А.Н.Протопопов

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЙ ДВУМЕРНОЙ СФЕРЫ

I. Введение

Разветвленные накрытия $\varphi_i : M_i \longrightarrow N_i$ с $i = 1, 2$ называются гомеоморфными, если существуют такие гомеоморфизмы $f : M_1 \longrightarrow M_2$, $g : N_1 \longrightarrow N_2$, что $g \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ f$. С одной стороны, как показал еще Гурвиц [3], задача классификации разветвленных накрытий поверхностей редуцируется к комбинаторно-алгебраической задаче изучения представлений фундаментальной группы дополнения множества ветвления в базе в симметрическую группу S_d, где d - число листов накрытия. С другой стороны, разветвленное накрытие поверхности имеет очевидные инварианты - число листов, число точек ветвления и их типы, и в некоторых случаях уже этих инвариантов достаточно для определения накрытия с точностью до гомеоморфизма. Как показал Клебш [2] в 1873 г. (см. также [I]), это справедливо в случае простых разветвленных накрытий сферы. Недавно теорема Клебша была распространена на простые накрытия произвольной замкнутой ориентированной поверхности, см. [4] и [6] . В случае простых разветвленных накрытий некоторых неориентируемых поверхностей также имеются аналогичные результаты, см. [5] . Возникают следующие задачи: во-первых, установить, какие еще накрытия, кроме простых, определяются очевидными инвариантами; во-вторых, установить, в каких случаях набор очевидных инвариантов можно дополнить несложными комбинаторными инвариантами так, чтобы получившийся набор уже определял накрытие с точностью до гомеоморфизма. Этим задачам и посвящена настоящая работа. В ней, в частности, доказываются результаты, анонсированные в заметке автора [I2]. В существенной части доказательства опираются на классификацию так называемых систем Гурвица (конечных последовательностей подстановок, произведение которых есть тождественная подстановка) относительно действия некоторых групп. Вследствие ограниченного объема статьи здесь приводятся лишь результаты такой классификации, доказательство будет опубликовано автором в другой работе.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить благодарность О.Я.Виро, под руководством которого была выполнена работа.

2. Предварительные сведения и определения

Пусть M, N - компактные ориентируемые поверхности. Разветвленным накрытием поверхности N называется такое открытое отображение $\varphi: M \longrightarrow N$, что его сужение на дополнение некоторого конечного подмножества внутренности поверхности M является локальным гомеоморфизмом и что прообраз $\varphi^{-1}(x)$ любой точки из N конечен.

<u>2.I. Очевидные инварианты</u>. Пусть $\varphi: M \longrightarrow N$ - разветвленное накрытие. Обозначим через Σ_φ множество точек из M, в которых φ не является локальным гомеоморфизмом. Множество $B_\varphi = \varphi(\Sigma_\varphi)$ называется множеством ветвления накрытия, а точки этого множества - точками ветвления. Пусть N - связная поверхность. В этом случае для всех точек $x \in N \setminus B_\varphi$ число $\# \varphi^{-1}(x)$ точек прообраза одинаково, $\# \varphi^{-1}(x) = d$, и называется числом листов накрытия φ. Для $x \in B_\varphi$ прообраз состоит из меньшего числа точек. В окрестности каждой точки y_i прообраза $\varphi^{-1}(x) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ точки ветвления $x \in B_\varphi$ отображение φ эквивалентно отображению $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}: z \longmapsto z^{d_i}$. Если $d_i > 1$, то $y_i \in \Sigma_\varphi$. Такая точка называется точкой разветвления накрытия, а d_i - ее порядком. Набор $[d_1, d_2, \dots, d_m]$ назовем типом точки ветвления и обозначим через $E(x)$. Условимся при записи типа точки ветвления пропускать единицы. При фиксированном числе листов это не приводит к утрате информации, так как $\sum d_i = d$. Набор $D = \{E(x)\}_{x \in B_\varphi}$ назовем паспортом ветвления. Разветвленное накрытие называется простым, если каждая точка ветвления имеет тип $[2]$. Паспорт такого накрытия имеет вид $\{[2], \dots, [2]\}$. Примем очевидное соглашение о сокращенной записи паспортов, в соответствии с которым паспорт простого накрытия, например, записывается в виде $\{n[2]\}$, где n - число точек ветвления.

Ясно, что число листов, число точек ветвления и их типы сохраняются при гомеоморфизмах накрытия. Будем называть их очевидными инвариантами разветвленного накрытия.

<u>2.2. Оснащенные разветвленные накрытия</u>. Разветвленное d-листное накрытие $\varphi: M \longrightarrow N$ с отмеченной точкой $z \in N \setminus B_\varphi$ и фиксированной биекцией $\tau: \varphi^{-1}(z) \longrightarrow \{1, 2, \dots, d\}$ назовем оснащенным, а пару (z, τ) - его оснащением. Два накрытия $\varphi_i: M_i \longrightarrow N_i$, $i = 1, 2$, с оснащениями (z_1, τ_1) и (z_2, τ_2) назовем оснащенно гомеоморфными, если существуют гомеоморфизмы $f: M_1 \longrightarrow M_2$, $g: (N_1, z_1) \longrightarrow (N_2, z_2)$, такие что $g \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ f$ и $\tau_2 \circ f \circ \tau_1^{-1} = id$. Если $N_1 = N_2$ и g изотопен тождественному отображению,

то накрытия φ_1 и φ_2 называются оснащенно изотопными. В случае $N_1 = N_2 = S^2$ для оснащенной изотопности накрытий достаточно потребовать, чтобы гомеоморфизм g сохранял ориентацию.

Разветвленное d-листное накрытие $\varphi: M \longrightarrow N$ с оснащением (z, τ) индуцирует отображение монодромии $\rho_\varphi : \pi_1 (N \setminus B_\varphi, z) \longrightarrow S_d$ (где S_d - симметрическая группа степени d), которое класс петли $c \subset N \setminus B_\varphi$ с началом в точке z переводит в подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d \\ \tau(\tilde c_1) & \tau(\tilde c_2) & \dots & \tau(\tilde c_d)\end{pmatrix}$, где $\tilde c_1, \tilde c, \dots, \tilde c_d$ - конечные точки путей в $M \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi)$, являющихся поднятиями пути c и начинающихся в точках $\tau^{-1}(1), \tau^{-1}(2), \dots, \tau^{-1}(d)$ соответственно. Образ группы $\pi_1(N \setminus B_\varphi, z)$ при отображении ρ_φ называется группой монодромии (оснащенного) накрытия.

2.2.1. Зависимость монодромии от оснащения. Пусть $\rho_1, \rho_2 : \pi_1 (N \setminus B_\varphi, z) \longrightarrow S_d$ - монодромии накрытия φ, отвечающие оснащениям $(z_1 \tau_1)$ и $(z_1 \tau_2)$. Тогда $\rho_2 = T \circ \rho_1$, где T - внутренний автоморфизм группы S_d, точнее сопряжение на подстановку $\tau_2 \circ \tau_1^{-1} = \delta \in S_d$ $(\rho_2(a) = \delta^{-1} \rho_1(a) \delta)$ $\square$.

Классические результаты Гурвица [3] можно сформулировать следующим образом (ср. [4]):

2.2.2. Теорема существования. Пусть N - компактная связная ориентируемая поверхность, $B \subset \mathrm{Int}\, N$ - конечное множество, $\rho : \pi_1 (N \setminus B_\varphi, z) \longrightarrow S_d$ - гомоморфизм, нетривиальный на каждом классе, представленном малой петлей, охватывающей точку из B. Тогда существует оснащенное d-листное разветвленное накрытие $\varphi : M \longrightarrow N$ с $B_\varphi = B$ и $\rho_\varphi = \rho$.

2.2.3. Классификационная теорема. Два d-листные разветвленные накрытия $\varphi_1 : M_1 \longrightarrow N$ и $\varphi_2 : M_2 \longrightarrow N$ компактной связной ориентируемой поверхности N с оснащениями (z_1, τ_1) и (z_2, τ_2) оснащенно гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $g : (N, B_{\varphi_1}, z_1) \longrightarrow (N, B_{\varphi_2}, z_2)$, такой что $\rho_{\varphi_1} = \rho_{\varphi_2} \circ g_*$.

<u>2.3. Связные накрытия.</u> Связным называется накрытие со связным накрывающим. Очевидно, разветвленное d-листное накрытие поверхности связно тогда и только тогда, когда группа монодромии накрытия есть транзитивная подгруппа группы S_d.

3. Системы Гурвица и общая классификация накрытий

3.1. Системы Гурвица. Конечная последовательность подстановок $\mathcal{H} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in S_d$, называется системой Гурвица, если $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = 1$. Если группа $\langle \mathcal{H} \rangle$, порожденная подстановками из $\mathcal{H}$, является транзитивной подгруппой группы S_d, то система Гурвица $\mathcal{H}$ называется транзитивной. Обозначим через $E(\alpha)$ набор длин непересекающихся циклов, на которые разлагается подстановка $\alpha \in S_d$, и назовем его типом подстановки. Условимся при обозначении типа подстановки пропускать единицы. Паспортом системы Гурвица $\mathcal{H}$ назовем (неупорядоченный) набор $\{E(\alpha_1), E(\alpha_2), \ldots, E(\alpha_3)\}$.

<u>3.2. Вложенные базисы и системы Гурвица оснащенных накрытий.</u> Рассмотрим конечное подмножество $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ сферы S^2 и точку $z \in S^2 \setminus B$. Пусть $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_n$ и $\mathcal{D}$ - малые попарно непересекающиеся диски с центрами в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и z. Фиксируем одну из ориентаций сферы S^2. Граничные окружности дисков ориентируем как границы дополнений $S^2 \setminus \mathcal{D}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $S^2 \setminus \mathcal{D}$ соответственно. Соединим точку z с окружностями $\partial \mathcal{D}_i$ простыми дугами γ_i с непересекающимися внутренностями так, чтобы точки $\gamma_i \cap \partial \mathcal{D}$ располагались на окружности $\partial \mathcal{D}$ циклически по возрастанию индексов в направлении, заданном ориентацией $\partial \mathcal{D}$. Петлю, которая получается при прохождении по дуге γ_i от z до точки $\gamma_i \cap \partial \mathcal{D}_i$, затем по окружности $\partial \mathcal{D}_i$ в направлении выбранной ориентации и затем по дуге γ_i в обратном направлении к точке z, назовем i-ой элементарной петлей. Гомотопические классы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элементарных петель вместе с соотношением $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n = 1$ составляют задание группы $\pi_1(S^2 \setminus B, z)$. Последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ будем называть вложенным базисом группы $\pi_1(S^2 \setminus B, z)$. Две последовательности простых дуг и соответственно два вложенные базиса (возможно различных групп $\pi_1(S^2 \setminus B, z)$ и $\pi_1(S^2 \setminus B', z')$) будем называть одинаково ориентированными, если они отвечают одной и той же ориентации сферы, и противоположно ориентированными в противном случае.

Очевидно, что индуцированный гомеоморфизмом $g : (S^2, B, z) \longrightarrow (S^2, B', z')$ изоморфизм $g_* : \pi_1(S^2 \setminus B, z) \longrightarrow \pi_1(S^2 \setminus B', z')$ переводит вложенный базис во вложенный базис. Если g сохраняет (обращает) ориентацию, то g_* переводит вложенные базисы в одинаково ориентированные (противоположно ориентированные) вложенные базисы. Если g' - другой гомеоморфизм, такой что $g'_* = g_*$, то g' и g изотопны (изотопия сохраняет B' и z'). Заметим далее, что для любых двух данных последовательностей простых дуг $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ и $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ легко построить гомеоморфизм g сферы, переводящий первую последовательность во вторую, причем g сохраняет ориентацию, если и только если последовательности одинаково ориентированные. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между множеством изоморфизмов фундаментальных групп, переводящих вложенные базисы во вложенные базисы, и множеством изотопических классов гомеоморфизмов сферы, переводящих B в B' и z в z'. Если B совпадает с B' и z совпадает с z', то указанные выше множества являются группами, а взаимно-однозначное соответствие - изоморфизмом групп.

Пусть $\varphi: M \longrightarrow S^2$ есть разветвленное d-листное накрытие с оснащением (z, τ). Отображение монодромии переводит вложенный базис H группы $\pi_1(S^2 \setminus B_\varphi, z)$ в последовательность подстановок $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in S_d$, удовлетворяющих соотношению $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = 1$, т.е. в систему Гурвица; будем называть ее системой Гурвица накрытия φ, отвечающей вложенному базису H. Заметим, что монодромия однозначно восстанавливается по системе Гурвица и вложенному базису H. Нетрудно также видеть, что паспорт системы Гурвица накрытия совпадает с паспортом ветвления накрытия.

Обозначим через $S\mathcal{H}(n)$ множество n-элементных систем Гурвица подстановок из S_d, а через $\widetilde{BC}(n)$ и $BC(n)$ - множество классов оснащенно изотопных и множество классов оснащенно гомеоморфных разветвленных d-листных накрытий сферы с n точками ветвления.

3.2.1. Имеются естественные сюрьективные отображения $\widetilde{\mu}: S\mathcal{H}(n) \longrightarrow \widetilde{BC}(n)$, $\mu: S\mathcal{H}(n) \longrightarrow BC(n)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H} \in S\mathcal{H}(n)$, $\mathcal{H} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Для произвольного подмножества $B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сферы S^2, точки $z \in S^2 \setminus B$ и вложенного базиса $H = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, отвечающего естественной ориентации сферы, определим гомоморфизм $\rho: \pi_1(S^2 \setminus B, z) \longrightarrow S_d$, отнеся элементу a_i базиса H подстановку α_i. В силу теоремы 2.2.2 существует d-листное оснащенное накрытие $\varphi: M \longrightarrow S^2$ с $B_\varphi = B$ и $\rho(\varphi) = \rho$; нетрудно видеть, что при этом $E(x_i) = E(\alpha_i)$. Обозначим через $[\varphi]_{\mathcal{H}}$ класс оснащенно гомеоморфных накрытий, содержащих φ, а через $\widetilde{[\varphi]}_{\mathcal{H}}$ - класс оснащенно изотопных накрытий, содержащих накрытие φ. Определим отображения μ и $\widetilde{\mu}$, положив $\mu(\mathcal{H}) = [\varphi]_{\mathcal{H}}$ и $\widetilde{\mu}(\mathcal{H}) = \widetilde{[\varphi]}_{\mathcal{H}}$. Определения корректны в силу теоремы 2.2.3. □

<u>3.3. Общие классификационные теоремы</u>. В силу 3.2.1 задача общей классификации оснащенных разветвленных накрытий сферы сводится, очевидно, к следующей: установить, какие системы Гурвица определяют один и тот же класс оснащенно гомеоморфных накрытий.

Рассмотрим группу $\widetilde{F}_n$ с умножением элементов слева направо, состоящую из автоморфизмов группы $\pi_1(S^2\setminus B, z)$, переводящих вложенные базисы во вложенные базисы, и ее подгруппу F, состоящую из автоморфизмов, переводящих вложенные базисы в одинаково ориентированные вложенные базисы. Фиксируем некоторый вложенный базис $H_\ell=(\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_n)$. Из геометрических соображений ясно, что любой автоморфизм $\beta\in F_n$ переводит $\bar a_i$ в $T_i\bar a_j T_i^{-1}$, где T_i есть произведение элементов из H_ℓ и им обратных. Так как, кроме того, $\bar a_1\bar a_2\ldots\bar a_n=(\bar a_1)\beta\cdot(\bar a_2)\beta\ldots(\bar a_n)\beta=1$, то в силу теоремы Артина (см. [9, ТА.I.9]) имеется представление классической группы n-кос Артина B_n в группу F_n. Это представление устроено на стандартных образующих $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1}$ группы B_n следующим образом. Каждой образующей ω_i соответствует автоморфизм, который мы также обозначим через ω_i:

$$\omega_i:\bar a_i\longmapsto\bar a_i\bar a_{i+1}\bar a_i^{-1},\ \bar a_{i+1}\longmapsto\bar a_i,\ \bar a_j\longmapsto\bar a_j,\ j\neq i,\ i+1.$$

Ядром этого отображения является нормальная подгруппа, порожденная косой $(\omega_1\omega_2\ldots\omega_{n-1})^n$ (см. [8]). Таким образом, мы можем отождествить группу F_n с (абстрактной) группой G_n, заданной образующими $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1}$ и соотношениями

$$\begin{aligned}&\omega_i\omega_{i+1}\omega_i=\omega_{i+1}\omega_i\omega_{i+1}, && i=1,2,\ldots,n-2;\\ &\omega_i\omega_j=\omega_j\omega_i, && |i-j|\geqslant 2;\\ &(\omega_1\omega_2\ldots\omega_{n-1})^n=1.\end{aligned}$$

При отождествлении группы G_n с группой $\mathcal{F}_n$ изотопических классов сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов сферы, переводящих B и z в себя, образующей ω_i соответствует скручивание на 180° вдоль границы некоторого диска, содержащего точки $\bar x_i,\bar x_{i+1}$ из B, соответствующие классам $\bar a_i,\bar a_{i+1}$, и не содержащего других точек из B, и, естественно, точки z.

Сопоставим единственному нетривиальному элементу ξ группы $\mathbb{Z}$ автоморфизм $(\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_n)\to(\bar a_n^{-1},\ldots,\bar a_2^{-1},a_1^{-1})$. Этот автоморфизм реализуется (топологически) обращающим ориентацию гомеоморфизмом сферы. Нетрудно убедиться, что группу $\widetilde{F}_n$ (и группу $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ изотопических классов гомеоморфизмов сферы, переводящих B и z в себя) можно отождествить с полупрямым произведением $\widetilde{G}_n$ групп G_n и $\mathbb{Z}_2$, определяемым соотношениями

$$\xi\omega_i=\omega_{n-i}^{-1}\xi,\ i=1,\ldots,n-1$$

Обозначим через P множество всех вложенных базисов, а через P_+ множество, состоящее из вложенных базисов, одинаково ориентированных с базисом H_ℓ. Правое действие группы $\widetilde{G}_n$ в множестве P (т.е. действие как группы автоморфизмов) транзитивно, правое действие группы G_n в множестве P_+ также транзитивно. Рассмотрим здесь другие действия групп $\widetilde{G}_n$ и G_n, действия слева, более удобные для последующих приложений. Имеются естественные биекции

$$\widetilde{\eta}: \widetilde{G}_n \longmapsto P$$
$$1 \longmapsto H_\ell$$
$$\beta \longmapsto H_\ell \beta = (\overline{a}_1\beta, \overline{a}_2\beta, \ldots, \overline{a}_n\beta)$$

и $\eta = \widetilde{\eta}|_{G_n}: G_n \longrightarrow P_+$. Определим левое действие $\widetilde{G}_n \times P \longrightarrow P$, положив $\omega H = \widetilde{\eta}(\omega \cdot \widetilde{\eta}^{-1}(H))$, аналогично определим левое действие $G_n \times P_+ \longrightarrow P_+$. Так как $\widetilde{\eta}$ и η биекции, действия транзитивны. Нетрудно видеть, что действию образующей ω_i соответствует следующее преобразование произвольного $H \in P$:

$$(*)\ (a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \xrightarrow{\omega_i} (a_1, a_2, \ldots, a_i a_{i+1} a_i^{-1}, a_i, \ldots, a_n)$$

а действию образующей ξ соответствует преобразование

$$(**)\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \xrightarrow{\xi} (a_n^{-1}, \ldots, a_2^{-1}, a_1^{-1}).$$

Таким образом, левые действия групп $\widetilde{G}_n$ и G_n не зависят от выбора вложенного базиса H_ℓ.

Отметим здесь, что преобразование $(*)$ базиса H реализуется (топологически) скручиваниемн на 180° вдоль петли, обходящей две точки из B, соответствующие классам a_i, a_{i+1}, и свободно гомотопной в $S^2 \setminus B$ петле, представляющей класс $a_i \cdot a_{i+1}$. Гомеоморфизм, реализующий преобразование $(**)$, также нетрудно построить; всякий такой гомеоморфизм обращает ориентацию. Таким образом, имеются отображения $\widetilde{\gamma}: \widetilde{G}_n \times P \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{F}}_n$ и $\gamma: G_n \times P \longrightarrow \mathfrak{F}_n$. Сужения этих отображений на $\widetilde{G}_n \times \{H\}$ и $G_n \times \{H\}$ суть изоморфизмы, которые мы обозначим через $\widetilde{\gamma}_H: \widetilde{G}_n \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{F}}_n$ и $\gamma_H: G_n \longrightarrow \mathfrak{F}_n$. При $H = H_\ell$ эти изоморфизмы являются изоморфизмами отождествления, рассмотренного выше. Если $H \neq H_\ell$, $H = \omega_H H_\ell$, то $\gamma_H(\omega) = \omega_H^{-1}\, \omega\, \omega_H$.

Пусть B есть множество ветвления, а z – отмеченная точка оснащенного накрытия $\varphi: M \longrightarrow S^2$. Отображение монодромии переносит рассмотренные выше левые действия групп $\widetilde{G}_n$ и G_n в множество систем Гурвица накрытия φ. Эти действия устроены следующим образом: если $\mathcal{H} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – произвольная система Гурвица накрытия, то образующей ω_i соответствует преобразование

$$(\mathrm{I})\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \longrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i^{-1}, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$$

образующей ξ соответствует преобразование

$$(\mathrm{II})\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \longrightarrow (\alpha_n^{-1}, \ldots, \alpha_2^{-1}, \alpha_1^{-1}).$$

Очевидно, преобразования (I) и (П) задают действие групп G_n и $\widetilde{G}_n$ в множестве $S\mathcal{H}(n)$ всех n-элементных систем Гурвица. Рассмотрим отображение $\mu: S\mathcal{H}(n) \longrightarrow BC(n)$. Множество $\mu^{-1}([\varphi])$

есть в точности множество систем Гурвица накрытия φ при всевозможных выборах вложенных базисов. Из транзитивности действия группы $\widetilde{G}_n$ в множестве всех систем Гурвица накрытия φ и теоремы 3.2.I. немедленно получаем

3.3.I. Отображение $\mu/\widetilde{G}_n : S\mathcal{H}(n)/\widetilde{G}_n \longrightarrow BC(n)$ является биекцией. □ Аналогично получаем

3.3.2. Отображение $\widetilde{\mu}/G_n : S\mathcal{H}(n)/G_n \longrightarrow \widehat{BC}(n)$ является биекцией. □

Определим действие группы S_d в $S\mathcal{H}(n)$, относя подстановке $\sigma \in S_d$ следующее преобразование произвольной системы Гурвица

(Ш) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \longrightarrow (\alpha_1^\sigma, \alpha_2^\sigma, \ldots, \alpha_n^\sigma)$, $\alpha_i^\sigma = \sigma^{-1}\alpha_i \sigma$.

Обозначим через $S\mathcal{H}(D,d)$ подмножество множества $S\mathcal{H}(n)$, состоящее из систем Гурвица подстановок из S_d с паспортом D. Из 2.2.I и 3.2.I следует, что отображения $\mu : S\mathcal{H}(D,d) \to BC(D,d)$ и $\widetilde{\mu} : S\mathcal{H}(D,d) \longrightarrow \widetilde{BC}(D,d)$ являются сюрьективными S_d-отображениями. Фактор-отображение μ / S_d : $S\mathcal{H}(D,d)/S_d \longrightarrow BC(D,d)/S_d$ относит классу сопряженных систем Гурвица класс гомеоморфных накрытий сферы. Так как преобразование (Ш) перестановочно с преобразованиями (I) и (П), то $(S\mathcal{H}(D,d)/S_d)/\widetilde{G}_n = (S\mathcal{H}(D,d)/\widetilde{G}_n)/S_d = S\mathcal{H}(D,d)/\widetilde{G}_n \times S_d$ и из 3.3.I и 3.3.2 немедленно получаем следующие теоремы.

3.3.3. ТЕОРЕМА. Фактор-отображение $\mu/\widetilde{G}_n \times S_d$ множества $S\mathcal{H}(D,d)/\widetilde{G}_n \times S_d$ на множество классов гомеоморфных d-листных разветвленных накрытий сферы с паспортом D является биекцией. □

3.3.4. ТЕОРЕМА. Фактор-отображение $\widetilde{\mu}/G_n \times S_d$ множества $S\mathcal{H}(D,d)/G_n \times S_d$ на множество классов изотопных d-листных разветвленных накрытий сферы с паспортом D является биекцией. □

3.3.5. СЛЕДСТВИЕ. Если два d-листные разветвленные накрытия сферы с группой монодромии S_d гомеоморфны (изотопны), то они оснащенно гомеоморфны (оснащенно изотопны) при любых оснащениях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}$ - система Гурвица, такая что $\langle \mathcal{H} \rangle = S_d$. Достаточно показать, что $G_n(\mathcal{H}) = G_n \times S_d(\mathcal{H})$, т.е. что для произвольного $\sigma \in S_d$ $\mathcal{H}^\sigma \in G_n(\mathcal{H})$. В силу 3.2.I система Гурвица $\mathcal{H}$ является системой Гурвица оснащенного d-листного разветвленного накрытия φ, отвечающей согласованному с естественной ориентацией сферы выбору вложенного базиса $H = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Так как $\langle \mathcal{H} \rangle = S_d$, то множество $\rho_\varphi^{-1}(\sigma)$ не пусто, пусть $a \in \rho_\varphi^{-1}(\sigma)$. Вложенный базис $H_1 = (a^{-1}a_1 a, a^{-1}a_2 a, \ldots, a^{-1}a_n a)$ одинаково ориентирован с базисом H.

Отображение монодромии переводит H_1 в систему Гурвица $\mathcal{H}^{\delta}$. □

3.4. Поднимаемые гомеоморфизмы. Пусть $\varphi: M \to S^2$ - разветвленное d-листное накрытие. Гомеоморфизм $g: S^2 \to S^2$ называется поднимаемым относительно накрытия φ, если найдется сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f: M \to M$, такой что $g \circ \varphi = \varphi \circ f$. В случае когда φ - оснащенное накрытие с оснащением (z, τ), дополнительно требуется, чтобы f переводил каждую точку из $\varphi^{-1}(z)$ в себя. Обозначим через $L_{n,1}$ и L_n группы изотопических классов гомеоморфизмов сферы, поднимаемых относительно оснащенного и неоснащенного накрытия $\varphi: M \to S^2$. Пусть $St(\mathcal{H}) = \{ \omega \in G_n \mid \omega\mathcal{H} = \mathcal{H} \}$ и $st(\mathcal{H}) = \{ \omega \in G_n \mid \omega\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\delta},\ \delta \in S_d \}$.

3.4.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. Группа $L_{n,1}$ изоморфна группе $St(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ - произвольная система Гурвица накрытия φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 2.2.3 в рассматриваемой ситуации может быть сформулирована следующим образом: гомеоморфизм $g: S^2 \to S^2$ поднимаем относительно оснащенного накрытия φ тогда и только тогда, когда g сохраняет ориентацию, $g(B_\varphi) = B_\varphi$, $g(z) = z$ и $\rho_\varphi = \rho_\varphi \circ g_*$. Пусть H - некоторый вложенный базис, которому отвечает система Гурвица $\mathcal{H}$. Рассмотрим отображение $\nu_H: G_n \to \mathcal{F}_n$. Ясно, что $\nu_H(St(\mathcal{H})) = L_{n,1}$ и $\nu_H / St(\mathcal{H}): St(\mathcal{H}) \to L_{n,1}$ изоморфизм. □

Обозначим через K нормальную подгруппу группы G_n, порожденную элементами $\tau_1 = (\omega_2\omega_3 \ldots \omega_{n-1})^{1-n}$, $\tau_2 = \omega_1^2(\omega_3 \ldots \omega_{n-1})^{2-n}$, $\ldots$, $\tau_{l+1} = (\omega_1 \ldots \omega_l)^{l+1}(\omega_{l+2} \ldots \omega_{n-1})^{l+1-n}, \ldots, \tau_{n-1} = (\omega_1\omega_2 \ldots \omega_{n-2})^{n-1}$. Из теоремы Магнуса (см. [8] или [13], теорема № 9) следует, что группа G_n/K изоморфна группе Map изотопических классов сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов сферы, переводящих множество B_φ в себя.

3.4.2. УТВЕРЖДЕНИЕ. Группа L_n изоморфна группе $\gamma(st(\mathcal{H}))$, где $\mathcal{H}$ - произвольная система Гурвица накрытия φ, и $\gamma: G_n \to G_n/K$ - проекция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система Гурвица $\mathcal{H}$ отвечает оснащению (z, τ) и вложенному базису H накрытия φ. Гомоморфизм $\gamma: G_n \to G_n/K$ после отождествления групп G_n и $\mathcal{F}_n$ индуцирует гомоморфизм $\tilde{\gamma}: \mathcal{F}_n \to Map$. Рассмотрим подгруппу $\tilde{L}_{n,1}$ группы $\mathcal{F}_n$, состоящую из изотопических классов гомеоморфизмов сферы, поднимаемых относительно (неоснащенного) накрытия φ. Ясно, что $\tilde{\gamma}(\tilde{L}_{n,1}) = L_n$. С другой стороны, как следует из 2.2.1 и 3.5.1, группа $\tilde{L}_{n,1}$ изоморфна группе $st(\mathcal{H})$; следовательно, L_n изоморфна группе $\gamma(st(\mathcal{H}))$. □

Занумеруем точки ветвления накрытия φ и рассмотрим естественные гомоморфизмы $\eta_1: L_{n,1} \to S_n$, $\eta_2: L_n \to S_n$. Обозначим через $\varkappa$ канонический гомоморфизм $G_n \to S_n$, ядро которого составляют крашеные косы. В качестве следствий из 3.4.I и 3.4.2 получаем:

3.4.3. Группа $\eta_1(L_{n,1})$ сопряжена в S_n группе $\varkappa(st(\mathcal{H}))$, где $\mathcal{H}$ -произвольная система Гурвица накрытия φ. □

3.4.4. Группа $\eta_2(L_n)$ сопряжена в S_n группе $\varkappa(st(\mathcal{H}))$, где $\mathcal{H}$ - произвольная система Гурвица накрытия φ. □

4. Дополнительные инварианты

Рассматриваемые здесь инварианты разветвленных накрытий сферы (Arf - инвариант и сигнатура) были введены ранее в заметке автора [I2].

4.I. Arf -инвариант. Рассмотрим d -листное разветвленное накрытие $\varphi: M \to S^2$, все точки разветвления которого имеют нечетный порядок. Построим отображение $\theta: H_1(M, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ следующим образом: пусть простая замкнутая кривая $\alpha \in M$ - такой представитель класса $\alpha \in H_1(M, \mathbb{Z}_2)$, что $\varphi(a) \cap B_\varphi = \emptyset$ и самопересечения кривой $\varphi(\alpha)$ трансверсальны., тогда $\theta(\alpha)$ есть число самопересечений кривой $\varphi(\alpha)$, взятое по модулю 2. Нетрудно убедиться, что θ - квадратичная форма, ассоциированная с формой индексов пересечения на $H_1(M, \mathbb{Z}_2)$ (т.е. $\theta(a+b) = \theta(a) + \theta(b) + a \cdot b$, где $\cdot$ обозначает индекс пересечений). При известном соответствии (см. [7]) между такими формами и спинорными структурами в M форма θ отвечает спинорной структуре, продолжающей спинорную структуру дополнения $M \setminus \varphi^{-1}(B_\varphi)$, которая индуцируется единственной спинорной структурой сферы посредством φ. Пусть $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ - симплектический базис в $H_1(M, \mathbb{Z}_2)$ (т.е. $a_i \cdot a_j = b_i \cdot b_j = 0$ и $a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$).

Arf -инвариант $\mathrm{Arf}(\theta) = \sum \theta(a_i)\, \theta(b_i)$ формы θ является (единственным) инвариантом спинорной структуры относительно гомеоморфизмов поверхности M (см. [7]). Положим $\mathrm{Arf}(\varphi) = \mathrm{Arf}(\theta)$. Ясно, что $\mathrm{Arf}(\varphi)$ является инвариантом накрытия относительно гомеоморфизмов.

4.2. Сигнатура. Пусть $\varphi: M \to S^2$ есть d -листное разветвленное накрытие с паспортом $\{n[3]\}$. Группой монодромии такого накрытия в случае связного M является знакопеременная группа A_d (см. 5.I). Обозначим через $A_\mathcal{D}$ множество, состоящее из 3-циклов группы A_d. При $d=3$ и $d=4$ множество $A_\mathcal{D}$ состоит из двух классов сопряженных в A_d циклов.

Класс, содержащий цикл $(1 2 3)$, обозначим через E_+, другой класс - через E_- . Пусть (z,τ) - некоторое оснащение накрытия. Рассмотрим подмножества B_+, B_- множества B_φ, полученные следующим образом: точка ветвления $x \in B_+$, если класс элементарной петли, обходящей эту точку в направлении, согласованном с естественной ориентацией сферы, переводится монодромией в подстановку из E_+, в противном случае $x \in B_-$. Ясно, что разбиение (B_+, B_-) является инвариантом относительно сохраняющих ориентацию автогомеоморфизмов оснащенного накрытия φ, а упорядоченный набор (C_+, C_-), $C_\pm = \# B_\pm$ является инвариантом относительно оснащенных изотопий. Так как $C_+ + C_- = n$, то в качестве инварианта удобно рассматривать разность $C_+ - C_-$, обозначим ее через $\sigma_{\mathbb{Z}}$ и назовем целочисленной сигнатурой. Из 2.2.I немедленно получаем, что целочисленные сигнатуры, соответствующие оснащениям (z,τ) и (z,τ'), равны, если подстановка $\tau \circ \tau^{-1}$ четная, и противоположны по знаку, если она нечетная. Следовательно, модуль $|C_+ - C_-|$ является инвариантом (неоснащенного) накрытия φ относительно гомеоморфизмов. Заметим, что инварианты $\sigma_{\mathbb{Z}}$ и σ можно вычислять по системам Гурвица (см. [I2]): $\sigma_{\mathbb{Z}} = \sigma_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}) = c_+ - c_-$, где c_+ (соответственно c_-) есть число элементов из $\mathcal{H}$, принадлежащих E_+ (соответственно E_-), $\mathcal{H}$ - произвольная система Гурвица оснащенного накрытия φ, отвечающая выбору согласованного с естественной ориентацией сферы вложенного базиса; $\sigma = \sigma(\mathcal{H}) = |c_+ - c_-|$, где $\mathcal{H}$ - произвольная система Гурвица накрытия φ.

Сказанное выше допускает естественное обобщение. Множество ветвления накрытия $\varphi: M \to S^2$ с паспортом $\{n_1 E_1, n_2 E_2, \dots, n_p E_p\}$ разбивается на подмножества B_i, состоящие из точек типа E_i; каждое из множеств B_i можно разбить в свою очередь на подмножества $B_i^1, \dots, B_i^{k_i}$, состоящие из точек ветвления, одинаково ориентированные элементарные петли которых при некотором (а значит и при любом) оснащении переводятся отображением монодромии в подстановки, сопряженные в группе монодромии. Сохраняющие ориентацию автогомеоморфизмы оснащенного накрытия переводят каждое B_i^j в себя. Гомеоморфизмы (неоснащенного) накрытия переводят множество $\{B_i^j\}$ в себя. Рассмотрим φ вместе с некоторым оснащением. Для каждого E_i упорядочим множество классов сопряженных в группе монодромии подстановок типа $E_i : E_i^1, \dots, E_i^{k_i}$. Рассмотрим соответствующее упорядоченное разбиение множества $B_\varphi : (B_1^1, \dots, B_1^{k_1}; \dots; B_p^1, \dots, B_p^{k_p})$. Ясно, что упорядоченный набор $(c_1^1, \dots, c_1^{k_1}; \dots; c_p^1, \dots, c_p^{k_p})$, $c_i^j = \# B_i^j$, является инвариантом накрытия относительно оснащенных изотопий. Нетрудно также показать, что такой набор, рассматриваемый с точностью до

IO заказ 280

естественного действия нормализатора группы монодромии в S_d, является инвариантом (неоснащенного) накрытия относительно изотопий, а если каждый класс E_i^j вместе с подстановкой σ содержит подстановку σ^{-1}, то инвариантом накрытия относительно гомеоморфизмов.

<u>4.3. Склейка накрытий</u>. Пусть $\varphi_i : M_i \to S^2$ с $i=1,2$ есть d-листные разветвленные накрытия с оснащениями (z_1, τ_1) и (z_2, τ_2), а $\mathcal{D}_i \subset S^2 \setminus B_{\varphi_i}$ – замкнутые диски, такие что $z_i \in \partial\mathcal{D}_i$. Рассмотрим естественную ориентацию сферы и ориентируем границы дисков как границы дополнений $S^2 \setminus \mathcal{D}_i$. Удалим из базы каждого накрытия внутренность, а из накрывающего – полный прообраз внутренности соответствующего диска. Составим из получившихся накрытий новое, склеив базы и накрывающие по гомеоморфизмам, обращающим естественные ориентации и задающим оснащенный гомеоморфизм сокращений этих накрытий на края баз и накрывающих. Обозначим накрывающее через M. Отождествив базу нового накрытия с S^2, получим накрытие $M \to S^2$, которое обозначим $\varphi_1 \natural \varphi_2$. Операцию $\natural$ будем называть оснащенной склейкой. Множество классов оснащенно гомеоморфных накрытий сферы с операцией $\natural$ является абелевой полугруппой, единицу которой представляет тривиальное накрытие $S^2 \amalg S^2 \amalg \ldots \amalg S^2 \to S^2$. Будем говорить, что накрытие φ является результатом склейки накрытий φ_1 и φ_2, если φ с некоторым оснащением можно получить как оснащенную склейку накрытий φ_1 и φ_2, снабженных некоторыми оснащениями; в этом случае будем также писать $\varphi = \varphi_1 \natural \varphi_2$. Следующее утверждение очевидно.

4.3.1. (i) Если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ – системы Гурвица оснащенных накрытий φ_1 и φ_2, отвечающие одинаково ориентированным вложенным базисам, то $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_s)$ – система Гурвица оснащенного накрытия $\varphi_1 \natural \varphi_2$.

(ii) Если φ имеет систему Гурвица $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_s)$ и $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_m = 1$ (и значит $\beta_1 \cdot \beta_2 \ldots \beta_s = 1$), то $\varphi = \varphi_1 \natural \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 – накрытия с системами Гурвица $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ (отвечающими одинаково ориентированным вложенным базисам). □

4.3.2. УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть все точки разветвления накрытия $\varphi : M \to S^2$ имеют нечетный порядок и $\varphi = \varphi_1 \natural \varphi_2$, тогда $\mathrm{Arf}(\varphi) = \mathrm{Arf}(\varphi_1) + \mathrm{Arf}(\varphi_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M_1 и M_2 – накрывающие поверхности накрытий φ_1 и φ_2. Базис в $H_1(M, \mathbb{Z}_2)$ можно выбрать так, что он будет состоять из элементов базисов в $H_1(M_1, \mathbb{Z}_2)$ и $H_1(M_2, \mathbb{Z}_2)$, и, кроме того, еще из некоторого числа элементов

$a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$, таких что представителями $a_1, \dots, a_k$ являются компоненты прообраза окружности в S^2 , получившейся в результате склейки из границ удаленных дисков. Очевидно, $\theta(a_i) = 0$. □

4.3.3. УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $\varphi_i : M_i \to S^2$ с $i=1,2$ есть d-листные, $d \le 4$, разветвленные оснащенные накрытия, все точки ветвления которых - точки типа [3] ; тогда $\sigma_{\mathbb{Z}}(\varphi_1 \natural \varphi_2) = \sigma_{\mathbb{Z}}(\varphi_1) + \sigma_{\mathbb{Z}}(\varphi_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ и $\mathcal{H}_2 = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ - системы Гурвица накрытий φ_1 и φ_2 , отвечающие естественной ориентации сферы S^2 . Тогда последовательность подстановок $\mathcal{H} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_s)$ является системой Гурвица накрытия $\varphi_1 \natural \varphi_2$. Имеем

$$\sigma_{\mathbb{Z}}(\varphi_1 \natural \varphi_2) = \sigma_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}) = \sigma_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}_1) + \sigma_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}_2) = \sigma_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}_1) + \sigma_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}_2). \ \square$$

5. Канонические системы Гурвица

Здесь приводятся результаты классификации систем Гурвица с точностью до действия групп $G_n, G_n \times S_d$ и $\hat{G}_n \times S_d$.

5.I. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{H}$ - транзитивная система Гурвица подстановок группы S_d с паспортом $\{n [3]\}$. Тогда $n \geqslant d-1$, $\langle \mathcal{H} \rangle = A_d$, множества $G_n \times S_d(\mathcal{H})$ и $\tilde{G}_n \times S_d(\mathcal{H})$ совпадают и с точностью до действия группы $G_n \times S_d$ система Гурвица $\mathcal{H}$ имеет вид:

а) при $d=3$

(I) $\{k(1\,2\,3), m(1\,3\,2)\}$ с $k \leqslant m$, $m-k = \sigma(\mathcal{H})$;

б) при $d=4$

(2) $\{k(1\,2\,3), 3(2\,4\,3)\}$ при $\sigma(\mathcal{H}) = n$,

(3) $\{k(1\,2\,3), m(1\,3\,2), (2\,4\,3), (2\,3\,4)\}$ с $k \leqslant m$, $m-k = \sigma(\mathcal{H})$,

или

(4) $\{k(1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,4\,3), (2\,3\,4)\}$ с $k \leqslant m+2$; $m+2-k = \sigma(\mathcal{H})$;

с) при четном $d > 4$

(5) $\{k(1\,2\,3), m(1\,3\,2), (3\,2\,4), (2\,3\,4), (5\,4\,6), (4\,5\,6), \dots, (d-1, d-2, d), (d-2, d-1, d)\}$,

$k = m$ при n четном и $k = m+3$ при n нечетном

или

(6) $\{k(1\,2\,3), m(1\,3\,2), (1\,4\,3), (2\,3\,4); (5\,4\,6), (4\,5\,6), \dots, (d-1, d-2, d), (d-2, d-1, d)\}$,

$k = m-1$ при n нечетном и $k = m+2$ при n четном;

при нечетном $d>4$

(7) $\{k(123), m(132); (435), (345), (657), (567), \ldots, (d-1, d-2, d), (d-2, d-1, d)\}$

$k=m$ при n четном и $k=m+3$ при нечетном,

или

(8) $\{k(123), m(132), (143), (234); (435), (345), \ldots, (d-1, d-2, d), (d-2, d-1, d)\}$

$m=k+1$ при n нечетном и $k=m+2$ при n четном. □

5.2. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $d=3$ или $d=4$ и $\mathcal{H}$ пробегает множество систем Гурвица с паспортом $\{n[3]\}$. Тогда $\sigma(\mathcal{H})$ пробегает множество

$0, 6, 12, \ldots, 6[n/6]$ при n четном,

$3, 9, 15, \ldots, 6[(n+3)/6]-3$ при n нечетном. □

5.3. ТЕОРЕМА. С точностью до действия группы G транзитивная система Гурвица $\mathcal{H}$ подстановок из S_d с паспортом $\{k[2], s[3]\}$ единственна и имеет следующий канонический вид:

а) при $s=1$

(9) $\{(123), (12), (23), (k-2d+4)(23), 2(34), \ldots, 2(d-1, d)\}$,

б) при $d=3$ и $s>1$

(10) $\{r(123), q(132), k(23)\}$,

в) при $d>3$ и $s>1$

(11) $\{r(123), q(132), (324), (234), \ldots, (d'-1, d'-2, d'), (d'-2, d'-1, d');$

$2(d', d'+1), \ldots, 2(d-1, d)\}$,

если $\frac{k}{2}<d-3$, $d'=d-\frac{k}{2}$ четное и $k+2s\neq 2d-2$;

(12) $\{r(123), q(132), (435), (345), \ldots, (d'-1, d'-2, d'), (d'-2, d'-1, d');$

$2(d', d'+1), \ldots, 2(d-1, d)\}$,

если $\frac{k}{2}<d-3$ и $d'=d-\frac{k}{2}$ нечетное;

(13) $\{r(123), q(132), (k-2d+8)(34), 2(45), \ldots, 2(d-1, d)\}$,

если $\frac{k}{2}\geqslant d-3$,

В (10) - (13) $r=q$ при s четном и $r=q+3$ при s нечетном.

(14) $\{(132), (143), (234), (546)(456), \ldots, (d'-1, d'-2, d'),$

$(d'-2, d'-1, d');\ 2(d', d'+1), \ldots, 2(d-1, d)\}$,

если $k+2s=2d-2$ и s нечетное. □.

5.4. СЛЕДСТВИЕ. Транзитивная система Гурвица подстановок из S_d с паспортом $\{ k[2], s[3] \}$ существует тогда и только тогда, когда k четное и выполнено неравенство $k+2s \geqslant 2d-2$. □

5.5. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{H}$ - система Гурвица подстановок из S_d с паспортом $\mathfrak{D} = \{ k[2], n_1 E_1, n_2 E_2, \ldots, n_p E_p \}$. Тогда если $\langle \mathcal{H} \rangle = S_d$ и $k \geqslant 2d-2-\max\{\sum_{d_i \in E}(d_i - 1) \mid E \in \mathfrak{D}\}$, то $\mathcal{H}$ с точностью до действия группы G_n определяется паспортом и имеет следующий вид:

(I5) $\{ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k ; j_1^1, \ldots j_1^{n_1}, j_2^1, \ldots, j_2^{n_2}, \ldots, j_p^1, \ldots, j_p^{n_p} \}$,

где $E(\sigma_i) = [2]$, $E(j_i^j) = E_i$, $j_i^j = j_i^\ell$. □

6. Классификационные результаты

В этом пункте классификационные результаты, анонсированные автором в [I2] , выводятся из результатов предыдущего пункта. Кроме того, для накрытий, классификация которых проведена, решается задача нахождения всех перестановок точек ветвления, индуцированных поднимаемыми в накрывающее гомеоморфизмами сферы.

6.I. ТЕОРЕМА. Связное разветвленное накрытие сферы, имеющее точки ветвления только типов [2] и [3] , в случае, когда число точек типа [2] отлично от нуля, определяется с точностью до гомеоморфизма числом листов d , числом k точек типа [2] и числом s точек типа [3]. Набор инвариантов (k, s, d) тогда и только тогда реализуется накрытием, удовлетворяющим условиям теоремы, когда k четное и выполнено неравенство $k+2s \geqslant 2d-2$.

Утверждение теоремы является прямым следствием теорем 3.3.3 и 5.3. .

6.2. ТЕОРЕМА. Каждое связное d -листное разветвленное накрытие сферы S^2 , имеющее n точек ветвления типа [3] и не имеющее точек ветвления других типов, с точностью до гомеоморфизма определяется: парой (n, σ) при $d=3$; тройкой $(n, \sigma, \mathrm{Arf})$ при $d=4$; парой (n, Arf) при $d>4$. Инварианты n, σ, Arf принимают при этом любые значения, удовлетворяющие следующим ограничениям: $n \geqslant d-1$;

$$\sigma = \begin{cases} 0, 6, 12, \ldots, 6[n/6] & \text{при } n \text{ четном,} \\ 3, 9, 15, \ldots, 6[(n+3)/6] - 3 & \text{при } n \text{ нечетном;} \end{cases}$$

$$\mathrm{Arf} = \begin{cases} 0 \text{ и } 1 & \text{при } n > d-1, \\ n \bmod 2 & \text{при } n = d-1. \end{cases}$$

Доказательство см. 6.4.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть связное d-листное разветвленное накрытие сферы S^2 имеет n точек ветвления типа [3], и не имеет точек ветвления других типов. Тогда:

I) при $d=3$ с точностью до гомеоморфизма существует ровно $[(2n+9+3(-1)^n/12]$ накрытий. В частности, при $2\leq n\leq 5$ и $n=7$ накрытие единственно;

2) при $d=4$ и $n>3$ с точностью до гомеоморфизма существует ровно $2[(2n+9+3(-1)^n/12]$ накрытий. При $n=3$ накрытие единственно;

3) при $d>4$ с точностью до гомеоморфизма существует ровно два накрытия при $n>d-1$ и ровно одно накрытие при $n=d-1$. □

Разветвленное d-листное накрытие $\psi: M \amalg S^2 \amalg S^2 \amalg \ldots \amalg S^2 \to S^2$ назовем элементарным, если M - сфера S^2 или тор T^2, множество точек разветвления содержится в M, все точки ветвления имеют тип [3] и их число $|B_\varphi|$ не превосходит четырех, число $d(M)$ листов сужения $\psi|_M: M \to S^2$ также не больше четырех. Такому накрытию отвечает четверка инвариантов $(|B_\varphi|, d(M), Arf, \sigma)$. Заметим, что уже первые три инварианта определяют элементарное накрытие с точностью до гомеоморфизма.

6.3. ТЕОРЕМА. Любое d-листное накрытие $\varphi: M \to S^2$, имеющее точки ветвления только типа [3], является результатом склейки элементарных d-листных накрытий следующих четырех типов:

$\psi_1: S^2 \amalg S^2 \amalg \ldots \amalg S^2 \to S^2$ с инвариантами $(2,3,0,0)$,

$\psi_2: T^2 \amalg S^2 \amalg \ldots \amalg S^2 \to S^2$ с инвариантами $(3,3,1,3)$,

$\psi_3: S^2 \amalg S^2 \amalg \ldots \amalg S^2 \to S^2$ с инвариантами $(3,4,0,3)$,

$\psi_4: T^2 \amalg S^2 \amalg \ldots \amalg S^2 \to S^2$ с инвариантами $(4,4,1,0)$.

При этом если $d=3$, то $\varphi = \psi_1 \natural \cdots \natural \psi_1 \natural \psi_2 \natural \ldots \natural \psi_2$; если φ связное и $d=4$, то $\varphi = \psi_1 \natural \ldots \natural \psi_1 \natural \psi_2 \natural \ldots \natural \psi_2 \natural \psi_i$ с $i=3,4$;
если φ связное и $d>4$, то $\varphi = \psi_1 \natural \cdots \natural \psi_1 \natural \psi_i$ с $i=2,3,4$.

Обозначим через $R(\psi)$ множество, состоящее из ψ с различными оснащениями. В качестве следствия из теоремы 6.3 немедленно получаем, что множество $\{R(\psi_1), R(\psi_2), R(\psi_3), R(\psi_4)\}$ представляет минимальный набор образующих полугруппы классов оснащенно гомеоморфных d-листных, $d>3$, накрытий сферы, все точки ветвления которых имеют тип [3]. При $d=3$ такой минимальный набор представляет множество $\{R(\psi_1), R(\psi_2)\}$.

6.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 6.3 и 6.2. Нетрудно видеть, что каждая каноническая система Гурвица, указанная в формулировке теоремы 5.I, допускает разбиение на "элементарные" подсистемы Гурвица. Эти элементарные системы Гурвица суть (с точностью до сопряжения) следующие четыре: $\{(123),(132)\}$; $\{3(123)\}$; $\{(132),(143),(234)\}$; $\{(123),(123),(143),(234)\}$. Ясно, что они определяют различные классы гомеоморфных разветвленных d-листных накрытий сферы. Пусть $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ – некоторые представители этих классов. Очевидно, это элементарные накрытия $\psi_i : M_i \amalg S^2 \amalg \ldots \amalg S^2 \to S^2$. Известная формула Римана-Гурвица дает следующие значения эйлеровых характеристик поверхностей M_i: $\chi(M_1)=2$, $\chi(M_2)=0$, $\chi(M_3)=2$, $\chi(M_4)=0$. Очевидно, $|B_{\psi_1}|=2$, $|B_{\psi_2}|=|B_{\psi_3}|=3$, $|B_{\psi_4}|=4$; $\sigma|\psi_1|=\sigma|\psi_4|=0$, $\sigma|\psi_2|=\sigma|\psi_3|=3$. Подсчет Arf-инвариантов дает следующие значения: $Arf|\psi_1|= Arf(\psi_3)=0$, $Arf(\psi_2)=Arf(\psi_4)=1$. Таким образом, накрытия $\psi_1,\ldots,\psi_4$ есть в точности указанные в 6.3 элементарные накрытия. Утверждение теоремы 6.3 немедленно следует из того, что каждое разветвленное накрытие имеет систему Гурвица одного из указанных в 5.I видов и утверждения 4.3.I.

Докажем теорему 6.2. Пусть $\mathcal{H}$ – некоторая система Гурвица, φ – некоторое накрытие из определяемого системой Гурвица класса оснащенных накрытий. Положим $Arf(\mathcal{H}) = Arf(\varphi)$. Из общих классификационных теорем (см. 3.3) следует, что $Arf(\mathcal{H})$ является инвариантом системы Гурвица $\mathcal{H}$ относительно действий групп $G_n, \tilde{G}_n$, $G_n \times S_d$ и $\tilde{G}_n \times S_d$. Пользуясь теоремой 6.3 и утверждениями 4.3.I, 4.3.2, можно вычислить Arf-инварианты указанных в формулировке теоремы 5.I канонических систем Гурвица. После этого вычисления оказывается, что система Гурвица $\mathcal{H}$ подстановок из S_d с паспортом $\{n[3]\}$ определяется (с точностью до действия группы $G_n \times S_d$) сигнатурой $\sigma(\mathcal{H})$ при $d=3$, парой инвариантов $\sigma(\mathcal{H})$, $Arf(\mathcal{H})$ при $d=4$ и Arf-инвариантом при $d>4$; теорема 6.2 оказывается, таким образом, простой интерпретацией (см. 3.3.3) этого факта. □

Связное разветвленное накрытие $\varphi: M \to S^2$ назовем разложимым, если его можно представить как композицию $M \to M^1 \to S^2$ неоднолистных разветвленных накрытий. Нетрудно показать, что d-листное накрытие $\varphi: M \to S^2$ неразложимо тогда и только тогда, когда элементы системы Гурвица накрытия порождают примитивную подгруппу (см. [II]) группы S_d. Ясно, что накрытие с простым числом листов неразложимо. Но уже при $d=4$ существуют как разложимые, так и неразложимые накрытия с одинаковым паспортом ветвления, например, накрытия с паспортом $\{[2],[2],[4],[4]\}$. Если накрытие имеет точку разветвления простого порядка, большего $d/2$, то оно неразложимо. Всякое накрытие с паспортом $\{k[2], s[3]\}$, $k>0$ или с паспортом $\{n[3]\}$ неразложимо, так как в первом случае группа монодромии есть вся симметрическая группа S_d, а во втором случае она совпадает со знакопеременной группой A_d. Следующая теорема является усилением теоремы 4 из [I2].

6.5. ТЕОРЕМА. Пусть $\varphi: M \to S^2$ - связное d-листное неразложимое накрытие, k - число точек ветвления типа [2]. Если $k \geq 2d-2-\max\{\sum_{d_i \in E(x)} (d_i-1) \mid x \in B_\varphi\}$, то накрытие определяется с точностью до гомеоморфизма числом листов и паспортом ветвления.

Утверждение теоремы прямо следует из теорем 3.3.3 и 5.5. □

Результаты, эквивалентные специальному случаю теоремы 6.5 с $D=\{k[2],E\}$, были получены независимо Берштейном, Едмондсоном [4] и С.М.Натанзоном [I4].

ЗАМЕЧАНИЕ. В рассмотренных здесь ситуациях различие между топологической и изотопической классификациями несущественно, гомеоморфные накрытия изотопны.

Пусть $\varphi: M \to S^2$ - разветвленное накрытие. Перестановкой множества ветвления $B_\varphi=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ накрытия φ будем называть биективное отображение $T: B_\varphi \to B_\varphi$, такое что $E(x_i)=E(T(x_i))$.

6.6. ТЕОРЕМА. (i) Пусть φ - накрытие, удовлетворяющее условиям теоремы 6.I. Тогда всякая перестановка точек множества ветвления реализуется поднимаемым гомеоморфизмом сферы.

(ii) Пусть φ есть d-листное накрытие, удовлетворяющее условиям теоремы 6.2. Тогда при $d>4$ любая перестановка множества ветвления реализуется поднимаемым гомеоморфизмом, при $d=3$ и $d=4$ перестановка $T: B_\varphi \to B_\varphi$ реализуется поднимаемым гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда $T(\{B_+,B_-\})=\{B_+,B_-\}$.

(iii) Пусть φ -накрытие, удовлетворяющее условиям теоремы 6.5. Тогда всякая перестановка точек множества ветвления реализуется поднимаемым гомеоморфизмом.*)

***) по поводу усиления частного случая этой теоремы с $D=\{k[2],E\}$ см. С.М.Натанзон [I4].**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}$ - каноническая система Гурвица рассматриваемого накрытия. Заметим, что во всех случаях подстановки одинакового типа расположены в $\mathcal{H}$ рядом. В силу 3.4.2 достаточно показать, что для каждой пары (α_i, α_{i+1}) подстановок одинакового типа (и принадлежащих к одному классу сопряженных элементов в случае (ii), $d=3,4$) найдется элемент $\widetilde{\omega}_i \in G_n$, такой что $\widetilde{\omega}_i \mathcal{H} = \mathcal{H}$ и $\varkappa(\widetilde{\omega}_i) = (i, i+1) \in S_n$.

Случай (ii) . Рассмотрим все типичные случаи расположения 3-циклов в $\mathcal{H}$ и выпишем соответствующие им $\widetilde{\omega}_i$:

I. $\overset{i}{(123)}, \overset{i+1}{(123)}$

(α_i, α_i) $\quad \widetilde{\omega}_i = \omega_i$,

2. $(132), (143)$ $\quad \widetilde{\omega}_i = \omega_i^3$,

3. $(143), (234)$ $\quad \widetilde{\omega}_i = \omega_i^3$,

4. $(234), (546)$ $\quad \widetilde{\omega}_i = \omega_i^5$,

5. $(234), (435)$ $\quad \widetilde{\omega}_i = \omega_i^3$,

6. $\overset{i}{(324)}, \overset{i+1}{(234)}, \overset{i+2}{(546)}$ $\quad \widetilde{\omega}_i = \omega_{i+1}^5\, \omega_i\, \omega_{i+1}^5\, \omega_i\, \omega_{i+1}^5$,

7. $\overset{i-1}{(234)}, \overset{i}{(546)}, \overset{i+1}{(456)}$ $\quad \widetilde{\omega}_i = \omega_{i-1}^5\, \omega_i\, \omega_{i-1}^5\, \omega_i\, \omega_{i-1}^5$,

8. $\overset{i-1}{(123)}^{\pm 1}, \overset{i}{(435)}, \overset{i+1}{(345)}$ $\quad \widetilde{\omega}_i = \omega_{i-1}^5\, \omega_i\, \omega_{i-1}^5\, \omega_i\, \omega_{i-1}^5$,

9. $\overset{i-3}{(132)}^{\pm 1}, \overset{i-2}{(143)}, \overset{i-1}{(234)}, \overset{i}{(435)}, \overset{i+1}{(345)}$

$$\widetilde{\omega}_i = \omega_{i-3}\, \omega_{i-2}\, \omega_{i-1}^5\, \omega_i\, \omega_{i-1}^5\, \omega_i\, \omega_{i-1}^5\, \omega_{i-2}^{-1}\, \omega_{i-3}^{-1} ,$$

IO. $\overset{i}{(123)}, \overset{i+1}{(143)}, \overset{i+2}{(234)}, \overset{i+3}{(546)}$

$$\widetilde{\omega}_i = \omega_{i+2}^3\, \omega_{i+1}^2\, \omega_i\, \omega_{i+1}^{-2}\, \omega_{i+2}^3 ,$$

II. $\overset{i}{(123)}, \overset{i+1}{(143)}, \overset{i+2}{(234)}, \overset{i+3}{(435)}$

$$\widetilde{\omega}_i = \omega_{i+1}\, \omega_{i+2}^2\, \omega_{i+1}\, \omega_i\, \omega_{i+1}^{-1}\, \omega_{i+2}^{-2}\, \omega_{i+1}^{-1} ,$$

I2. $\mathcal{H} = (\ldots, \overset{i}{(123)}, \overset{i+1}{(132)}, A, \overset{j+2}{(435)}, \overset{j+3}{(345)}, \ldots)$

$$\widetilde{\omega}_i = \omega^{-1}\omega_{j+1}^5\, \omega_j\, \omega_{j+1}^5\, \omega_j\, \omega_{j+1}^5\, \omega , \qquad \text{где } \omega = \prod_{k=j}^{i} (\omega_k \omega_{k+1}),$$

I3. $\mathcal{H} = (\ldots, \overset{i}{(123)}, \overset{i+1}{(132)}, A, \overset{j}{(234)}, \overset{j+1}{(546)}, \overset{j+2}{(456)}, \ldots)$

$$\widetilde{\omega}_i = \omega^{-1}\omega_j\, \omega_{j+1}\, \omega_{j-1}^5\, \omega_{j-2}\, \omega_{j-1}^5\, \omega_{j-2}\, \omega_{j-1}^5\, \omega_{j+1}^{-1}\, \omega_j^{-1}\, \omega ,$$

где $\omega = \prod_{k=j-2}^{k=i} (\omega_k \omega_{k+1})$.

Таким образом, при $d > 4$ для каждой пары (α_i, α_{i+1}) элементов из $\mathcal{H}$ имеется $\widetilde{\omega}_i \in G_n$. Пусть $d=3$ или $d=4$. Покажем, что группа $\varkappa(st(\mathcal{H}))$ изоморфна группе $S_{n_+} \times S_{n_-}$, где $n_\pm$ есть число подстановок из $\mathcal{H}$, содержащихся в одном из двух классов сопряженных в A_d 3-циклов или эквивалентно $n_\pm$ есть число элементов множества $B_\pm$. Упомянутые классы суть $\{(123)\}$ и $\{(132)\}$ при $d=3$ и $\{(123),(142),(134),(234)\}$, $\{(132),(124),(143),(234)\}$ при $d=4$. Если система Гурвица $\mathcal{H}$ имеет вид (I), (2) или (4), то утверждение немедленно следует из I, 2, 3. Если $\mathcal{H}$ имеет вид (3), то она G_n-эквивалентна системе Гурвица $\{(243), k(123), s(132),(234)\}$ и следовательно утверждение также справедливо. Осталось заметить, что если $n_+ = n_-$ (т.е. $\sigma = 0$), то после сопряжения системы Гурвица на $(23) \in S_d$ элементы одного класса сопряженных подстановок переходят в элементы другого класса и, следовательно, реализуется любая подстановка $s: B_\varphi \to B_\varphi$, такая что $s(B_+) = B_-$, $s(B_-) = B_+$.

Случай (i). Рассмотрим пару (α_i, α_{i+1}) стоящих рядом подстановок одного типа из канонической системы Гурвица накрытия. Если α_i, α_{i+1} транспозиции, то $\widetilde{\omega}_i = \omega_i$ в случае $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ и $\widetilde{\omega}_i = \omega_i^3$ в случае $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Пусть α_i, α_{i+1} – 3-циклы. Если $\mathcal{H}$ имеет вид (I4) или вид (II), (I2) при $d - \frac{k}{2} > 4$, то существование $\widetilde{\omega}_i$ следует из (ii). Остается рассмотреть лишь случаи, когда $\mathcal{H}$ имеет вид (I0) и вид (I3) при $d - \frac{k}{2} = 4$, а $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = ((123),(132))$ или $((324),(234))$. Нахождение соответствующих $\widetilde{\omega}_i$ не составляет большого труда.

Случай (iii). Пусть (α_i, α_{i+1}) – пара стоящих рядом подстановок одного типа из системы Гурвица (I5) накрытия. Если α_i, α_{i+1} – не транспозиции, то $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ и $\widetilde{\omega}_i = \omega_i$. Пусть (α_i, α_{i+1}) – пара транспозиций. Нетрудно видеть, что найдется коса $\omega \in G_n$ (возможно, тривиальная), такая что $(\ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots) \overset{\omega}{\mapsto} (\ldots, \alpha_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}, \ldots)$ и транспозиции $\alpha_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}$ либо совпадают, либо их произведение есть 3-цикл; в первом случае $\widetilde{\omega}_i = \omega^{-1}\omega_i\omega$, во втором случае $\widetilde{\omega}_i = \omega^{-1}\omega_i^3\omega$. □

Пусть $\varphi: M \to S^2$ – связное разветвленное накрытие с тривиальной группой автоморфизмов. Обозначим через $L(\varphi)$ группу изотопических классов гомеоморфизмов сферы, поднимаемых до гомеоморфизма $M \to M$ накрывающей поверхности, через $Map(M)$ – группу изотопических классов гомеоморфизмов поверхности M, через $\gamma_\varphi: L(\varphi) \to Map(M)$ – естественный гомоморфизм.

6.6. ТЕОРЕМА. Пусть $\varphi : M \to S^2$ - связное d -листное разветвленное накрытие с паспортом $\{k[2], s[3]\}$. Тогда если $k+2s = 2d-2$ или $s \leq d-3$, то гомоморфизм $\gamma_\varphi : L(\varphi) \to Map(M)$ определен и является эпиморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $k+2s = 2d-2$, то накрывающая поверхность есть сфера и утверждение теоремы очевидно. Пусть $s \leq d-3$. В этом случае группа монодромии накрытия есть S_d, $d \geq 3$, и, как нетрудно увидеть, группа автоморфизмов накрытия тривиальна. Из теоремы 5.3 легко следует, что среди систем Гурвица накрытия φ имеется при s четном система Гурвица

$\{(123),(132),(435),(345),\ldots,(s,s-1,s+1),(s-1,s,s+1); m(s+1,s+2),\ldots,2(d-1,d)\}$;

при s нечетном, $s>1$, система Гурвица

$\{(132),(143),(234),(546),(456),\ldots,(s,s-1,s+1),(s-1,s,s+1); m(s+1,s+2),\ldots,2(d-1,d)\}$;

и при $s=1$ система Гурвица (9). Из 4.3.I немедленно следует, что $\varphi = \varphi_1 \# \varphi_2$, где $\varphi_1 : S^2 \amalg \ldots \amalg S^2 \to S^2$ - разветвленное накрытие с паспортом $\{s[3]\}$ при $s>1$ и с паспортом $\{[3], 2[2]\}$ при $s=1$; $\varphi_2 : S^2 \amalg \ldots \amalg S^2 \amalg \tilde{M} \to S^2$ - разветвленное накрытие с паспортом $\{k[2]\}$ при $s>1$ и с паспортом $\{(k-2)[2]\}$ при $s=1$, поверхность $\tilde{M}$ гомеоморфна поверхности M. Отождествим M с $\tilde{M}$ и рассмотрим сужение $\tilde{\varphi} = \varphi_2|_M : M \to S^2$. Так как $\tilde{\varphi}$ - простое накрытие с числом листов $d-s \geq 3$, то (см. [IO]) $\gamma_{\tilde{\varphi}}(L(\tilde{\varphi})) = Map(M)$. Следовательно $\gamma_\varphi(L(\varphi)) = Map(M)$. □

Литература

1. L ü r o t h J. Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche. - Math.Ann., 1871, 4, 181-184.
2. C l e b s c h A. Zur Theorie der Riemann'schen Flächen. - Math.Ann., 1873, 6, 216-230.
3. H u r w i t z A. Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen verzweigungspunkten. - Math.Ann., 1891, 39, 1-60.
4. B e r s t e i n I., Edmonds A.L. On the classification of generic branched coverings of surfaces. - Illinois J.Math., 1984, 28, 64-82.
5. S k o r a R. Maps between surfaces. - Trans.Amer.Math.Soc., 1985, 291, N 2, 669-679.

6. G a b a i D., K a z e r W.H. The classification of maps of surfaces. - Bull.Amer.Math.Soc., 1986, 14, N 2, 283-286.
7. J o h n s o n D. Spin structure and quadratic forms on surfaces. - Journ.London Math.Soc., 1980, 22, N 2, 365-373.
8. M a g n u s W. Über automorphismen von Fundamental-gruppen berandeter Flächen. - Math.Ann., 1934, 109, 617-646.
9. B i r m a n J. Braids, Links, and Mapping Class Groups. - Ann. of Math.Studies, 1974, v.82.
10. Berstein I., Edmonds A.L. On the construction of branched coverings of low-dimentional manifolds. - Trans.Amer.Math.Soc., 1979, 247, 87-124.
11. К у р о ш А.Г. Теория групп, 3-е изд., М., 1967.
12. П р о т о п о п о в А.Н. Гомеоморфизмы разветвленных накрытий двумерной сферы. - ДАН, 1986, 290, № 4, 792-795.
13. М а г н у с В., К а р р а с А., С о л и т э р Д. Комбинаторная теория групп., М., 1974.
14. Н а т а н з о н С.М. Вещественные мероморфные функции на вещественных алгебраических кривых. - ДАН СССР, 1987, 297, № 1, 40-43.

Protopopov A.N. Topological classification of branched coverings of the two-dimensional sphere.

The paper is devoted to the following questions: 1) what coverings of 2-sphere besides the simple ones are determined by the obvious invariants (number of sheets, number of branch points and types of the branch points), 2) when the set of obvious invariants can be augmented by simple combinatorial invariants so that the resultant set determines the covering up to homeomorphism. In some cases such additional invariants (Arf-invariant and signature) have been constructed by the author. To prove the result, a reduction of the classification problem of branched coverings of 2-sphere to some combinatorial problem which is essentially due to Hurwitz, is developed.