^m_n)$ — предсимвол, удовлетворяющий указанному условию. Рассмотрим ПДО A, заданный на функциях $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^m_n)$, $m > n$, равенством

$$Au(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{ix\xi} \widetilde{a}(\varphi, |x^1|\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \tag{2.7}$$

(ср. с формулой (2.5)). Обозначим через F_1 и F_2 частичные преобразования Фурье в $\mathbb{R}^m$ по переменным x^1 и x^2 соответственно. Тогда

$$(F_2 A F_2^{-1} v)(x^1, \xi^2) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix^1\xi^1} \widetilde{a}(\varphi, |x^1|\xi)(F_1)_{y^1 \to \xi^1} v(y^1, \xi^2) d\xi^1$$

для $v \in F_2(C^\infty_c(\mathbb{R}^m_n))$. Сопоставим оператору A оператор-функцию $\xi^2 \to A(\xi^2)$,

$$A(\xi^2) u(x^1) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix^1\xi^1} \widetilde{a}(\varphi, |x^1|\xi^1, |x^1|\xi^2) \widetilde{u}(\xi^1) d\xi^1 \tag{2.8}$$

(здесь $\widehat{u}$ обозначает преобразование Фурье функции u в $\mathbb{R}^n$). Легко видеть, что $A(\xi^2) \in \overline{\Psi}_0(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ для всех $\xi^2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Из очевидного равенства

$$\|F_2 A F_2^{-1} v\| = \left(\int \|A(\xi^2) v(\cdot, \xi^2)\|^2 d\xi^2 \right)^{1/2},$$

учитывая унитарность оператора F_2, выводим, что

$$\|A; \mathcal{B}L^2(\mathbb{R}^m)\| = \sup\{\|A(\xi^2); \mathcal{B}L^2(\mathbb{R}^n)\|; \xi^2 \in \mathbb{R}^{m-n}\}.$$

Далее, при $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} A(t\xi^2) u(x^1) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix^1\xi^1} \widetilde{a}(\varphi, |x^1|\xi^1, |x^1| t\xi^2) \widehat{u}(\xi^1) d\xi^1 \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{itx^1\xi^1} \widetilde{a}(\varphi, t|x^1|\xi^1, t|x^1|\xi^2) t^n \widehat{u}(t\xi^1) d\xi^1 \\ &= U_t A(\xi^2) U_t^{-1} u(x^1), \end{aligned}$$

где $U_t u(x^1) = t^{n/2}u(tx^1)$. Поскольку операторы U_t унитарны, то $\|A(\xi^2)\| = \|A(t\xi^2)\|$, $t > 0$. Если $t \to 0$, то $A(t\xi^2) \to A(0)$ в сильной операторной топологии. Значит, $\|A(0)\| \leqslant \sup\{\|A(\xi^2)\|;\ \xi^2 \in \mathbb{R}^{m-n}\}$, и потому

$$\|A; BL^2(\mathbb{R}^m)\| = \sup\{\|A(\theta); BL^2(\mathbb{R}^n)\|; \theta \in S^{m-n-1}\}. \tag{2.9}$$

Итак, алгебра $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^m_n)$, порожденная операторами (2.7), изоморфна алгебре $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m_n)$, порожденной функциями $S^{m-n-1} \ni \theta \mapsto A(\theta) \in BL^2(\mathbb{R}^n)$, где $A(\theta)$ — операторы вида (2.8) с заменой ξ^2 на θ. Легко проверить, что все функции из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m_n)$ непрерывны по норме. Отметим, что алгебра $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$, которая порождается операторами A_0, соответствующими элементам $A \in \Psi_0(\mathbb{R}^m_n)$ по формуле (2.4), содержится в $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^m_n)$. В дальнейшем будет показано (см. предложение 3.1, а также сказанное в начале раздела 3.4), что $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n) = \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^m_n)$. Таким образом, $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^m_n)$.

Подведем итог сказанному в настоящем параграфе. Пусть $\mathcal{M}$ — w-многообразие. Согласно предложению 2.3, описание спектра алгебры $\mathcal{A}$, порожденной в $L^2(\mathcal{M})$ собственными ПДО нулевого порядка, сводится к описанию спектров локальных алгебр $\mathcal{A}/\mathcal{J}_z$, $z \in \mathcal{M}$. Если $z \in \mathcal{M}_0$, то ввиду изоморфизма $\mathcal{A}/\mathcal{J}_z \cong C(S^*_z)$ (предложение 2.4) спектр $(\mathcal{A}/\mathcal{J}_z)^\wedge$ отождествляется с кокасательной сферой S^*_z. В случае $z \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$ имеем изоморфизм $\mathcal{A}/\mathcal{J}_z \cong \mathcal{A}_0(\Lambda)$ (предложение 2.5), где $\Lambda = K \times \mathbb{R}^{m-n}$ — поверхность типа клина, являющаяся локальной моделью для $\mathcal{M}$ в окрестности точки z. Тем самым задача об описании спектра алгебры $\mathcal{A}$ редуцирована к аналогичной задаче для $\mathcal{A}_0(\Lambda)$.

Что касается изоморфизма $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^m_n)$, установленного в разделе 2.5, то он в дальнейшем играет вспомогательную роль.

§3. Вспомогательные утверждения

3.1. Алгебры собственных и несобственных ПДО в $\mathbb{R}^m_n$. В данном разделе (по причинам, которые объясняются в §4) мы рассматриваем ПДО в весовых пространствах $L^2_p(\mathbb{R}^m_n)$. Для каждого $p \in \mathbb{R}$ (соответственно $p \in (-n/2, n/2)$) обозначим через $\mathcal{A}(\mathbb{R}^m_n; p)$ (соответственно $\overline{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^m_n; p)$) C^*-алгебру, порожденную в пространстве $L^2_p(\mathbb{R}^m_n)$ собственными ПДО (соответственно всеми ПДО) нулевого порядка.

Предложение 3.1. *Для всех $p \in (-n/2, n/2)$ алгебры $\mathcal{A}(\mathbb{R}^m_n; p)$ и $\overline{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^m_n; p)$ совпадают.*

Лемма 3.2. *Пусть $G \in C(\mathbb{R}^m_n \times \mathbb{R}^m_n)$, и пусть существуют такие числа $\delta \in (0,1)$, $N \geqslant m$ и $M > 0$, что*

1) $G(x,y) = 0$ *при* $|x^1|/|y^1| \in (\delta, \delta^{-1})$,
2) $|G(x,y)| \leqslant M|x^1|^{N-m}|x-y|^{-N}$.

Тогда для каждого $p \in (-n/2, n/2)$ оператор

$$A\colon u \mapsto \int G(\cdot, y)u(y)dy, \quad u \in C_c(\mathbb{R}^m_n), \tag{3.1}$$

продолжается до непрерывного оператора $L^2_p(\mathbb{R}^m_n) \longrightarrow L^2_p(\mathbb{R}^m_n)$, причем

$$\|A; BL^2_p(\mathbb{R}^m_n)\| \leqslant MC_{m,n,p}(1-\delta)^{-N}\delta^{n/2-|p|}. \tag{3.2}$$

Замечание. При любом фиксированном $\delta \in (0,1)$ непрерывность оператора (3.1) доказана в [2] (лемма 3.3). Из приведенных там рассуждений легко следует оценка (3.2).

Доказательство предложения 3.1. Пусть $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\zeta(t) = 1$ при $t \leqslant 1$, $\zeta(t) = 0$ при $t \geqslant 2$. Положим $\chi_\delta(x,y) = \zeta(\delta|x^1|/|y^1|)\zeta(\delta|y^1|/|x^1|)\zeta(\delta|x^2 - y^2|)$, $\delta \in (0,1)$. Ясно, что $\chi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^m_n \times \mathbb{R}^m_n)$, причем $\chi_\delta(x,y) = 1$, если $|x^1|/|y^1| \in (\delta, \delta^{-1})$ и $|x^2 - y^2| < \delta^{-1}$, $\chi_\delta(x,y) = 0$, если $|x^1|/|y^1| \notin (\delta/2, 2\delta^{-1})$ или $|x^2 - y^2| > 2\delta^{-1}$. Кроме того, функция χ_δ однородна степени нуль по совокупности переменных x^1, y^1. Пусть $a \in S_0(\mathbb{R}^m_n)$, $A = \operatorname{Op} a$. Для каждого $\delta \in (0,1)$ введем оператор

$$A_\delta u(x) = (2\pi)^{-m/2}\iint e^{i(x-y)\xi}\chi_\delta(x,y)a(x,\xi)u(y)dyd\xi, \quad u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^m_n).$$

Поскольку $A_\delta \in \Psi_0(\mathbb{R}^m_n)$ [2], то для доказательства предложения достаточно проверить, что $\lim_{\delta\to 0}\|A - A_\delta; BL^2_p(\mathbb{R}^m_n)\| = 0$.

Пусть $\zeta_\varepsilon(\xi) = \zeta(\varepsilon|\xi|)$, $\varepsilon > 0$, $b_{\delta,\varepsilon} = (1-\chi_\delta(x,y))a(x,\xi)\zeta_\varepsilon(|x^1|\xi)$. Из соотношений

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{Op} b_{\delta,\varepsilon})u(x)\\
&= (2\pi)^{-m}\iint e^{i(x-y)\xi}(1-\chi_\delta(x,y))a(x,\xi)\zeta_\varepsilon(|x^1|\xi)u(y)dyd\xi\\
&= (2\pi)^{-m}\iint e^{i(x-y)\xi/|x^1|}(1-\chi_\delta(x,y))|x^1|^{2N-m}|x-y|^{-2N}(-\Delta_\xi)^N\\
&\qquad \times (\widetilde{a}(x,\xi)\zeta_\varepsilon(\xi))u(y)dyd\xi,
\end{aligned}$$

где $N > m/2$, вытекает, что для ядра

$$G_{\delta,\varepsilon}(x,y) = (2\pi)^{-m}(1-\chi_\delta(x,y))|x^1|^{2N-m}|x-y|^{-2N} \\ \times \int e^{i(x-y)\xi|x^1|}(-\Delta_\xi)^N(\widetilde{a}(x,\xi)\zeta_\varepsilon(\xi))d\xi$$

оператора $\operatorname{Op} b_{\delta,\varepsilon}$ имеет место оценка $|G_{\delta,\varepsilon}(x,y)| \leqslant M|x^1|^{2N-m}|x-y|^{-2N}$ с постоянной M, не зависящей от δ и ε. Поскольку, кроме того, $G_{\delta,\varepsilon}(x,y) = 0$ при $|x^1|/|y^1| \in (\delta, \delta^{-1})$, то

$$\|\operatorname{Op} b_{\delta,\varepsilon}; \mathcal{B}L_p^2(\mathbb{R}_n^m)\| \leqslant MC_{m,n,p}(1-\delta)^{-2N}\delta^{n/2-|p|} \tag{3.3}$$

в силу леммы 3.2. Из формулы

$$(\operatorname{Op} b_{\delta,\varepsilon})u(x) \\ = (2\pi)^{-m}\iint e^{i(x-y)\xi}a(x,\xi)(1-\Delta_y)^N((1-\chi_\delta(x,y))u(y) \\ \times \zeta_\varepsilon(|x^1|\xi)\langle\xi\rangle^{-2N}dyd\xi, \quad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_n^m),$$

следует, что $(\operatorname{Op} b_{\delta,\varepsilon})u(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (A - A_\delta)u(x)$ равномерно по $x \in \mathbb{R}_n^m$. Отсюда, учитывая (3.3), выводим, что $\operatorname{Op} b_{\delta,\varepsilon} \to A - A_\delta$ в слабой операторной топологии. Значит,

$$\|A - A_\delta; \mathcal{B}L_p^2(\mathbb{R}_n^m)\| \leqslant MC_{m,n,p}(1-\delta)^{-2N}\delta^{n/2-|p|}.$$

3.2. Операторы $E(\lambda)^{\pm 1}$. По поводу всех фактов, излагаемых в настоящем разделе, см. [9].

На функциях $w \in C^\infty(S^{n-1})$ при любом комплексном λ, за исключением точек $\lambda = i(k+n/2)$ (соответственно $\lambda = -i(k+n/2)$), $k \in \mathbb{Z}_+$, определим оператор $E(\lambda)$ (соответственно $E(\lambda)^{-1}$) формулой

$$E(\lambda)^{\pm 1}w(\varphi) \\ = (2\pi)^{-n/2}e^{i\pi(n/2\pm i\lambda)}\Gamma(n/2 \pm i\lambda)\int\limits_{S^{n-1}}(\mp\varphi\omega + i0)^{\mp i\lambda - n/2}w(\omega)d\omega.$$

Оператор-функция $\lambda \mapsto E(\lambda)^{\pm 1} : C^\infty(S^{n-1}) \to C^\infty(S^{n-1})$ голоморфна всюду, кроме указанных выше исключительных точек, в которых она имеет простые полюсы. При $\lambda = \pm i(k + n/2)$ операторы $E(\lambda)$ и $E(\lambda)^{-1}$ взаимно обратны.

Для любых $s \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ определим пространство $H^s(\lambda, S^{n-1})$ как пополнение $C^\infty(S^{n-1})$ по норме

$$\|w; H^s(\lambda, S^{n-1}\| = \left(\sum_{j,k}(1 + j^2 + |\lambda|^2\right)^s |w_{jk}|^2)^{1/2};$$

здесь w_{jk}, $0 \leqslant j < +\infty$, $0 \leqslant k \leqslant k_j$, — коэффициенты разложения функции w в ряд по сферическим гармоникам Y_{jk}. При фиксированном λ норма в $H^s(\lambda, S^{n-1})$ эквивалентна норме

$$\|w; H^{(s)}(S^{n-1})\| = \left(\sum_{j,k}(1 + j^2)^s |w_{jk}|^2\right)^{1/2}$$

в пространстве Соболева $H^{(s)}(S^{n-1})$ (далее вместо $H^s(\lambda, S^{n-1})$ и $H^{(s)}(S^{n-1})$ пишем $H^s(\lambda)$ и $H^{(s)}$). На любом замкнутом множестве $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}$, расположенном в некоторой полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < h$ и не содержащем точек $\lambda = i(k + n/2)$ ($\lambda = -i(k + n/2)$), имеет место оценка

$$\|E(\lambda)^{\pm 1}; H^s(\lambda) \to H^{s \pm \operatorname{Im}\lambda}(\lambda)\| \leqslant C(\mathcal{F}). \tag{3.4}$$

В следующем разделе важную роль будут играть операторы

$$\mathfrak{B}(\lambda, \mu)w(\varphi) = E_{\omega \to \varphi}(\mu)^{-1} f(\varphi, \omega) E_{\psi \to \omega}(\lambda) w(\psi),$$
$$f \in C^\infty(S^{n-1} \times S^{n-1}).$$

Лемма 3.3. *Пусть $\mathcal{F}$ — замкнутое множество, расположенное в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| < h$ и не содержащее точек $\lambda = \pm i(k + n/2)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Если $(\lambda, \mu) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $\tau \equiv \operatorname{Im}(\lambda - \mu) \geqslant 0$, то при любом $s \geqslant 0$ выполняются неравенства*

$$\|\mathfrak{B}(\lambda, \mu); H^{(s)} \to H^{(s+\tau)}\| \leqslant C(1 + |\lambda - \mu|)^{s+h}(1 + |\lambda|)^s \|f\|_q,$$
$$\|\mathfrak{B}(\lambda, \mu); H^{(s)} \to H^{(s)}\| \leqslant C(1 + |\lambda - \mu|)^{s+h}(1 + |\lambda|)^s (1 + |\mu|)^{-\tau} \|f\|_q,$$

где C и q зависят лишь от $\mathcal{F}$ и s, $\|f\|_q = \|f; C^q(S^{n-1} \times S^{n-1})\|$.

Доказательство. Из неравенства $(1+j^2+|\mu|^2)^t \leqslant 2^{|t|}(1+|\lambda-\mu|^2)^{|t|}(1+j^2+|\lambda|^2)^t$, учитывая (3.4), выводим, что

$$\begin{aligned}&\|E(\mu)^{-1}E(\lambda); H^s(\lambda) \to H^{s+\tau}(\mu)\|\\&\quad\leqslant C_1(\mathcal{F})(1+|\lambda-\mu|^2)^{|s+\operatorname{Im}\lambda|/2}\\&\quad\leqslant C_1(\mathcal{F})(1+|\lambda-\mu|)^{s+h}, \quad (\lambda,\mu) \in \mathcal{F}\times\mathcal{F}.\end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{B}(\lambda,\mu) = \mathfrak{B}(\mu,\mu)E(\mu)^{-1}E(\lambda)$ и

$$\|\mathfrak{B}(\mu,\mu)w; H^{s+\tau}(\mu)\| \leqslant C_2(\mathcal{F})\|f\|_q\|w; H^{s+\tau}(\mu)\|$$

при некотором $q = q(s)$ ([9, предложение 3.1.3]), то

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{B}(\lambda,\mu)w; H^{s+\tau}(\mu)\| &\leqslant C(\mathcal{F})(1+|\lambda-\mu|)^{s+h}\|f_q\|w; H^s(\lambda)\|\\&\leqslant C(\mathcal{F})(1+|\lambda-\mu|)^{s+h}(1+|\lambda|^s)\|f\|_q\|w; H^{(s)}\|.\end{aligned}$$

Утверждение леммы теперь следует из очевидных оценок $\|v; H^{(s+\tau)}\| \leqslant \|v, H^{s+\tau}(\mu)\|$, $\|v; H^{(s)}\| \leqslant (1+|\mu|)^{-\tau/2}\|v; H^{s+\tau}(\mu)\|$, примененных к $v = \mathfrak{B}(\lambda,\mu)w$. •

Для $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ положим $r = |x|$, $\varphi = x/|x|$. Преобразование Меллина функции $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ определим равенством

$$(Mu)(\lambda,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty r^{-i\lambda-1}u(r\varphi)dr, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Имеют место формула обращения

$$u(r\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\operatorname{Im}\lambda=\tau} r^{i\lambda}Mu(\lambda,\varphi)d\lambda, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

и равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty r^{2p}|u(r\varphi)|^2dr = \int_{\operatorname{Im}\lambda=\tau} |Mu(\lambda,\varphi)|^2d\lambda, \quad \tau = p+1/2. \tag{3.5}$$

Полагая $U(\lambda,\varphi) = Mu(\lambda + in/2, \varphi)$, $l_p = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda = p\}$, выводим из (3.5), что

$$\int |x|^{2p}|u(x)|^2 dx = \iint\limits_{l_p\times S^{n-1}} |U(\lambda,\varphi)|^2 d\varphi d\lambda.$$

Таким образом, отображение $C_c^\infty(\mathbb{R}^n\setminus 0) \ni u \mapsto U$ продолжается до изометрического изоморфизма $L_p^2(\mathbb{R}^n\setminus 0) \cong L^2(l_p\times S^{n-1})$.

При любом $p\in(-n/2, n/2)$ преобразование Фурье функции $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}(Fu)(\xi) &= (M^{-1})_{in/2-\lambda\to\rho} E_{\psi\to\omega}(\lambda) M_{|y|\to\lambda+in/2} u(y)\\ &= (M^{-1})_{in/2-\lambda\to\rho} E_{\psi\to\omega}(\lambda) U(\lambda,\psi), \quad \operatorname{Im}\lambda = p,\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\psi = y/|y|$, $\rho = |\xi|$, $\omega = \xi/|\xi|$. Для обратного преобразования справедлива формула

$$(F^{-1}v)(x) = M^{-1}_{\mu+in/2\to r} E_{\omega\to\varphi}(\mu)^{-1} M_{\rho\to in/2-\mu} v(\rho\omega), \quad \operatorname{Im}\mu = p. \tag{3.7}$$

3.3. Специальное представление ПДО нулевого порядка в $\mathbb{R}^n\setminus 0$. Мы придерживаемся обозначений, введенных в предыдущем разделе: $x, y, \xi \in \mathbb{R}^n\setminus 0$, $r = |x|$, $\varphi = x/|x|$, $\psi = y/|y|$, $\rho = |\xi|$, $\omega = \xi/|\xi|$, $U(\lambda,\psi) = M_{|y|\to\lambda+in/2}u(y)$. Пусть $a \in S_0(\mathbb{R}^n\setminus 0)$, $A = \operatorname{Op} a$. Для $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ и $p\in(-n/2,n/2)$ из (3.6) и (3.7) следует формула

$$\begin{aligned}Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} &\int\limits_{\operatorname{Im}\mu=p} r^{i\mu-n/2} E_{\omega\to\varphi}(\mu)^{-1} d\mu\\ &\times \int\limits_0^\infty \rho^{i\mu-1} a(r\varphi,\rho\omega) d\rho \int\limits_{\operatorname{Im}\lambda=p} \rho^{-i\lambda} E_{\psi\to\omega}(\lambda) U(\lambda,\psi) d\lambda.\end{aligned}$$

Положим $\widetilde{a}^{(0)}(x,\xi) = \lim_{t\to\infty}\widetilde{a}(x,t\xi)$, $\widetilde{a}^{(1)} = \widetilde{a} - \widetilde{a}^{(0)}$ (как обычно, $\widetilde{a}$ обозначает предсимвол, соответствующий символу a). Тогда $A = \operatorname{Op} a^{(0)} + \operatorname{Op} a^{(1)}$, где

$a^{(0)}(x,\xi) = \widetilde{a}^{(0)}(x,|x|\xi) = \widetilde{a}^{(0)}(x,\xi)$, $a^{(1)}(x,\xi) = \widetilde{a}^{(1)}(x,|x|\xi)$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{Op}\, a^{(0)})u(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathrm{Im}\,\lambda=p} r^{i\lambda-n/2} E_{\omega\longrightarrow\varphi}(\lambda)^{-1} a^{(0)}(r\varphi,\omega) E_{\psi\longrightarrow\omega}(\lambda) U(\lambda,\psi)\, d\lambda,\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{Op}\, a^{(1)})u(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathrm{Im}\,\mu=p} r^{i\mu-n/2} E_{\omega\longrightarrow\varphi}(\mu)^{-1} d\mu \\ &\times \int\limits_0^\infty \rho^{i\mu-1} a^{(1)}(r\varphi,\rho\omega)\, d\rho \int\limits_{\mathrm{Im}\,\lambda=p} \rho^{-i\lambda} E_{\psi\longrightarrow\omega}(\lambda) U(\lambda,\psi)\, d\lambda.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Преобразуем интеграл (3.9). Пусть $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\zeta(t) = 1$ при $t \leqslant 1$, $\zeta(t) = 0$ при $t \geqslant 2$, и пусть $\widetilde{a}_\delta^{(1)}(x,\xi) = \zeta(\delta|\xi|)\zeta(\delta/|\xi|)\widetilde{a}^{(1)}(x,\xi)$, $a_\delta^{(1)}(x,\xi) = \widetilde{a}_\delta^{(1)}(x,|x|\xi)$, $\delta \in (0,1)$. Подставляя в формулу (3.9) $\widetilde{a}_\delta^{(1)}$ вместо $\widetilde{a}^{(1)}$ и выполняя замену переменной $\rho \to \rho/r$, получаем

$$\begin{aligned}(\mathrm{Op}\, a_\delta^{(1)})u(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathrm{Im}\,\mu=p} E_{\omega\longrightarrow\varphi}(\mu)^{-1} d\mu \\ &\times \int\limits_0^\infty d\rho \int\limits_{\mathrm{Im}\,\lambda=p} r^{i\lambda-n/2} \rho^{-i(\lambda-\mu)-1} \widetilde{a}_\delta^{(1)}(r\varphi,\rho\omega) E_{\psi\longrightarrow\omega}(\lambda) U(\lambda,\psi)\, d\lambda.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Так как $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$, то функция $l_p \ni \lambda \mapsto U(\lambda,\cdot) \in C^\infty(S^{n-1})$ быстро убывает при $|\lambda| \to \infty$. Из (3.4) и оценок $\|w; H^{(s)}\| \leqslant \|w; H^s(\lambda)\| \leqslant (1+|\lambda|)^s \|w; H^{(s)}\|$, $s \geqslant 0$, следует, что аналогичным свойством обладает и функция $\lambda \mapsto E_{\psi\longrightarrow\cdot}(\lambda) U(\lambda,\psi)$. Поэтому в (3.10) интегрирования по λ и по ρ можно переставить. Полагая $(M\widetilde{a}_\delta^{(1)})(x,\nu,\omega) = M_{\rho\longrightarrow\nu} \widetilde{a}_\delta^{(1)}(x,\rho\omega)$, приходим к формуле

$$(\operatorname{Op} a_\delta^{(1)})u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\operatorname{Im}\mu = p} E_{\omega\longrightarrow\varphi}(\mu)^{-1} d\mu \times \int\limits_{\operatorname{Im}\lambda = p} r^{i\lambda - n/2} (M\widetilde{a}_\delta^{(1)})(r\varphi, \lambda - \mu, \omega) E_{\psi\longrightarrow\omega}(\lambda) U(\lambda, \psi) d\lambda.$$

При фиксированных x и μ внутренний интеграл в правой части этой формулы сходится в топологии пространства $C^\infty(S^{n-1})$. Кроме того, мероморфная функция

$$(\lambda, \mu \mapsto E_{\omega\longrightarrow\varphi}(\mu)^{-1} (M\widetilde{a}_\delta^{(1)})(r\varphi, \lambda - \mu, \omega) E_{\psi\longrightarrow\omega}(\lambda) U(\psi)$$

быстро убывает, когда $|\lambda| + |\mu| \to \infty$, $|\operatorname{Im}\lambda|$, $|\operatorname{Im}\mu| < h$. Поскольку в области $\{(\lambda, \mu) : \operatorname{Im}\lambda < n/2, \operatorname{Im}\mu > -n/2\}$ указанная функция голоморфна, то

$$(\operatorname{Op} a_\delta^{(1)})u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\operatorname{Im}\lambda = p} r^{i\lambda - n/2} d\lambda \times \int\limits_{\operatorname{Im}\mu = p - \tau} E_{\omega\longrightarrow\varphi}(\mu)^{-1} (M\widetilde{a}_\delta^{(1)})(r\varphi, \lambda - \mu, \omega) E_{\psi\longrightarrow\omega}(\lambda) U(\lambda, \psi) d\mu, \quad \tau < p + n/2. \tag{3.11}$$

Из равенства

$$(\operatorname{Op} a_\delta^{(1)})u(x) = (2\pi)^{-n/2} \iint e^{i(x-y)} a_\delta^{(1)}(x, \xi) \langle\xi\rangle^{-2N} (1 - \Delta)^N u(y) dy d\xi$$

при $N > n/2$ вытекает, что

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0} (\operatorname{Op} a_\delta^{(1)})u(x) = (\operatorname{Op} a^{(1)})u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus 0. \tag{3.12}$$

Чтобы осуществить аналогичный предельный переход в правой части формулы (3.11), нам понадобится

Лемма 3.4. *При фиксированных* $r > 0$ *и* $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *для любых* $N, q \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо соотношение*

$$\sup\{|\nu|^N \| M(\widetilde{a}_\delta^{(1)} - a^{(1)})(r\cdot, \nu, \cdot)\|_q; \varepsilon < \operatorname{Im}\nu < 1 - \varepsilon\} = O(\delta^\varepsilon)$$

(*напомним, что* $\|\cdot\|_q$ *обозначает норму в пространстве* $C^q(S^{n-1} \times S^{n-1})$).

Доказательство. Так как $\widetilde{a}^{(1)}(r\varphi, \rho\omega) = \widetilde{a}(r\varphi, \rho\omega) - \widetilde{a}^{(0)}(r\varphi, \omega)$, то (см. определение 1.1)

$$\sup\{|\partial_\rho^k \widetilde{a}^{(1)}(r\varphi, \rho\omega)|; (\varphi, \omega) \in S^{n-1} \times S^{n-1}\} = O((1+\rho)^{-k-1}), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.13}$$

Легко видеть, что $\partial_\rho^k(\zeta(\delta\rho)\zeta(\delta/\rho)) = O(\rho^{-k})$ равномерно по $\delta \in (0, 1)$. Следовательно, подынтегральная функция в формуле

$$\begin{aligned} &M(\widetilde{a}_\delta^{(1)} - \widetilde{a}^{(1)})(r\varphi, \nu, \omega) \\ &\quad = (2\pi)^{-1/2}[i\nu \ldots (i\nu - N + 1)]^{-1} \int_0^\infty \rho^{-i\nu+N-1} \partial_\rho^N (\widetilde{a}_\delta^{(1)} - \widetilde{a}^{(1)})(r\varphi, \rho\omega) d\rho \end{aligned}$$

оценивается через $\rho^{\operatorname{Im}\nu - 1}(1+\rho)^{-1}$. Поскольку, кроме того, $(\widetilde{a}_\delta^{(1)} - \widetilde{a}^{(1)})(r\varphi, \rho\omega) = 0$ при $\rho \in (\delta, \delta^{-1})$, то

$$|M(\widetilde{a}_\delta^{(1)} - \widetilde{a}^{(1)})(r\varphi, \nu, \omega)| \leqslant C_N \delta^\varepsilon |\nu|^{-N}, \quad \operatorname{Im}\nu \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon).$$

Аналогичным оценкам подчиняются и производные $\partial_\varphi^\alpha \partial_\omega^\beta M(\widetilde{a}_\delta^{(1)} - \widetilde{a}^{(1)})(r\varphi, \nu, \omega)$, так как при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ функция $\partial_\varphi^\alpha \partial_\omega^\beta \widetilde{a}^{(1)}(r\varphi, \rho\omega)$ удовлетворяет условию (3.13).

Замечание 3.5. Из леммы 3.4 вытекает, что

$$\sup\{|\nu|^N \| M\widetilde{a}^{(1)}(r\cdot, \nu, \cdot)\|_q; \varepsilon < \operatorname{Im}\nu < 1 - \varepsilon\} < +\infty$$

для всех N, $q \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$, поскольку этим свойством, очевидно, обладает функция $\widetilde{a}_\delta^{(1)}$.

Вернемся к формуле (3.11). Пусть $\tau \in (0,1)$, $\tau < p+n/2$. Из лемм 3.3 и 3.4 следует, что при любых фиксированных $r > 0$, $s \geqslant 0$ и $N \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}&\|E_{\omega\to\cdot}(\mu)^{-1}M(\widetilde{a}_\delta^{(1)} - \widetilde{a}^{(1)})(r\varphi, \lambda-\mu, \omega)E_{\psi\to\omega}(\lambda)U(\lambda,\psi); H^{(s+\tau)}\| \\ &\qquad \leqslant C_N\delta^\varepsilon(1+|\lambda-\mu|)^{-N}(1+|\lambda|)^{-N}, \quad \operatorname{Im}\lambda = p, \ \operatorname{Im}\mu = p-\tau.\end{aligned}$$

Поэтому в правой части (3.11) возможен предельный переход под знаком интеграла при $\delta \to 0$. Учитывая (3.12), получаем

$$\begin{aligned}&(\operatorname{Op} a^{(1)})u(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\operatorname{Im}\lambda=p} r^{i\lambda-n/2}d\lambda \\ &\times \int\limits_{\operatorname{Im}\mu=p-\tau} E_{\omega\to\varphi}(\mu)^{-1}(M\widetilde{a}^{(1)})(r\varphi,\lambda-\mu,\omega)E_{\psi\to\omega}(\lambda)U(\lambda,\psi)d\mu.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Итак, если $a \in S_0(\mathbb{R}^m_m)$, $A = \operatorname{Op} a$, то в соответствии с равенством $a = a^{(0)} + a^{(1)}$ ПДО A можно записать в виде $\operatorname{Op} a^{(0)} + \operatorname{Op} a^{(1)}$, причем для операторов $\operatorname{Op} a^{(0)}$ и $Opa^{(1)}$ справедливы представления (3.8) и (3.14). Отметим еще раз, что в этих представлениях $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$, $U(\lambda,\psi) = M_{|y|\to\lambda+in/2}u(y)$, τ — любое число из интервала $(0, \min(1, p+n/2))$. Вводя обозначения

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{A}^{(0)}(r,\lambda)w)(\varphi) \\ &\quad = E_{\omega\to\varphi}(\lambda)^{-1}a^{(0)}(r\varphi,\omega)E_{\psi\to\omega}(\lambda)w(\psi),\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{A}^{(1)}(r,\lambda)w)(\varphi) \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\operatorname{Im}\mu=p-\tau} E_{\omega\to\varphi}(\mu)^{-1} \\ &\qquad\qquad \times (M\widetilde{a}^{(1)})(r\varphi,\lambda-\mu,\omega)E_{\psi\to\omega}(\lambda)w(\psi)d\mu,\end{aligned} \tag{3.16}$$

где $w \in C^\infty(S^{n-1})$, и полагая $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(0)} + \mathfrak{A}^{(1)}$, приходим к формуле

$$(Au)(x) \equiv (Au)(r\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\operatorname{Im}\lambda=p} r^{i\lambda-n/2}\mathfrak{A}_{\psi\to\varphi}(r,\lambda)U(\lambda,\psi)d\lambda. \tag{3.17}$$

3.4. Неприводимые представления алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$. Напомним, что $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$ обозначает алгебру, порожденную операторами A_0, соответствующими ПДО $A \in \Psi_0(\mathbb{R}^m_n)$ по формуле (2.4). Если $A = F^{-1}aF$, то $A_0 = F^{-1}a_0F$, где a_0 — функция, определяемая равенствами $a_0(x,\xi) = \widetilde{a}_0(x,|x|\xi)$, $\widetilde{a}_0(x,\xi) = \lim_{t\to 0}\widetilde{a}(tx,\xi)$. Так как $\mathcal{A}(\mathbb{R}^m_n) \supset \overline{\Psi}_0(\mathbb{R}^m_n)$ в силу предложения 3.1, то $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$ содержит все ПДО $A = \mathrm{Op}\, a$ с символами a, удовлетворяющими условию $a(x,\xi) = a(tx^1, 0, \xi/t)$, $t > 0$.

Всякую функцию $\mathbb{R}^m_n \times (\mathbb{R}^m \setminus 0) \ni (x,\xi) \mapsto a(x,\xi)$ класса C^∞, не зависящую от x^2 и однородную степени нуль по каждой из переменных x^1 и ξ, назовем однородным символом. Полагая как обычно $\varphi = x^1/|x^1|$, $\omega = \xi/|\xi|$, будем вместо $a(x,\xi)$ писать $a(\varphi,\omega)$. Наименьшую подалгебру в $BL^2(\mathbb{R}^m)$, содержащую все операторы $\mathrm{Op}\, a$ с однородными символами a, обозначим через $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^m_n)$.

Далее в этом разделе предполагается, что $m = n$ и тем самым $\mathbb{R}^m_n = \mathbb{R}^n \setminus 0$. Пусть A — произвольный образующий элемент алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n \setminus 0)$,

$$Au(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\xi}\widetilde{a}(\varphi, |x|\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi, \quad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0). \tag{3.18}$$

Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ определим операторы $\mathfrak{A}^{(0)}(\lambda)$ и $\mathfrak{A}^{(1)}(\lambda)$ равенствами (3.15) и (3.16) с $p = 0$ и заменой $\widetilde{a}^{(0)}(r\varphi,\omega)$, $(M\widetilde{a}^{(1)})(r\varphi, \lambda - \mu, \omega)$ на $\widetilde{a}^{(0)}(\varphi,\omega)$, $(M\widetilde{a}^{(1)})(\varphi, \lambda - \mu, \omega)$. Вводя обозначение $\mathfrak{A}(\lambda) = \mathfrak{A}^{(0)}(\lambda) + \mathfrak{A}^{(1)}(\lambda)$, получаем следующее представление для оператора A:

$$Au(x) \equiv Au(r\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathrm{Im}\,\lambda=0} r^{i\lambda - n/2}\mathfrak{A}_{\psi\to\varphi}(\lambda)U(\lambda,\psi)d\lambda. \tag{3.19}$$

Это представление можно записать так:

$$Au(x) = (M^{-1})_{\lambda+in/2\to|x|}\mathfrak{A}_{\psi\to\varphi}(\lambda)M_{|y|\to\lambda+in/2}u(y),$$
$$\varphi = x/|x|, \quad \psi = y/|y|.$$

Поскольку преобразование $M_{|y|\to\lambda+in/2}$ является унитарным оператором из $L^2(\mathbb{R}^n)$ на $L^2(\mathbb{R}\times S^{n-1}) \cong L^2(\mathbb{R}, L^2(S^{n-1})$, то

(I) отображение $A \mapsto \mathfrak{A}$, заданное на множестве ПДО вида (3.18), продолжается до изоморфизма алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ на алгебру $\mathfrak{S}$, порожденную оператор-функциями $\mathfrak{A} = MAM^{-1}$ с нормой $\|\mathfrak{A}\| = \sup\{\|\mathfrak{A}(\lambda)\|; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Аналогично пусть $\mathfrak{S}^{(0)}$ — C^*-алгебра, порожденная операторными функциями

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda) = E_{\omega \longrightarrow \varphi}(\lambda)^{-1} a(\varphi, \omega) E_{\psi \longrightarrow \omega}(\lambda),$$
$$a \in C^\infty(S^{n-1} \times S^{n-1}) \tag{3.20}$$

(с той же нормой, что и выше). Тогда

(II) отображение $\operatorname{Op} a \mapsto \mathfrak{A}$, сопоставляющее каждому образующему элементу $\operatorname{Op} a$ алгебры $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^n)$ функцию (3.20), продолжается до изоморфизма $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{S}^{(0)}$.

Предложение 3.6. *Алгебры* $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ *и* $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^n)$ *совпадают.*

Доказательство. Ввиду (I) и (II) достаточно проверить, что $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{(0)}$. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(0)} + \mathfrak{A}^{(1)}$ — произвольный образующий элемент алгебры $\mathfrak{S}$. Согласно лемме 3.3 и замечанию 3.5, норма оператора $\mathfrak{B}(\lambda, \mu) = E(\mu)^{-1}(M\widetilde{a}^{(1)})(\varphi, \lambda - \mu, \omega)E(\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$, $\operatorname{Im}\mu = -\tau$, $\tau \in (0, \min(1, n/2))$, при любом $N \in \mathbb{N}$ подчиняется оценкам

$$\|\mathfrak{B}(\lambda, \mu); L^2(S^{n-1}) \to H^{(\tau)}\| \leqslant C_N(1 + |\lambda - \mu|)^{-N},$$
$$\|\mathfrak{B}(\lambda, \mu); L^2(S^{n-1}) \to L^2(S^{n-1})\| \leqslant C'_N(1 + |\lambda - \mu|)^{-N}(1 + |\lambda|)^{-\tau}.$$

Отсюда и из формулы

$$\mathfrak{A}^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\operatorname{Im}\mu = -\tau} \mathfrak{B}(\lambda, \mu) d\mu$$

(интеграл сходится в равномерной операторной топологии) вытекает, что функция $\mathfrak{A}^{(1)}(\cdot)$ принадлежит алгебре $C_0(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{K}L^2(S^{n-1})$. Так как эта алгебра содержится в $\mathfrak{S}^{(0)}$ [3], то $\mathfrak{A}^{(1)} \in \mathfrak{S}^{(0)}$. Кроме того, $\mathfrak{A}^{(0)} \in \mathfrak{S}^{(0)}$ в силу формулы (3.15) (с заменой $a^{(0)}(r\varphi, \omega)$ на $a^{(0)}(\varphi, \omega)$). Значит, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(0)} + \mathfrak{A}^{(1)} \in \mathfrak{S}^{(0)}$ и потому $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}^{(0)}$.

Теперь покажем, что $\mathfrak{S}^{(0)} \subset \mathfrak{S}$. Пусть $\mathfrak{A}^{(0)}(\cdot) = E_{\omega \longrightarrow \varphi}(\cdot)^{-1} a(\varphi, \omega) E_{\psi \longrightarrow \omega}(\cdot)$ — произвольный образующий элемент алгебры $\mathfrak{S}^{(0)}$, и пусть $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\zeta(t) = 1$ при $t \leqslant 1/2$, $\zeta(t) = 0$ при $t \geqslant 1$. Для $\delta \in (0, 1)$ положим $a_\delta(x, \xi) = (1 - \zeta(|x||\xi|/\delta)) a(\varphi, \omega)$ и рассмотрим ПДО $\operatorname{Op} a_\delta$. При изоморфизме $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{S}$

этому ПДО соответствует оператор-функция $\mathfrak{A}_\delta = \mathfrak{A}^{(0)} - \mathfrak{A}_\delta^{(1)}$, где для $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $\mathfrak{A}_\delta^{(1)}(\lambda)\colon C^\infty(S^{n-1}) \longrightarrow C^\infty(S^{n-1})$ определяется равенством

$$\mathfrak{A}_\delta^{(1)}(\lambda)\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\operatorname{Im}\mu=-\tau} \mathfrak{B}_\delta(\lambda,\mu)\omega\, d\mu \tag{3.21}$$

с

$$\mathfrak{B}_\delta(\lambda,\mu) = E(\mu)^{-1}(M\widetilde{a}_\delta^{(1)})(\varphi, \lambda-\mu, \omega)E(\lambda),$$
$$\widetilde{a}_\delta^{(1)}(\varphi,\xi) = \zeta(|\xi|/\delta)a(\varphi,\omega).$$

Включение $\mathfrak{S}^{(0)} \subset \mathfrak{S}$ будет установлено, если мы покажем, что

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0} \sup\{\|\mathfrak{A}_\delta^{(1)}(\lambda); \mathcal{B}L^2(S^{n-1})\|; \lambda \in \mathbb{R}\} = 0.$$

Из формулы

$$\begin{aligned}
&\partial_\varphi^\alpha \partial_\omega^\beta (M\widetilde{a}_\delta^{(1)})(\varphi,\nu,\omega) \\
&\quad = (2\pi)^{-1/2}[i\nu\ldots(i\nu-k+1)]^{-1} \\
&\quad \times \int\limits_0^\infty \rho^{-i\nu+k-1}\partial_\rho^k \partial_\varphi^\alpha \partial_\omega^\beta \widetilde{a}_\delta^{(1)}(\varphi,\rho\omega)\,d\rho, \quad \operatorname{Im}\nu = -\tau,
\end{aligned}$$

с учетом равенства $\widetilde{a}_\delta^{(1)}(\varphi,\rho\omega) = 0$ при $\rho > \delta$ вытекает, что

$$|\partial_\varphi^\alpha \partial_\omega^\beta (M\widetilde{a}_\delta^{(1)})(\varphi,\lambda-\mu,\omega)| \leqslant C_k|\lambda-\mu|^{-k}\delta^\tau, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.22}$$

Далее, согласно лемме 3.3, имеем

$$\|\mathfrak{B}_\delta(\lambda,\mu); \mathcal{B}L^2(S^{n-1})\| \leqslant C(1+|\lambda-\mu|)^\tau(1+|\mu|)^{-\tau}\|M\widetilde{a}_\delta^{(1)}(\cdot,\lambda-\mu,\cdot)\|_q,$$

где $q \in \mathbb{Z}_+$ достаточно большое число. Сопоставляя эту оценку с оценкой (3.22), получаем

$$\|\mathfrak{B}_\delta(\lambda,\mu); \mathcal{B}L^2(S^{n-1})\| \leqslant C_k'(1+|\lambda-\mu|)^{-k}\delta^\tau, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отсюда и из (3.22) следует неравенство.

На множестве ПДО $\operatorname{Op} a$ с однородными символами a определим отображения

$$\begin{aligned} &\pi(\varphi,\omega)\colon \operatorname{Op} a \mapsto a(\varphi,\omega), && (\varphi,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1};\\ &\pi(\lambda)\colon \operatorname{Op} a \mapsto E_{\omega\longrightarrow\varphi}(\lambda)^{-1}a(\varphi,\omega)E_{\psi\longrightarrow\omega}(\lambda), && \lambda\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

В статье [3] (см. также [9]) установлено, что указанные отображения продолжаются до неприводимых представлений алгебры $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^n)$ в пространствах $\mathbb{C}$ и $L^2(S^{n-1})$ соответственно. Всякое неприводимое представление этой алгебры эквивалентно одному (и только одному) из представлений $\pi(\varphi,\omega)$, $\pi(\lambda)$. Поскольку в силу предложения 3.6 $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)=\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^n)$, то мы получаем полный список неприводимых представлений алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$.

Выясним, как действуют представления $\pi(\varphi,\omega)$ и $\pi(\lambda)$ на элементы исходной системы образующих алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$, т.е. на ПДО A вида (3.18). Пусть A — такой ПДО, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^{(0)}+\mathfrak{A}^{(1)}$ — оператор-функция, соответствующая A по формуле (3.19). Ясно, что $\pi(\lambda)A=\mathfrak{A}(\lambda)$. Чтобы найти образ оператора A при отображении $\pi(\varphi,\omega)$, запишем его в виде $A^{(0)}+A^{(1)}$, где $A^{(j)}$, $j=1,2$, — оператор (3.19) с заменой $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}^{(j)}$. Так как $A^{(0)}\in\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^n)$, то $\pi(\varphi,\omega)A = a^{(0)}(\varphi,\omega)+\pi(\varphi,\omega)A^{(1)}$. Ввиду изоморфизма $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)\cong\mathfrak{S}$, мы можем рассматривать $\pi(\varphi,\omega)$ как представление алгебры $\mathfrak{S}$. Поскольку при указанном изоморфизме оператору $A^{(1)}$ соответствует оператор-функция $\mathfrak{A}^{(1)}\in C_0(\mathbb{R})\otimes KL^2(S^{n-1})$, то из [1, 10.4.3 и 4.1.5] вытекает, что $\pi(\varphi,\omega)\mathfrak{A}^{(1)}(=\pi(\varphi,\omega)A^{(1)})=0$. Значит, $\pi(\varphi,\omega)A=a^{(0)}(\varphi,\omega)$. Итак, справедливо

Предложение 3.7. *Для всех $(\varphi,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}$ и $\lambda\in\mathbb{R}$ определим на множестве образующих алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ отображения*

$$\pi(\varphi,\omega)\colon A\mapsto a^{(0)}(\varphi,\omega),\qquad \pi(\lambda)\colon A\mapsto\mathfrak{A}(\lambda),$$

где $a^{(0)}$ — главный символ ПДО A, $\mathfrak{A}(\cdot)$ — оператор-функция, соответствующая A в силу формулы (3.19). *Тогда*

1) *указанные отображения продолжаются до неприводимых попарно неэквивалентных представлений алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$;*

2) *всякое неприводимое представление $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ эквивалентно одному из представлений $\pi(\varphi,\omega)$, $\pi(\lambda)$.*

3.5. Неприводимые представления алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$. Каждому ПДО $A = \operatorname{Op} a \in \mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^m_n)$, $m > n$, формула (2.8) сопоставляет оператор-функцию $\mathbb{R}^{m-n} \ni \xi^2 \mapsto A(\xi^2) \in \mathcal{B}L^2(\mathbb{R}^n)$. Алгебру, порожденную функциями $S^{m-n-1} \ni \theta \mapsto A(\theta)$, обозначим через $\mathcal{L}^{(0)}$. Все функции из $\mathcal{L}^{(0)}$ непрерывны. Их значения в фиксированной точке $\theta \in S^{m-n-1}$ порождают подалгебру в $\mathcal{B}L^2(\mathbb{R}^n)$, которую будем обозначать через $\mathcal{L}^{(0)}(\theta)$. Для всякого ПДО $A \in \mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^m_n)$ справедливо равенство (2.9). Отметим, что алгебра $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^m_n)$ и связанные с ней алгебры $\mathcal{L}^{(0)}$, $\mathcal{L}^{(0)}(\theta)$ изучались в статье [4]. В частности, было показано, что при любом θ алгебра $\mathcal{L}^{(0)}(\theta)$ неприводима и содержит идеал компактных операторов.

Далее, если $A = \operatorname{Op} a \in \mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^m_n)$, то $A(0) \in \mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^n)$. Полагая $\mathfrak{A}(\lambda) = E(\lambda)^{-1} a(\varphi, \omega, 0) E(\lambda)$, где $\omega = \xi^1/|\xi^1|$ (ранее использовалось обозначение $\omega = \xi/|\xi|$), мы можем записать оператор $A(0)$ в виде (3.19).

Предложение 3.8. *Алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$ и $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^m_n)$ совпадают.*

Наметим доказательство. Пусть $\operatorname{Op} a$ — ПДО в $\mathbb{R}^m_n$ с однородным символом a, и пусть $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\zeta(t) = 1$ при $t \leqslant 1/2$, $\zeta(t) = 0$ при $t \geqslant 1$. Положим $\widetilde{a}_\delta(\varphi, \xi) = \zeta(|\xi^1|/\delta)\zeta(|\xi^2|/\delta) a(\varphi, \xi)$, $\delta > 0$. Так как $\operatorname{Op}(a - a_\delta) \in \Psi_0(\mathbb{R}^m_n)$, то для доказательства включения $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}^m_n) \subset \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$ достаточно проверить, что $\|\operatorname{Op} a_\delta\| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$.

Оператору $\operatorname{Op} a_\delta$ соответствует оператор-функция $\theta \mapsto (\operatorname{Op} a_\delta)(\theta)$, причем

$$\|\operatorname{Op} a_\delta; \mathcal{B}L^2(\mathbb{R}^m)\| = \sup\{\|(\operatorname{Op} a_\delta)(\theta); \mathcal{B}L^2(\mathbb{R}^n)\|; \theta \in S^{m-n-1}\}. \tag{3.23}$$

Фиксируем $\theta \in S^{m-n-1}$. Пусть $\widetilde{b}_\delta^{(1)}(x^1, \xi^1) = \zeta(|\xi^1|/\delta)(a(\varphi, \xi^1, |x^1|\theta) - a(\varphi, \xi^1, 0))$, $b_\delta^{(2)}(x^1, \xi^1) = \zeta(|\xi^1|/\delta) a(\varphi, \xi^1, 0)$. Тогда

$$(\operatorname{Op} a_\delta)(\theta) u(x^1) = \zeta(|x^1|/\delta)(\operatorname{Op} b_\delta^{(1)}) u(x^1) + \zeta(|x^1|/\delta)(\operatorname{Op} b_\delta^{(2)}) u(x^1) \tag{3.24}$$

для $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$. Из доказательства предложения 3.6 вытекает, что $\|\operatorname{Op} b_\delta^{(2)}\| \mapsto 0$ при $\delta \to 0$. Далее, функция $\widetilde{b}_\delta^{(1)}$ удовлетворяет оценке

$$|\partial_\rho^k \widetilde{b}_\delta^{(1)}(r\varphi, \rho\omega)| \leqslant C_k \rho^{-k} r (r^2 + \rho^2)^{-1/2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.25}$$

где $\rho = |\xi^1|$, $\omega = \xi^1/|\xi^1|$. Интегрируя по частям в равенстве

$$(M\widetilde{b}_\delta^{(1)})(r\varphi, \nu, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \rho^{-i\nu - 1} \widetilde{b}_\delta^{(1)}(r\varphi, \rho\omega) d\rho, \quad \operatorname{Im} \nu = \tau \in (0, 1),$$

выводим из (3.25), что

$$
\begin{aligned}
&|(M\widetilde{b}_\delta^{(1)})(r\varphi,\nu,\omega)| \\
&\quad \leqslant C_k'|\nu|^{-k}\int\limits_0^\infty \rho^{\tau-1}r(r^2+\rho^2)^{-1/2}d\rho \\
&\quad = C_k'|\nu|^{-k}r^\tau\int\limits_0^\infty \rho^{\tau-1}(1+\rho^2)^{-1/2}d\rho \\
&\quad = C_k''|\nu|^{-k}r^\tau.
\end{aligned}
$$

Таким же оценкам подчиняются и производные $\partial_\varphi^\alpha\partial_\omega^\beta(M\widetilde{b}_\delta^{(1)})(r\varphi,\nu,\omega)$. В силу формул (3.16) и (3.17) имеем

$$
\begin{aligned}
&(\operatorname{Op} b_\delta^{(1)})u(r\varphi) \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\operatorname{Im}\lambda=0} r^{i\lambda-n/2}d\lambda \\
&\quad \times \int\limits_{\operatorname{Im}\mu=-\tau} E(\mu)^{-1}(M\widetilde{b}_\delta^{(1)})(r\varphi,\lambda-\mu,\omega)E(\lambda)U(\lambda,\psi)d\mu.
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

Число $\tau\in(0,1)$ в этом равенстве подчинено условию $\tau<n/2$. Если $n\geqslant 2$, то можно взять τ из интервала $(1/2,1)$. Тогда (ср. с доказательством предложения 3.6)

$$
\begin{aligned}
&\|\zeta(|\cdot|/\delta)(\operatorname{Op} b_\delta^{(1)})u\|^2 \\
&\quad \leqslant C\int_0^\delta r^{n-1}dr\biggl(\int_{\operatorname{Im}\lambda=0} r^{\tau-n/2}(1+|\lambda|)^{-\tau}\|U(\lambda,\cdot)\|d\lambda\int_{\operatorname{Im}\mu=-\tau}|\lambda-\mu|^{-k}d\mu\biggr)^2 \\
&\quad \leqslant C'\int_0^\delta r^{2\tau-1}dr\int_{\operatorname{Im}\lambda=0}(1+|\lambda|)^{-2\tau}d\lambda\int_{\operatorname{Im}\lambda=0}\|U(\lambda,\cdot)\|^2d\lambda \\
&\quad = C'\delta^{2\tau}\|u\|^2.
\end{aligned}
$$

Отсюда ввиду (3.23) и (3.24) вытекает, что $\lim_{\delta\to 0}\|\operatorname{Op} a_\delta\|=0$. Тем самым включение $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}_n^m)\subset\mathcal{A}_0(\mathbb{R}_n^m)$ установлено для $n\geqslant 2$. В случае $n=1$ оператор-функция $\mu\mapsto E(\mu)^{-1}$ имеет полюс в точке $\mu=-1/2$. Поэтому при

$\tau \in (1/2, 1)$ в правой части формулы (3.26) появляется дополнительное слагаемое

$$-(2\pi)^{-3/2} \int\limits_{\operatorname{Im}\lambda=0} r^{i\lambda-1/2}\left(\int\limits_{S^0} (M\widetilde{b}_\delta^{(1)})(r\varphi, \lambda + i/2, \omega)d\omega\right)E(\lambda)U(\lambda, \psi)d\lambda,$$

(см. [9, 1.4]), которое оценивается так же, как и выше.

Теперь покажем, что $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}_n^m) \subset \mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}_n^m)$. Пусть $A = \operatorname{Op} a \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}_n^m)$, $a = a^{(0)} + a^{(1)}$, где $a^{(0)}$ — главный символ ПДО A. Так как $\operatorname{Op} a^{(0)} \in \mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}_n^m)$, то нужно проверить, что $\operatorname{Op} a^{(1)} \in \mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}_n^m)$. Вводя обозначения $\chi(\xi^1, \xi^2) = \zeta(|\xi^2|/|\xi^1|)$, имеем

$$(\operatorname{Op} a^{(1)})(\theta) = \operatorname{Op}(a^{(1)} - a^{(1)}(\cdot, 0)\chi)(\theta) + \operatorname{Op}(a^{(1)}(\cdot, 0)\chi)(\theta), \qquad \theta \in S^{m-n-1}; \tag{3.27}$$

здесь и далее через $a^{(1)}(\cdot, 0)$ обозначается функция $\mathbb{R}_n^m \times \mathbb{R}_n^m \ni (x, \xi) \mapsto a^{(1)}(\varphi, \xi^1, 0) = \widetilde{a}^{(1)}(\varphi, |x^1|\xi, 0)$. При любом $\theta \in S^{m-n-1}$ оператор $\operatorname{Op}(a^{(1)} - a^{(1)}(\cdot, 0)\chi)(\theta)$ принадлежит $\mathcal{K}L^2(\mathbb{R}^n)$. Доказательство этого факта использует следующую лемму, которую мы только сформулируем. Проверка несложна.

Лемма 3.9. *Пусть $H\colon L^2(\mathbb{R}, L^2(S^{n-1})) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ — оператор, определенный равенством*

$$(Hf)(r\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_{\psi\to\varphi}(r, \lambda)f(\lambda, \psi)d\lambda.$$

Предположим, что ядро h удовлетворяет следующим условиям:

1) $h(r, \lambda) \in \mathcal{K}L^2(S^{n-1})$ *для всех* $(r, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

2) *отображение* $h\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathcal{K}L^2(S^{n-1})$ *непрерывно,*

3) *справедливо неравенство*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \|h(r, \lambda)\|^2 r^{n-1}drd\lambda < +\infty.$$

Тогда H — компактный оператор.

Продолжим доказательство предложения 3.8. Справедлива формула

$$\begin{aligned}&\mathrm{Op}(a^{(1)} - a^{(1)}(\cdot, 0)\chi)(\theta)u(r\varphi)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathrm{Im}\,\lambda=0} r^{i\lambda-n/2}\mathfrak{A}^{(1)}_{\psi\to\varphi}(r,\lambda)U(\lambda,\psi)d\lambda,\end{aligned} \tag{3.28}$$

где $\mathfrak{A}^{(1)}(r,\lambda)$ — оператор (3.16) с заменой $\widetilde{a}^{(1)}(r\varphi,\rho\omega)$ на $\widetilde{a}^{(1)}(\varphi,\rho\omega,r\theta) - \widetilde{a}^{(1)}(\varphi,\rho\omega,0)\chi(\rho\omega,r\theta)$. Компактность оператора (3.28) будет установлена, если мы проверим, что его ядро $\mathfrak{A}^{(1)}(r,\lambda)$ удовлетворяет условиям леммы 3.9. Включение $\mathfrak{A}^{(1)}(r,\lambda) \subset \mathcal{K}L^2(S^{n-1})$ проверяется так же, как в предложении 3.6. Непрерывность отображения $(r,\lambda) \mapsto \mathfrak{A}^{(1)}(r,\lambda)$ следует из формулы для $\mathfrak{A}^{(1)}(r,\lambda)$, голоморфности функций $\mu \mapsto E(\mu)^{-1}$, $\lambda \mapsto E(\lambda)$ и оценки (3.4). Осталось проверить неравенство

$$\iint \|\mathfrak{A}^{(1)}(r,\lambda)\|^2 r^{n-1} dr d\lambda < +\infty. \tag{3.29}$$

Из определения 1.1 вытекает, что

$$|\partial_\varphi^\alpha \partial_\omega^\beta \partial_\rho^k \widetilde{a}^{(1)}(\varphi,\rho\omega,r\theta)| \leqslant C_{\alpha\beta k}(r^2+\rho^2)^{-k/2}(1+(r^2+\rho^2)^{1/2})^{-1}.$$

Отсюда легко следует оценка

$$\begin{aligned}&\partial_\varphi^\alpha \partial_\omega^\beta \partial_\rho^k (\widetilde{a}^{(1)}(\varphi,\rho\omega,r\theta) - \widetilde{a}^{(1)}(\varphi,\rho\omega,0)\chi(\rho\omega,r\theta))|\\ &\quad \leqslant C'_{\alpha\beta k}\rho^{-k} r(r^2+\rho^2)^{-1/2}(1+r)^{-1}.\end{aligned}$$

Но тогда

$$\begin{aligned}&|\partial_\varphi^\alpha \partial_\omega^\beta M_{\rho\to\lambda-\mu}(\widetilde{a}^{(1)}(\varphi,\rho\omega,r\theta) - \widetilde{a}^{(1)}(\varphi,\rho\omega,0)\chi(\rho\omega,r\theta))|\\ &\quad \leqslant C''_{\alpha\beta k}|\lambda-\mu|^{-k} r^{\tau}(1+r)^{-1},\end{aligned}$$

и потому

$$\|\mathfrak{A}^{(1)}(r,\lambda); \mathcal{B}L^2(S^{n-1})\| \leqslant C(1+|\lambda|)^{-\tau} r^{\tau-n/2}(1+r)^{-1}$$

(ср. с первой частью доказательства). Если теперь выбрать τ из интервала $(1/2, 1)$, то будет выполняться неравенство (3.29). Тем самым компактность оператора (3.28) установлена. Поскольку $\mathcal{K}L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^{(0)}(\theta)$, то указанный оператор содержится в $\mathcal{L}^{(0)}(\theta)$.

Далее, при изоморфизме $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{S}$, установленном в разделе 3.4, оператору $(\operatorname{Op} a^{(1)})(0)$ соответствует оператор-функция, принадлежащая $C_0(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{K}L^2(S^{n-1})$. Поэтому (см. [4]) найдется такой элемент B алгебры $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}_n^m)$, что $B(0) = (\operatorname{Op} a^{(1)})(0)$, а так как $B(0)(\operatorname{Op}\chi)(\theta) \in \mathcal{L}^{(0)}(\theta)$ (см. там же), то

$$\operatorname{Op}(a^{(1)}(\cdot, 0)\chi)(\theta) = (\operatorname{Op} a^{(1)})(0)(\operatorname{Op}\chi)(\theta) \in \mathcal{L}^{(0)}(\theta).$$

Итак, оба слагаемых в правой части равенства (3.27) содержатся в $\mathcal{L}^{(0)}(\theta)$. Отсюда следует включение $(\operatorname{Op} a^{(1)})(\theta) \in \mathcal{L}^{(0)}(\theta)$, которое означает, что $(\operatorname{Op} a^{(1)})(\cdot) \in \mathcal{L}^{(0)}$ ([1, 10.2.4]). Таким образом, $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n^m) \subset \mathcal{L}^{(0)}$, и потому $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}_n^m) \subset \mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}_n^m)$.

Введем отображения

(i) $\pi(\varphi, \xi)\colon \operatorname{Op} a \mapsto a(\varphi, \xi)$, $\varphi \in S^{n-1}$, $\xi \in S^{m-1}$,

(ii) $\pi(\lambda)\colon \operatorname{Op} a \mapsto E_{\omega\longrightarrow\varphi}(\lambda)^{-1} a(\varphi, \omega, 0) E_{\psi\longrightarrow\omega}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(iii) $\pi(\theta)\colon \operatorname{Op} a \mapsto (\operatorname{Op} a)(\theta)$, $\theta \in S^{m-n-1}$,

заданные на множестве образующих алгебры $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}_n^m)$. В работе [4] показано, что отображения (i)–(iii) продолжаются до неприводимых представлений алгебры $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}_n^m)$ в пространствах $\mathbb{C}$, $L^2(S^{n-1})$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$ соответственно. Всякое неприводимое представление $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}_n^m)$ эквивалентно одному (и только одному) из перечисленных. Так как $\mathcal{A}_0^{(0)}(\mathbb{R}_n^m) = \mathcal{A}_0(\mathbb{R}_n^m)$, то мы получаем полный список неприводимых представлений алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}_n^m)$. В следующем предложении обозначения φ, ξ, λ и θ имеют тот же смысл, что и в (i)–(iii).

Предложение 3.10. *На множестве ПДО вида* (2.7) *определим отображения* $\pi(\varphi, \xi)$, $\pi(\lambda)$ *и* $\pi(\theta)$ *равенствами*

$$\pi(\varphi, \xi)A = a^{(0)}(\varphi, \xi), \qquad \pi(\lambda)A = \mathfrak{A}(\lambda), \qquad \pi(\theta)A = A(\theta), \tag{3.30}$$

где $a^{(0)}$ *— главный символ ПДО* A, $\mathfrak{A}(\cdot)$ *— оператор-функция, соответствующая оператору* $A(0)$ *по формуле* (3.19). *Тогда*

1) *указанные отображения продолжаются до неприводимых попарно неэквивалентных представлений алгебры* $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}_n^m)$;

2) *всякое неприводимое представление* $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$ *эквивалентно одному из представлений* $\pi(\varphi,\xi)$, $\pi(\lambda)$, $\pi(\theta)$.

Доказательство. Повторяя рассуждения, предшествующие формулировке предложения 3.7, заключаем, что отображения (i)–(iii) действуют на образующие элементы алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$ по формулам (3.30).

§4. Спектр алгебры $\mathcal{A}$

4.1. Неприводимые представления алгебры $\mathcal{A}_0(\Lambda)$. Пусть K — гладкая n-мерная коническая поверхность в $\mathbb{R}^N \setminus 0$ с направляющим многообразием $D = K \cap S^{N-1}$, и пусть $\Lambda = K \times \mathbb{R}^{m-n}$. Фиксируем конечное покрытие $\{V_j\}$ поверхности Λ координатными окрестностями $V_j = V_j^{(1)} \times \mathbb{R}^{m-n}$ (см. определение 1.4). Будем предполагать, что при всех j, k объединение $V_{jk} = V_j \cup V_k$ также является координатной окрестностью. Выберем разбиение единицы $\{\eta_j\}$, подчиненное покрытию $\{V_j\}$ и состоящее из таких функций $\eta_j \in C^\infty(\Lambda)$, что $\eta_j(x^1,x^2) = \eta_j(x^1/|x^1|,0)$, $x^1 \in K$, $x^2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Вводя обозначение v_{jk} для координатного отображения $V_{jk} \to \mathbb{R}^m_n$, мы можем записать всякий ПДО $A \in \overline{\Psi}_0(\Lambda)$ в виде

$$A = \sum_{j,k} v_{jk}^* A_{jk} (v_{jk}^{-1})^*, \tag{4.1}$$

где $A_{jk} = (v_{jk}^{-1})^*(\eta_j A \eta_k) v_{jk}^* \in \overline{\Psi}_0(\mathbb{R}^m_n)$. Формула (4.1) справедлива, в частности, для операторов $A \in \overline{\Psi}_0(\Lambda) \cap \mathcal{A}_0(\Lambda)$. В этом случае A_{jk} — ПДО вида (2.7).

Для любых $A \in \overline{\Psi}_0(\Lambda) \cap \mathcal{A}_0(\Lambda)$ и $\theta \in S^{m-n-1}$ определим оператор $A(\theta)\colon C_c^\infty(K) \to C_c^\infty(K)$ равенством

$$A(\theta) = \sum_{j,k} (v_{jk}^{(1)})^* A_{jk}(\theta)((v_{jk}^{(1)})^{-1})^*. \tag{4.2}$$

Далее, каждому ПДО $A_{jk}(0) \in \overline{\Psi}_0(\mathbb{R}^n \setminus 0) \cap \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ при изоморфизме $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{S}$ соответствует оператор-функция $\mathfrak{A}_{jk} \in C(\mathbb{R}, BL^2(S^{n-1})$. Пусть $v_{jk}^{(0)}\colon V_{jk}^{(1)} \cap S^{N-1} \to v^{(1)}(V_{jk}^{(1)}) \cap S^{n-1}$ — отображение, индуцирующее диффеоморфизм $v_{jk}^{(1)}$. Тогда для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ можно определить оператор $\mathfrak{A}(\lambda)\colon C^\infty(D) \to C^\infty(D)$, полагая

$$\mathfrak{A}(\lambda) = \sum_{j,k} (v_{jk}^{(0)})^* \mathfrak{A}_{jk}((v_{jk}^{(0)})^{-1})^*. \tag{4.3}$$

Наконец, используя тривиализации $V_{jk}\colon T^*(\Lambda)|V_{jk} \to \nu(V_{jk}) \times \mathbb{R}^m$ кокасательного расслоения к Λ, соответствующие координатным отображениям v_{jk}, определим на $T^*(\Lambda)$ функцию

$$a^{(0)}(x,\xi) = \sum_{j,k}(a_{jk}^{(0)} \circ V_{jk})(x,\xi); \tag{4.4}$$

здесь $a_{jk}^{(0)}$ обозначает главный символ ПДО A_{jk}. (Мы записываем точки расслоения $T^*(\Lambda)$ в виде (x,ξ), $x \in \Lambda$, $\xi \in T_x^*(\Lambda)$). Отметим, что функция $(x^1, x^2, \xi) \mapsto a^{(0)}(x^1, x^2, \xi)$ однородна степени нуль как по x^1, так и по ξ и не зависит от x^2. Отсюда, в частности, следует, что эта функция полностью определяется своим сужением на $T^*(\Lambda)|D \times \{0\}$. В случае $x = (\varphi, 0)$, $\varphi \in D$, вместо $a^{(0)}(x,\xi)$ будем писать $a^{(0)}(\varphi,\xi)$.

Легко проверяется, что операторы $A(\theta)$, $\mathfrak{A}(\Lambda)$ и функция $a^{(0)}$ не зависят от выбора покрытия $\{V_j\}$ поверхности Λ и разбиения единицы $\{\eta_j\}$. Кроме того, операторы $A(\theta)$ и $\mathfrak{A}(\lambda)$ ограничены в пространствах $L^2(K)$ и $L^2(D)$ соответственно.

Замечание. Если $m = n$, то операторы $A(\theta)$ не вводятся, а операторы $A_{jk}(0)$, участвующие в определении функции $\mathfrak{A}(\cdot)$, совпадают с A_{jk}.

Из формул (4.2)–(4.4) следует, что линейные отображения

$$\pi(\varphi,\xi)\colon A \mapsto a^{(0)}(\varphi,\xi), \quad (\varphi,\xi) \in T^*(\Lambda)|D \times \{0\}, \tag{4.5}$$

$$\pi(\lambda)\colon A \mapsto \mathfrak{A}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

$$\pi(\theta)\colon A \mapsto A(\theta), \quad \theta \in S^{m-n-1}, \tag{4.7}$$

заданные на множестве $\overline{\Psi}_0(\Lambda) \cap \mathcal{A}_0(\Lambda)$, образующих алгебры $\mathcal{A}_0(\Lambda)$, непрерывны и, значит, продолжаются до представлений $\mathcal{A}_0(\Lambda)$ в пространствах $\mathbb{C}, L^2(D)$ и $L^2(K)$.

Замечание. В дальнейшем во избежание путаницы представления $\pi(\varphi,\xi)$, $\pi(\lambda)$, $\pi(\theta)$ алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}_n^m)$ (см. раздел 3.5) обозначаются через $\widetilde{\pi}(\varphi,\xi)$, $\widetilde{\pi}(\lambda)$, $\widetilde{\pi}(\theta)$.

Предложение 4.1. 1) *Отображения* (4.5)–(4.7) *продолжаются до неприводимых попарно неэквивалентных представлений алгебры* $\mathcal{A}_0(\Lambda)$.

2) *Всякое неприводимое представление* $\mathcal{A}_0(\Lambda)$ *эквивалентно одному из представлений* (4.5)–(4.7).

Доказательство. Утверждение 1) легко следует из аналогичного факта для алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$. Проверим утверждение 2). Пусть (V, v) — локальная карта на поверхности Λ, $\mathcal{A}_0(V)$ — подалгебра в $\mathcal{A}_0(\Lambda)$, порожденная ПДО вида $\chi A\eta$, где χ, $\eta \in C^\infty(\Lambda)$ однородны степени нуль по x^1, не зависят от x^2 и $\operatorname{supp}\chi \cup \operatorname{supp}\eta \subset V$. Далее $\chi, \eta \ldots$ обозначают (операторы умножения на) функции, обладающие указанными свойствами. Множество всех таких функций обозначается через $\mathcal{C}(V)$. Пусть ρ — неприводимое представление $\mathcal{A}_0(\Lambda)$ в гильбертовом пространстве H. Введем подпространство H_1 — ортогональное дополнение к пересечению $\bigcap \operatorname{Ker}\rho(\chi)$, $\chi \in \mathcal{C}(V)$. Из определения алгебры $\mathcal{A}_0(V)$ вытекает, что $\rho(B)|H_1^\perp = 0$ для всех $B \in \mathcal{A}_0(V)$. Это равенство означает, в частности, что $H_1^\perp$ инвариантно относительно $\rho(\mathcal{A}_0(V))$. Но тогда тем же свойством обладает и H_1. Значит, $\rho(B)(H) \subset H_1$ для всех $B \in \mathcal{A}_0(V)$.

Замечание. Окрестность V можно выбрать так, чтобы $H_1 \neq \{0\}$ (иначе $\rho = 0$ в силу формулы (4.1)).

Проверим, что H_1 не содержит нетривиальных подпространств, инвариантных относительно $\rho(\mathcal{A}_0(V))$. Предположим противное. Тогда найдутся ненулевые векторы $h_1, h_2 \in H_1$, для которых равенство $(\rho(B)h_1, h_2) = 0$ выполняется при любом $B \in \mathcal{A}_0(V)$. Выбирая функции $\chi, \eta \in \mathcal{C}(V)$ так, чтобы $\rho(\eta)h_1 \neq 0$, $\rho(\chi)^* h_2 \neq 0$, и полагая $B = \chi A\eta$, где A — произвольный элемент алгебры $\mathcal{A}_0(\Lambda)$, будем иметь $(\rho(A))\rho(\eta)h_1,\ \rho(\chi)^* h_2) = (\rho(\chi A\eta)h_1, h_2) = 0$, что противоречит неприводимости представления ρ.

Каждому ПДО $B \in \overline{\Psi}_0(\Lambda)$ вида $\chi A\eta$ соответствует ПДО $(v^{-1})^* B v^* \in \overline{\Psi}_0(\mathbb{R}^m_n)$. Пусть ν_Λ — евклидова поверхностная мера на Λ, g — плотность меры $v_*(\nu_\Lambda)$ относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^m$. Тогда отображение $B \mapsto g^{1/2}((v^{-1})^* B v^*) g^{-1/2}$ продолжается до изоморфизма ι: $\mathcal{A}_0(V) \to \mathcal{A}_0(v(V)) \subset \mathcal{B}L^2(\mathbb{R}^m)$. Положим $\pi_1 = \rho_1 \circ \iota^{-1}$, где $\rho_1 \colon \mathcal{A}_0(V) \to \mathcal{B}H_1$ — морфизм, определяемый равенством $\rho_1(B) = \rho(B)|H_1$. Из сказанного ранее следует, что π_1 — неприводимое представление алгебры $\mathcal{A}_0(v(V))$ в пространстве H_1. По теореме о продолжении представлений ([1, 2.10.2]) существует такое неприводимое представление $\pi \colon \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n) \to \mathcal{B}H_2$, $H_2 \supset H_1$, что $\pi_1(C) = \pi(C)|H_1$ для всех $C \in \mathcal{A}_0(v(V))$. В силу предложения 3.10 представление π эквивалентно одному из представлений $\widetilde{\pi}(\varphi, \xi)$, $\widetilde{\pi}(\lambda)$, $\widetilde{\pi}(\theta)$ алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$.

Пусть, например, $\pi \sim \widetilde{\pi}(\lambda)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Покажем (временно отождествляя H_2 с $L^2(S^{n-1})$ и π с $\widetilde{\pi}(\lambda)$), что $H_1 = L^2(W)$, где $W = S^{n-1} \cap v(V)$. Всякий ПДО C из $\mathcal{A}_0(v(V))$ имеет вид $\chi C_1 \eta$, $C_1 \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$, $\chi, \eta \in \mathcal{C}(v(V))$. При изоморфизме $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) \cong \mathfrak{S}$ оператору $C(0)$ соответствует оператор-функция

$\mathfrak{A}\colon \mathbb{R} \to BL^2(S^{n-1})$, обладающая тем свойством, что $\mathfrak{A}(\lambda)(L^2(S^{n-1})) \subset L^2(W)$. Но тогда $\pi_1(C)h = \mathfrak{A}(\lambda)h \in L^2(W)$ для всех $h \in H_1$. Значит, $H_1 \subset L^2(W)$ в силу неприводимости π_1. Теперь для доказательства равенства $H_1 = L^2(W)$ достаточно проверить (ввиду инвариантности H_1 относительно $\widetilde{\pi}(\lambda)C$, $C \in \mathcal{A}_0(v(V))$), что представление $\widetilde{\pi}(\lambda)|\mathcal{A}_0(v(V))$ алгебры $\mathcal{A}_0(\nu(V))$ в пространстве $L^2(W)$ неприводимо. Если предположить противное, то найдутся функции $u_1, u_2 \in L^2(W)$, $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$, для которых равенство $(\widetilde{\pi}(\lambda)(\chi C\eta)u_1,) = 0$ выполняется при всех $C \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$ и $\chi, \eta \in \mathcal{C}(v(V))$. Поскольку можно выбрать χ и η так, чтобы $\widetilde{\pi}(\lambda)(\eta)u_1 = (\eta|S^{n-1})u_1 \neq 0$, $\widetilde{\pi}(\lambda)(\chi)^*u_2 = (\overline{\chi}|S^{n-1})u_2 \neq 0$, то получаем противоречие с неприводимостью представления $\widetilde{\pi}(\lambda)$.

Итак, представление $\rho_1 = \rho|\mathcal{A}_0(V)$ алгебры $\mathcal{A}_0(V)$ в пространстве H_1 эквивалентно представлению $\widetilde{\pi}(\lambda)|\mathcal{A}_0(v(V))$ алгебры $\mathcal{A}_0(v(V))$ в пространстве $L^2(v(V)\cap S^{n-1})$. Пусть (V_1, v_1) — еще одна локальная карта на поверхности Λ, $V \cap V_1 \neq \varnothing$. Повторяя предыдущие рассуждения, заключаем, что представление $\rho|\mathcal{A}_0(V_1)$ эквивалентно ограничению одного из представлений $\widetilde{\pi}(\varphi,\xi)$, $\widetilde{\pi}(\lambda_1)$, $\widetilde{\pi}(\theta)$ алгебры $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^m_n)$ на подалгебру $\mathcal{A}(v_1(V_1))$. Легко видеть, что имеет место второй случай, причем $\lambda_1 = \lambda$ (для доказательства достаточно рассмотреть алгебру $\mathcal{A}_0(V \cap V_1)$). Если $V \cap V_1 = \varnothing$, то соотношение $\rho|\mathcal{A}_0(V_1) \sim \widetilde{\pi}(\lambda)|\mathcal{A}_0(v_1(V_1))$ также справедливо, поскольку существует координатная окрестность $V_2 \subset \Lambda$, удовлетворяющая условиям $V \cap V_2 \neq \varnothing$, $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$.

Пусть g_{jk} — плотность меры $(v_{jk})^*\nu_\Lambda$ относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ (мы используем обозначения, введенные в начале раздела). Из соотношений

$$\begin{aligned}
\|\rho(\eta_j A \eta_k)\| &= \|\widetilde{\pi}(\lambda)(g_{jk}^{1/2} A_{jk} g_{jk}^{-1/2})\| \leqslant C_1 \|\widetilde{\pi}(\lambda) A_{jk}\| \\
&= C_1 \|\mathfrak{A}_{jk}(\lambda)\| \leqslant C_2 \|(v_j^{(0)})^* \mathfrak{A}_{jk}(\lambda)((v_{jk}^{(0)})^{-1})^*\| \leqslant C_2 \|\pi(\lambda)(\eta_j A \eta_k)\| \\
&\leqslant C_2 \|\pi(\lambda) A\|
\end{aligned}$$

вытекает, что справедлива оценка

$$\|\rho(A)\| = \Bigl\| \sum_{j,k} \rho(\eta_j A \eta_k) \Bigr\| \leqslant C \|\pi(\lambda) A\|.$$

Противоположная оценка устанавливается аналогично. Значит, представления ρ и $\pi(\lambda)$ эквивалентны.

4.2. Неприводимые представления алгебры $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{M}$ — w-многообразие, $\mathcal{M}_0$ — его открытая всюду плотная часть (объединение стратов максимальной размерности), $m = \dim \mathcal{M}_0$. Предложения 2.1, 2.4, 2.5 и 4.1 позволяют перечислить все неприводимые представления алгебры $\mathcal{A}$, порожденной в пространстве $L^2(\mathcal{M})$ собственными ПДО нулевого порядка. В данном разделе вводится множество Ξ, элементы которого находятся в биективном соответствии с классами эквивалентности неприводимых представлений $\mathcal{A}$. Каждому оператору $A \in \mathcal{A}$ сопоставляется функция σ_A, заданная на множестве Ξ. В терминах этих функций формулируется теорема о спектре алгебры $\mathcal{A}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ пространство максимальных идеалов алгебры $\overline{C}(\mathcal{M}_0)$, а через $\widehat{\chi}$ — преобразование Гельфанда функции $\chi \in \overline{C}(\mathcal{M}_0)$. Имеется естественная проекция $\mathfrak{p}\colon \mathfrak{M} \to \mathcal{M}$, сопоставляющая каждой точке $w \in \mathfrak{M}$ такую точку $z \in \mathcal{M}$, что $\widehat{\chi}(w) = \chi(z)$ для всех $\chi \in C(\mathcal{M})$. Отображение $\wp^{-1}|\mathcal{M}_0$ гомеоморфно вкладывает $\mathcal{M}_0$ в $\mathfrak{M}$. Положим $\mathfrak{M}_0 = \wp^{-1}(\mathcal{M}_0)$, $\mathfrak{p} = \wp(\mathfrak{M}_0)$. Если $\varkappa\colon O \to \Lambda$ — специальная локальная карта на $\mathcal{M}$, то прообраз $\wp^{-1}(O)$ гомеоморфен подмножеству $\mathfrak{p}_\Lambda^{-1}(\varkappa(O))$ многообразия $\overline{\Omega_+(\Lambda)}$ (см. 1.4). Используя эти гомеоморфизмы, можно наделить $\mathfrak{M}$ структурой гладкого многообразия с краем. Ясно, что $\wp(\partial\mathfrak{M}) = \bigcup_{i\in I} s_i$, где $I = \{i : \dim s_i < m\}$.

Обозначим через $T_0^*(\mathfrak{M}_0)$ и $T_0^*(\mathfrak{M})$ кокасательные расслоения с выброшенными нулевыми сечениями. Пусть $A \in \Psi_0(\mathcal{M})$, $a^{(0)}$ — главный символ ПДО A, $\mathcal{P}\colon T^*(\mathfrak{M}_0) \to T^*(\mathcal{M}_0)$ — изоморфизм расслоений, порожденный диффеоморфизмом $\wp$. Функция $a^{(0)} \circ \mathcal{P}$ принадлежит пространству $C^\infty(T_0^*(\mathfrak{M}))|T_0^*(\mathcal{M}_0)$ и, следовательно, продолжается до гладкой функции на $T_0^*(\mathfrak{M})$, за которой сохраним обозначение $a^{(0)} \circ \mathcal{P}$. Введем на многообразии $\mathfrak{M}$ (гладкую) риманову метрику и положим $a^{(0)} = (a^{(0)} \circ \mathcal{P})|S^*(\mathfrak{M})$, где $S^*(\mathfrak{M})$ — расслоение единичных кокасательных сфер.

Далее, фиксируем страт $s \subset \mathcal{M}$, $1 \leqslant \dim s < m$, покрытие $\{O_i\}_{i=1}^N$ этого страта координатными окрестностями, разбиение единицы $\{\chi_i\} \subset C^\infty(s)$, подчиненное покрытию $\{O_i\}$ (т.е. $\operatorname{supp}\chi_i \subset O_i \cap s$), и координатные отображения $\varkappa_i\colon O_i \to \overline{\Lambda} = \overline{K} \times \mathbb{R}^{m-n}$, $n = m - \dim s$ (ввиду связности страта s можно считать, что поверхность Λ, являющаяся локальной моделью для $\mathcal{M}$ в окрестности точки $z \in s$, не зависит от z). В силу определения 1.7 для любых двух окрестностей O_i, O_j, таких, что $O_i \cap O_j \neq \varnothing$, отображение $\widetilde{k}_{ij} = \varkappa_j \circ \varkappa_i^{-1}$ является допустимым диффеоморфизмом открытых подмножеств поверхности $\overline{\Lambda}$. Пусть $z \in O_i \cap O_j$. Будем для простоты считать, что $\varkappa_i(z) = \varkappa_j(z) = 0$. Запишем отображение $\widetilde{k}_{ij}$ в виде $(\widetilde{k}_{ij}^{(1)}, \widetilde{k}_{ij}^{(2)})$, где $\widetilde{k}_{ij}^{(1)}$ и $\widetilde{k}_{ij}^{(2)}$ — отображения $\overline{\Lambda} \to \overline{K}$ и $\overline{\Lambda} \to \mathbb{R}^{m-n}$ соответственно. Для $x^1 \in K$ и $x^2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ положим $k_{ij}^{(1)}(x^1) = \lim_{t\to+0} t^{-1}\widetilde{k}_{ij}^{(1)}(tx^1, 0)$, $k_{ij}^{(2)}(x^2) = \lim_{t\to+0} t^{-1}\widetilde{k}_{ij}^{(2)}(0, tx^2)$. Тогда $k_{ij}^{(1)}$ — однородный (первой степени) диффеоморфизм $K \to K$, $k_{ij}^{(2)}$ — линейный изоморфизм $\mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^{m-n}$. Пусть Id_{ij} обозначает тождественное отображение $O_i \cap O_j \cap s \to O_i \cap O_j \cap s$. Построим расслоение $\mathcal{K}(s)$ с базой s и слоем

K, используя отображения

$$(\mathrm{Id}_{ij}, k_{ij}^{(1)})\colon (O_i \cap O_j \cap s) \times K \longrightarrow (O_i \cap O_j \cap s) \times K$$

в качестве функций перехода.

Пусть p_s обозначает проецию $\mathcal{K}(s) \longrightarrow s$, а h_i — естественную тривиализацию $(O_i \cap s) \times K \longrightarrow \mathcal{K}(s)|(O_i \cap s)$. Для $(x, z) \in s \times K$ обозначим через $w(z, x)$ точку $\sum_{O_i \ni z} \chi_i(z) h_i(z, x)$. (Отметим, что для точек, принадлежащих одной и той же образующей конуса $\mathcal{K}_z(s)$, естественным образом определены операции сложения и умножения на положительные числа.) Отображение $\tau\colon s \times K \longrightarrow \mathcal{K}(s)\colon (z, x) \mapsto w(z, x)$ является изоморфизмом расслоений, так что расслоение $\mathcal{K}(s)$ тривиально. Положим $\tau(z) = \tau|\{z\} \times K$ и определим на каждом слое $\mathcal{K}_z(s)$ меру ν_z как образ евклидовой меры на K при отображении $\tau(z)$.

Снова фиксируем точку $z \in O_i \cap O_j$. По-прежнему считаем, что $\varkappa_i(z) = \varkappa_j(z) = 0$. Пусть $\eta_i \in C\mathcal{F}(O_i)$, $\eta_j \in C\mathcal{F}(O_j)$, причем $\eta_i = \eta_j = 1$ вблизи z. Если $A \in \Psi_0(\mathcal{M})$, то $A^{(i)} = (\varkappa_i^{-1})^*(\eta_i A \eta_i)\varkappa_i^*$ и $A_j = (\varkappa_j^{-1})^*(\eta_j A \eta_j)\varkappa_j^*$ — ПДО на поверхности Λ. Операторы $A_0^{(i)}$ и $A_0^{(j)}$, соответствующие $A^{(i)}$ и $A^{(j)}$ в силу формулы (2.4), связаны соотношением $A_0^{(j)} = k_{ji}^* A_0^{(i)} k_{ij}^*$, где $k_{ij} = \lim_{t \longrightarrow +0} t^{-1} \widetilde{k}_{ij}(tx)$, $x \in \Lambda$. Отсюда нетрудно вывести, что для операторов $A_0^{(i)}(\xi^2)$ и $A_0^{(j)}(\xi^2)$, соответствующих $A_0^{(i)}$ и $A_0^{(j)}$ по формуле (4.2) (с ξ^2 вместо θ), справедливо равенство

$$A_0^{(j)}(({}^t k_{ij}^{(2)})^{-1}\xi^2) = (k_{ji}^{(1)})^* A_0^{(i)}(\xi^2)(k_{ij}^{(1)})^*. \tag{4.8}$$

Обозначим через λ_i линейное отображение $T_z(s) \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n}$, касательное к $\varkappa_i|s$ в точке z. Поскольку $k_{ij}^{(2)} = \lambda_j \lambda_i^{-1}$, то ввиду (4.8) формула $A(z; \theta) = A_0^{(i)}({}^t\lambda_i^{-1}\theta)$, $\theta \in S_z^*$, корректно определяет оператор $A(z;\theta)$: $C^\infty(\mathcal{K}_z(s)) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{K}_z(s))$, допускающий продолжение до ограниченного оператора в пространстве $L^2(\mathcal{K}_z(s), \nu_z)$. Так как точка z однозначно определяется точкой θ, то далее вместо $A(z;\theta)$ пишем $A(\theta)$.

Наконец, пусть $\mathfrak{A}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — оператор, соответствующий оператору $A_0(0)$ в силу формулы (4.3). Тогда равенство

$$\mathfrak{A}(z;\lambda) = t_j(z,\varphi)^{-i(\lambda+in/2)} \tau^{(0)}(z)^* \mathfrak{A}(\lambda)(\tau^{(0)}(z)^{-1})^* t_j(z,\varphi)^{i(\lambda+in/2)},$$

где $\varphi \in D = K \cap S^{n-1}$, $\tau^{(0)}(z) = \tau(z)|D$, $t_j(z,\varphi) = w(z,\varphi)/h_j(z,\varphi)$, определяет на многообразии $D_z = \tau^{(0)}(z)(D)$ оператор $\mathfrak{A}(z;\lambda)$, действующий в пространстве

$C^\infty(D_z)$ и не зависящий от выбора окрестности O_j, содержащей точку z. Обозначим через μ евклидову поверхностную меру на многообразии D и введем на D_z меру $\mu_z = \tau^{(0)}(z)_*\mu$. Тогда при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $\mathfrak{A}(z;\lambda)$ продолжается до ограниченного оператора в пространстве $L^2(D_z,\mu_z)$.

Замечание. До настоящего момента предполагалось, что $\dim s \geqslant 1$. В случае $\dim s = 0$ операторы $A(\theta)$ не определяются, а определение операторов $\mathfrak{A}(z;\lambda)$ лишь упрощается.

Пусть $\{s_i\}$ — совокупность стратов, объединением которых является w-многообразие $\mathcal{M}$, $I' = \{i \in I : \dim s_i \geqslant 1\}$. Положим $\Xi_0 = \{\iota\}$ (множество, состоящее из одной точки ι), $\Xi_1 = \bigcup_{i\in I'} S^*(s_i)$, $\Xi_2 = (\bigcup_{i\in I} s_i)\times\mathbb{R}$, $\Xi_3 = S^*(\mathfrak{M})$. Каждому ПДО $A \in \Psi_0(\mathcal{M})$ сопоставим функцию σ_A, заданную на множестве $\Xi = U_{j=0}^3 \Xi_j$. Если $\xi \in \Xi_3$, то значением $\sigma_A(\xi)$ является число $a^{(0)}(\xi)$. При $\xi = (z,\lambda) \in \Xi_2$ значение $\sigma_A(\xi)$ есть оператор $\mathfrak{A}(z;\lambda) \in BL^2(D_z,\mu_z)$, при $\xi = \theta \in S_z^*(s_i) \subset \Xi_1$ — оператор $A(\theta) \in BL^2(\mathcal{K}_z(s_i),\nu_z)$, а при $\xi = \iota$ — оператор $A \in BL^2(\mathcal{M})$. Из сказанного в данном разделе следует

Теорема 4.2. *Для каждого элемента $\xi \in \Xi$ отображение $\pi(\xi)\colon A \mapsto \sigma_A(\xi)$ продолжается до неприводимого представления алгебры $\mathcal{A}$. Если $\xi_1 \neq \xi_2$, то представление $\pi(\xi_1)$ и $\pi(\xi_2)$ неэквивалентны. Всякое неприводимое представление алгебры $\mathcal{A}$ эквивалентно одному из представлений $\pi(\xi)$.*

Следствие 4.3. *Оператор $A \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда фредгольмов, когда $\pi(\xi)A$ — обратимый оператор для всех $\xi \neq \iota$.*

Доказательство. Фредгольмовость оператора A равносильна обратимости его образа $[A]$ в алгебре $\mathcal{A}/\mathcal{K}L^2(\mathcal{M})$. В свою очередь обратимость элемента $[A] \in \mathcal{A}/\mathcal{K}L^2(\mathcal{M})$ равносильна обратимости всех операторов $\pi[A]$, $\pi \in (\mathcal{A}/\mathcal{K}L^2(\mathcal{M}))^\wedge$. Остается заметить, что $(\mathcal{K}L^2(\mathcal{M}))^\wedge = [\pi(\iota)]$, и поэтому всякое неприводимое представление алгебры $\mathcal{A}/\mathcal{K}L^2(\mathcal{M})$ эквивалентно одному из представлений $[A] \to \pi(\xi)A$, $\xi \neq \iota$.

4.3. Композиционные ряды и спектральная топология. C^*-алгебра $\mathcal{B}$ называется разрешимой, если существует конечный композиционный ряд $0 = J_{-1} \subset J_0 \subset \cdots \subset J_l = \mathcal{B}$ таких идеалов J_k, что $J_k/J_{k-1} \cong C_0(X_k)\otimes\mathcal{K}H_k$, $k = 1,\ldots,l$, где H_k — гильбертово пространство, X_k — локально компактное хаусдорфово пространство.

Можно показать (ср. с доказательством теоремы 1.3 статьи [4]), что алгебра $\mathcal{A} \subset BL^2(\mathcal{M})$, порожденная собственными ПДО нулевого порядка на w-многообразии $\mathcal{M}$, разрешима. Здесь мы ограничимся тем, что укажем разрешающий композиционный ряд.

Пусть $J_k = \bigcap \operatorname{Ker} \pi(\xi)$, $\xi \in \bigcup_{j=k+1}^{3} \Xi_j$, $k = 0, 1, 2$. Легко видеть, что $J_0 = \mathcal{K}L^2(\mathcal{M})$ — идеал компактных операторов, $J_2 = \operatorname{com} \mathcal{A}$ коммутаторный идеал алгебры $\mathcal{A}$. Снабдим $\Xi_1 = \bigcup_{i \in I'} S^*(s_i)$ и $\Xi_3 = S^*(\mathfrak{M})$ обычными топологиями кокасательного расслоения, а $\Xi_2 = \bigcup_{i \in I} s_i \times \mathbb{R}$ — топологией произведения. Для каждого страта s_i, $i \in I$, фиксируем поверхность $\Lambda_i = K_i \times \mathbb{R}^{m-n_i}$ — локальную модель многообразия $\mathcal{M}$ в окрестности произвольной точки $z \in s_i$. Пусть D_i — направляющее многообразие конуса K_i. Имеют место изоморфизмы $J_1/J_0 \cong \bigoplus_{i \in I'} (C(S^*(s_i) \otimes \mathcal{K}L^2(K_i)^{n_i}))$, $J_2/J_1 \cong \bigoplus_{i \in I} (C_0(s_i \times \mathbb{R}) \otimes \mathcal{K}L^2(D_i))$, $\mathcal{A}/J_2 \cong C(\mathfrak{M})$. Таким образом, справедлива

Теорема 4.4. *Пусть J_0, J_1, J_2 — указанные выше идеалы алгебры $\mathcal{A}$. Тогда композиционный ряд $0 \subset J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \mathcal{A}$ является разрешающим.*

Следствие 4.5. *$\mathcal{A}$ — алгебра типа* I.

Сделаем несколько замечаний относительно топологии Джекобсона на $\widehat{\mathcal{A}}$, которую для краткости будем называть $\mathcal{D}$-топологией. Используя биекцию $\Xi \ni \xi \mapsto \pi(\xi) \in \widehat{\mathcal{A}}$, отождествим спектр алгебры $\mathcal{A}$ с множеством Ξ. Для каждого ПДО $A \in \Psi_0(\mathcal{M})$ положим $Z_A = \{\xi \in \Xi : \|\sigma_A(\xi)\| > 1\}$. Известно, что совокупность $\{Z_A\}$ всех таких множеств является базой $\mathcal{D}$-топологии. Отсюда, учитывая непрерывность функций $\Xi \ni \xi \mapsto \|\sigma_A(\xi)\|$, $A \in \Psi_0(\mathcal{M})$, $j = 1, 2, 3$, выводим, что $\mathcal{D}$-топология индуцирует на множествах Ξ_j естественную топологию, введенную выше. Множества $\bigcup_{j=0}^{k} \Xi_j$, $k = 0, 1, 2$, открыты в $\mathcal{D}$-топологии, так как каждое из них является спектром некоторого идеала алгебры $\mathcal{A}$ ([1, 3.2.1]). Кроме того, из соотношений $\|\sigma_A(\xi)\| = \|\pi(\xi)A\| \leqslant \|A\| = \|\sigma_A(\iota)\|$ вытекает, что $\mathcal{D}$-окрестность любой точки ξ содержит l. Полное описание $\mathcal{D}$-топологии на спектре алгебры $\mathcal{A}$ достаточно громоздко (ср. с теоремой 1.2 статьи [4]), и мы его не приводим.

4.4. Заключительные замечания. Пусть $\mathcal{M}$ — w-многообразие, $\mathcal{A}(p)$, $p = \{p_i\}_{i \in I}$, — наименьшая подалгебра в $\mathcal{B}L^2_p(\mathcal{M})$, содержащая все ПДО из $\Psi_0(\mathcal{M})$ (определение пространств $L^2_p(\mathcal{M})$ см. в разделе 1.7). Поскольку $l^{-p/2} A l^{p/2} \in \Psi_0(\mathcal{M})$ для всех $A \in \Psi_0(\mathcal{M})$ (это следует из результатов работы [2]), а оператор $L^2_p(\mathcal{M}) \ni u \mapsto l^{p/2} u \in L^2(\mathcal{M})$ унитарен, то отображение $A \mapsto l^{-p/2} A l^{p/2}$ продолжается до изоморфизма $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}(p)$. Следовательно, спектры алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}(p)$ гомеоморфны.

Далее, из предложения 3.1 нетрудно вывести, что если "вектор" p удовлетворяет условию Стейна, то алгебра $\overline{\mathcal{A}}(p)$, порожденная в пространстве $L^2_p(\mathcal{M})$ всеми ПДО нулевого порядка, совпадает с $\mathcal{A}(p)$. Таким образом, переход от алгебры собственных ПДО к алгебре всех ПДО не дает ничего нового. Отметим (см. сказанное в начале раздела 3.1), что в общем случае оператор $l^{-p/2}Al^{p/2}$, где $A \in \overline{\Psi}_0(\mathcal{M})$, не является элементом класса $\overline{\Psi}_0(\mathcal{M})$. Поэтому равенство $\mathcal{A}(p) = \overline{\mathcal{A}}(p)$ $(\forall p)$ не следует автоматически из аналогичного равенства при $p = 0$. Отметим еще, что если p не удовлетворяет условию Стейна, то алгебра $\overline{\mathcal{A}}(p)$ не определена, так как класс $\Psi_0(\mathcal{M})$ содержит операторы, не допускающие продолжения до ограниченных операторов в $L^2_p(\mathcal{M})$.

Список литературы

[1] Диксмье Ж., *C^*-алгебры и их представления*, Наука, М., 1974.

[2] Сеничкин В. Н., *Псевдодифференциальные операторы на многообразиях с ребрами*, Дифференциальные и псевдодифференциальные операторы, Пробл. мат. анал., т. 13, С.-Петербург. ун-т, С.-Петербург, 1992, сс. 162–214.

[3] Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н., *О спектре C^*-алгебр, порожденных псевдодифференциальными операторами с разрывными символами*, Изв. АН СССР. Сер. мат. 47 (1983), № 6, 1263–1284.

[4] Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н., *О представлениях алгебры псевдодифференциальных операторов с многомерными разрывами в символах*, Изв. АН СССР. Сер. мат. 51 (1987), № 4, 833–859.

[5] Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н., *Представления C^*-алгебр, порожденных псевдодифференциальными операторами в пространствах с весом*, Распространение волн. Теория рассеяния. Пробл. мат. физ., т. 12, Ленингр. ун-т, Л., 1987, сс. 165–189.

[6] Schulze B.-W., *Pseudo-differential operators on manifolds with singularities*, Stud. Math. Appl., vol. 24, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991.

[7] Melrose R. B., *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, Res. Notes Math., vol. 4, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993.

[8] Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н., *Разрешимые алгебры операторов*, Алгебра и анализ 6 (1994), № 5, 1–87.

[9] Пламеневский Б. А., *Алгебры псевдодифференциальных операторов*, Наука, М., 1986.

С.-Петербургский государственный
университет телекоммуникаций
191065, С.-Петербург, Мойка, 61

Поступило 13 марта 1996 г.