Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

J. A. Lappo-Danilevski, Résolution algorithmique des problèmes réguliers de Poincaré et de Riemann (*Mémoire premier*: Le problème de Poincaré, concernant la construction d'un groupe de monodromie d'un système donné d'équations différentielles linéaires aux intégrales régulières), *J. Soc. Phys.-Math. Léningrade*, 1928, Volume 2, Issue 1, 94–120

https://www.mathnet.ru/eng/lfmo36

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.175
December 15, 2025, 21:01:52

Résolution algorithmique des problèmes réguliers de Poincaré et de Riemann.

(*Mémoire premier*: **Le problème de Poincaré, concernant la construction d'un groupe de monodromie d'un système donné d'équations différentielles linéaires aux intégrales régulières**).

Par M. *J. A. Lappo-Danilevski* (Léningrad).

I.

§ 1. Fixons m points a_j $(j=1, 2, \ldots m)$ à distance finie sur le plan de la variable complexe x et traçons m coupures $(a_j \infty)$, joignant ces points au point à l'infini.

Désignons par:

$$U_j = \| u_{kl}^{(j)} \| \quad \text{et} \quad V_j = \| v_{kl}^{(j)} \| \quad (j=1, 2 \ldots m)$$

deux systèmes de substitutions linéaires du dégré n, dont les coefficients $u_{kl}^{(j)}$ et $v_{kl}^{(j)}$ $(k, l=1, 2, \ldots n)$ sont independants de x. Nommons „matrice régulière, admettant les substitutions différentielles U_j et les substitutions intégrales V_j en points singuliers respectivement a_j", toute matrice

$$Y(x) = \| y_{kl}(x) \|,$$

formée de n^2 fonctions analytiques $y_{kl}(x)$, satistaisant aux conditions suivantes.

1°. $Y(x)$ représente une matrice intégrale du système d'équations différentielles linéaires aux singularités régulières:

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{YU_j}{x-a_j}. \tag{1}$$

2°. Les valeurs des fonctions $y_{kl}(x)$ sur le bord positif et négatif de toute coupure $(a_j \infty)$ *) sont lièes par les rélations:

$$Y(\overset{-}{x}) = V_j \cdot Y(\overset{+}{x}). \tag{2}$$

*) En suivant la coupure $(a_j \infty)$ du point a_j à l'infini on a le bord positif du côté gauche.

Les deux problèmes fondamentaux de la théorie des matrices régulières sont:

A) **Le problème de Poincaré, concernant la détermination des matrices régulières et des systèmes correspondant des substitutions intégrales, les substitutions différentielles, ainsi que la configuration des points singuliers étant supposées données.**

B) **Le problème de Riemann, concernant la détermination des matrices regulières et des systémes correspondant des substitutions différentielles, les substitutions intégrales ainsi que la configuration des points singuliers étant suposées données.**

§ 2. Le groupe dérivé des substitutions intégrales V_j étant un groupe de monodromie du système d'équations (1), la résolution du problème (A) nous fournit évidemment la résolution du problème sur la détermination d'un groupe de monodromie d'un système donné (1). Ce problème a été traité dans toute sa généralité le première fois par Henri Poincaré dans son mémoire célèbre: „Sur les groupes d'équations linéaires" *).

L'éminent géomètre a établi, que les coefficients $v_{kl}^{(j)}$ sont les fonctions entières des coefficients $u_{kl}^{(j)}$, mais sans donner les expressions explicites de ces fonctions. Ses recherches, ainsi que celles de Mittag-Leffler **) concernent plutôt la détermination des invariants des groupes d'équations linéaires dont les coefficients sont des fonctions algébriques (Poincaré), ou des fonctions analytiques uniformes, ne possédant qu'un nombre fini de points singuliers dans toutes portion finie du plan de la variable complexe (Mittag-Leffler). Les expressions analytiques des coefficients $v_{kl}^{(j)}$, mettant en évidence le caractère de leur dépendance des coefficients $u_{kl}^{(j)}$, ainsi que de la configuration des points singuliers a_j, manquaient encore. Ces expressions, ainsi que les expressions analogues pour les matrices régulières correspondant se trouvent établies dans le troisième chapitre de ce mémoire (***). Elles constituent la résolution algorithmique du problème régulier de Poincaré. Le deuxième chapitre présente un examem préliminaire des fonctions analytiques des substitutions linéaires, ce qui est indispensable pour fonder la théorie algorithmique des matrices régulières ****).

---

*) Acta Mathematica (1884) t. 4, p. 201; Œuvres; (1916), t. II; p. 306.

**) Acta Mathematica (1891), t. 15, p. 1.

***) Les résultats principaux, concernant la résolution algorithmique du problème régulier de Poincaré ont été énoncés dans notre Note: C. R. (1927) t. 185; p. 439. Voir aussi notre mémoire: „Théorie algorithmique des oorps de Riemann"; Recueil mathèmatique de Moscou; (1927); t. 34 fascic. 2; pp. 113—148.

****) Cette méthode de l'investigation fournit, outre cela, la résolution algorithmique du problème de Poincaré pour systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels arbitraires (Voir notre Note: C. R. (1928) t. 186, p. 342).

§ 3. Le problème (B) se reduit évidemment au problème bien connu de Riemann sur la construction de matrices régulières et d'équations linéaires correspondant, admettant un groupe de monodromie donné. Le fait d'existence des solutions du problème de Riemann a été etabli par M. M. Hilbert *), Plemelj **), Birkhoff ***), Garnier ****) et Schlesinger *****); d'ailleurs le cas général n'a été truité que par M. M. Plemelj et Birkhoff. Ces deux géomètres démontrent d'abord l'existence des solutions d'un problème altéré, en considérant un système des coupures, liant consécutivement les points singuliers par une courbe fermée et en supposant, que les coefficients des substitutions données sont les fonctions des points de cette courbe, admettant les dérivées continues A l'aide d'un certain système des fonctions non analytiques ils demontrent ensuite, que l'existence des solutions du problème altéré entraîne l'existence des solutions du problème propre de Riemann. Cette méthode ne peut donner ancun algorithme analytique pour resoudre le problème de Riemann, d'ailleurs elle ne nous apprend rien sur le caractère de la dépendance des matrices cherchées des substitutions et de la configuration des points singuliers donnèes. Outre cela, la méthode indiquée ne donne aucun renseignement sur la nature de l'indétermination d'une matrice regulière, satisfaisant aux conditions du problème.

En considérant le problème (B), comme un problème inverse par rapport au problème (A), nous établirons dans le mémoire suivant les expressions analytiques explicites de toutes les matrices régulières cherchées et des subtitutions différentielles correspondants, mettant complétement en évidence le caractère de leur dépendance des substitutions intégrales et de la configuration des points singuliers. Ces expressions donneront ainsi la résolution algorithmique du problème régulier de Riemann ******).

II.

§ 4. Les éléments donnés ainsi que les éléments cherchés des problèmes de Poincaré et de Riemann étant des substitutions linéaires du dégré fixe n, c'est la notion de la rélation fonctionnelle dans le do-

---

*) Gött. Nachr. (1905) S. 307: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" (1912). S. 81.

**) Monatshefte für Math. und Physik; (1908) Bd. 19; S. 211.

***) Proc. of the Amer. Academy of arts and sciences; (1913); t. 49, p. 521.

****) C. R. (1925); t. 181; p. 1046.

*****) Crelles Journ. (1905). Bd. 129, p. 287; Bd. 130, p. 26; Math. Ann. Bd. 63; p. 273; Acta Mathem. t. 31. „Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialceichungen auf funktionentheoretischer Grundlage" (1922). S. 301.

******) Dans le cas, où les substitutions intégrales se trouvent dans un certain voisinage de la substitution identique, les expressions analytiques, donnant la résolution algorithmique du problème de Riemann ont été établis dans notre Note: C. R. (1927) t. 185, p. 528, et dans notre mémoire déjè cité.

Les résultats principaux concernant le cas général ont été enoncés dans notre Note. C. R. (1927), t. 185, p. 1181.

maine des substitutions linéaires, qui fournit le fondement logique de l'analyse des problèmes considerés.

Chaque substitution linéaire

$$X = \| \{X\}_{kl} \|$$

sera traitée comme un système de n^2 „éléments" $\{X\}_{kl} (k, l = 1, 2, \ldots, n)$, qui sont des nombres complexes. La substitution, dont les éléments $| \{X\}_{kl} |$ sont respectivement les modules des éléments de la substitution X, sera désignée par $| X |$. A et B étant des substitutions aux éléments: $\{A\}_{kk} = a$; $\{A\}_{kl} = 0$ $(k \neq l)$; $\{B\}_{kk} = \{B\}_{kl} = b$, nous écrirons pour abréger: $A = a$; $B = \| b \|$ *). Les n^2 rèlations: $| \{X\}_{kl} | < | \{Y\}_{kl} |$ seront considérées comme équivalentes à une seule rélation $| X | < | Y |$. Les définitions usuelles des opérations rationnelles dans le domaine des substitutions linéaires du dégré n sont présentées par les formules:

$$\{X \pm Y\}_{kl} = \{X\}_{kl} \pm \{Y\}_{kl}; \quad \{X \cdot Y\}_{kl} = \sum_{s=1}^{n} \{X\}_{ks} \cdot \{Y\}_{sl};$$

$$\left\{ \frac{1}{X} \right\}_{kl} = \{X^{-1}\}_{kl} = \frac{D_{lk}(X)}{D(X)}; \quad k, l = 1, 2 \ldots n,$$

où, dans le dernier cas, le déterminant $D(X)$ de la substitution X est destinct de zéro et $D_{lk}(X)$ est le complément algébrique de $D(X)$.

Les n^2 séries: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \{X_\nu\}_{kl} = \{X\}_{kl}$ étant convergentes, nous dirons que la série des substitutions: $\sum_{\nu=1}^{\infty} X_\nu = X$ est aussi convergente et a pour somme la substitution X.

Désignons par α_0, $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} (j_1, j_2, \ldots j_\nu = 1, 2 \ldots m; \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ des constantes numériques, par $X_1, X_2 \ldots X_m$ des substitutions aux éléments variables, par $X_1^0, X_2^0, \ldots X_m^0$ des substitutions aux éléments fixes et par $\sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2 \ldots m)}$ des sommes de m^ν termes, qu'on obtient en faisant parcourir indépendamment aux indices $j_1, j_2, \ldots j_\nu$ les valeurs $1, 2, \ldots m$. Les n^2 séries:

$$(3) \quad \{F(X_1, X_2, \ldots X_m)\}_{kl} =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2 \ldots m)} \{(X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\}_{kl} \, \alpha_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}$$

---

*) Pour la substitution identique nous conservons parfois la notation usuelle: I, de sorte que $\{I\}_{kk} = 1$; $\{I\}_{kl} = 0$; $(k \neq l)$.

sont ainsi des séries, ordonnées suivant les puissances des binomes: $\{X_j\}_{kl} - \{X_j^0\}_{kl}$; $(j=1, 2, \ldots m;\ k,\ l=1, 2, \ldots n)$. Si ces séries représentent les n^2 fonctions $\{F(X_1, X_2, \ldots X_m)\}_{kl}$ de mn^2 variables complexes $\{X_j\}_{kl}$, holomorphes dans un voisinage:

$$\sum_{j=1}^{m} | \{X_j\}_{kl} - \{X_j^0\}_{kl} | < \rho$$

du point $\{X_j^0\}_{kl}$ dans l'espace de mn^2 dimensions, nous dirons que la série des compositions:

$$(4) \quad F(X_1, X_2, \ldots X_m) =$$
$$= \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2 \ldots m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0)\, \alpha_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}$$

représente une fonction $F(X_1, X_2, \ldots X_m)$ de m substitutions $X_1, X_2 \ldots X_m$, holomorphe dans le voisinage

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{m} | X_j - X_j^0 | < \| \rho \|$$

du système des substitutions $X_1^0, X_2^0, \ldots X_m^0$. *) Si les fonctions (3) sont entières ou méromorphes par rapport aux variables $\{X_j\}_{kl}$ la fonction (4) sera dite réspectivement entière ou méromorphe. Donc, la notion d'une fonction holomorphe de m substitutions variables du dégré n se réduit à la notion d'un système de n^2 fonctions holomorphes de mn^2 variables numeriques, dont les développements en séries des puissances sont de la forme (3) **).

§ 5. Les coefficients $\alpha_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}$ de la série des compositions (4) sont évidemment des polynomes des coefficients $C_{\mu_{11}^{(1)} \ldots \mu_{nn}^{(1)} \ldots \mu_{11}^{(m)} \ldots \mu_{nn}^{(m)}}$ des developpements des fonctions $\{F(X_1, X_2 \ldots X_m)\}_{kl}$ en séries des puissances des $\{X_j\}_{kl} - \{X_j^0\}_{kl}$. En calculant ces polynomes on établit, que les égalités: $C_{\mu_{11}^{(1)} \ldots \mu_{nn}^{(1)} \ldots \mu_{11}^{(m)} \ldots \mu_{nn}^{(m)}} = 0$ pour toutes les valeurs des indices entraînent les égalités $\alpha_0 = \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = 0$ pour toutes les valeurs des indices. Il en resulte l'unicité de la représentation de la fonction $F(X_1 X_2 \ldots X_m)$, holomorphe dans un domaine (5), par le série des compositions (4).

---

*) Nous prenons le domaine de la convergence sous la forme spéciale (5), ce qui nous suffira pour la suite.

**) La notion d'une fonction analytique des substitutions linéaires peut être définie d'une façon beaucoup plus générale. Cette généralisation est, par exemple, indispensable, si l'on veut traiter l'opération du prolongement analytique. Elle se réduit au changement des coefficients numériques $\alpha_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}$ par des substitutions fixes, à la considération des substitutions iterées et à la généralisation correspondant de l'opération de la composition.

En désignant par $|\alpha^{(\nu)}|$ le plus grand des modules $|\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}|$ $(j_1, j_2 \ldots j_\nu = 1, 2 \ldots m)$ et en remarquant, que la convergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} n^{\nu-1}(\rho-\varepsilon)^\nu \, |\alpha^{(\nu)}|$, où ε est un nombre positif si petit que l'on veut, entraîne la convergence de la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1.2\ldots m)} |X_{j_1} - X_{j_1}^0| \cdot |X_{j_2} - X_{j_2}^0| \ldots |X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0| \cdot |\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}|,$$

pourvu que les substitutions $X_1 \cdot X_2 \ldots X_m$ soient dans le domaine (5), on arrive à la conclusion suivante. Si la fonction $f(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha^{(\nu)} \xi^\nu$ de la variable numérique ξ est holomorphe dans le cercle $|\xi| < \rho n$, la fonction des substitutions (4) est holomorphe dans le domaine (5). Dans le même domaine on a l'évaluation

$$(6) \qquad |F(X_1, X_1 \ldots X_m) - \alpha_0| <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{\infty} (|X_1 - X_1^0| + |X_2 - X_2^0| + \ldots + |X_m - X_m^0|)^\nu \cdot |\alpha^{(\nu)}|.$$

§ 6. Les propositions sur le calcul des séries des compositions sont analogues aux propositions correspondant sur les séries ordinaires des puissances, sauf quelques singularités algorithmiques concernant la détermination des coefficients. ce qui vient de l'incommutativité de l'opération de la composition. Ces propositions peuvent êtree énoncées comme il suit:

Lemme I: Si la substitution.

$$Z - Z^0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1.2\ldots p)} (Y_{j_1} - Y_{j_1}^0)(Y_{j_2} - Y_{j_2}^0) \ldots (Y_{j_\nu} - Y_{j_\nu}^0) \, \beta_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$$

est une fonction des substitutions $Y_1, Y_2, \ldots Y_p$, holomorphe dans un voisinage du système $Y_1^0, Y_2^0, \ldots Y_p^0$, et si les substitutions

$$Y_j - Y_j^0 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \, \alpha_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}^{(j)}; \; j = 1, 2 \ldots p$$

sont à leur tour des fonctions des substitutions $X_1, X_2, \ldots X_m$, holomorphe dans un voisinage du système $X_1^0, X_2^0 \ldots X_m^0$, la substitution $Z - Z^0$ est une fonction

$$Z - Z^0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \, \gamma_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}$$

des substitutions $X_1, X_2, \ldots X_m$, holomorphe dans un voisinage du système $X_1^0, X_2^0, \ldots X_m^0$, les coefficients $\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}$ étant definis par les formules:

$$\gamma_{j_1} = \sum_{h_1=1}^{p} \alpha_{j_1}^{(h_1)} \beta_{h_1}$$

$$\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{h_1 h_2 \ldots h_\mu}^{1, 2 \ldots, p} \sum_{1 \leqq \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} < \nu} \alpha_{j_1 \ldots j_{\varkappa_1}}^{(h_1)} \alpha_{j_{\varkappa_1+1} \ldots j_{\varkappa_2}}^{(h_2)} \ldots$$

$$(7) \qquad \ldots \alpha_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1} \ldots j_\nu}^{(h_\mu)} \beta_{h_1, h_2 \ldots h_\mu},$$

où la dernière somme est étendue sur toutes les valeurs entières positives des indices $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{\mu-1}$, satisfaisant à l'inégalité indiquée.

En particulier, si $Z = Y_1 \cdot Y_2$, on a:

$$\gamma_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \alpha_{j_1 \ldots j_\varkappa}^{(1)} \alpha_{j_{\varkappa+1} \ldots j_\nu}^{(2)}.$$

Si Z est une fonction entière des $Y_1, Y_2, \ldots Y_\rho$, et si ces dernières substitutions sont des fonctions entières des $X_1, X_2, \ldots X_m$, Z est de même entière comme fonction des $X_1, X_2, \ldots X_m$.

Lemme II: Si les m substitutions:

$$Y_j - Y_j^0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} (X_{j_1} - X_{j_1}^0)(X_{j_2} - X_{j_2}^0) \ldots$$

$$(8) \qquad \ldots (X_{j_\nu} - X_{j_\nu}^0) \alpha_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}^{(j)}; \; j = 1, 2, \ldots m$$

sont des fonctions des substitutions $X_1, X_2, \ldots X_m$, holomorphes dans un voisinage du système $X_1^0, X_2^0, \ldots X_m^0$, et si le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_m^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \ldots, \alpha_m^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \ldots, \alpha_m^{(m)}, \end{vmatrix} = \Delta$$

est distinct de zéro, le système d'équations (8) admet un système unique des solutions $X_1, X_2, \ldots X_m$, se réduisant à $X_1^0, X_2^0, \ldots X_m^0$ pour $Y_1 = Y_1^0$, $Y_2 = Y_2^0, \ldots Y_m = Y_m^0$, qui sont presentées par les fonctions:

$$X_j - X_j^0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 j_2 \ldots j_\nu}^{(1, 2, \ldots m)} (Y_{j_1} - Y_{j_1}^0)(Y_{j_2} - Y_{j_2}^0) \ldots$$

$$\ldots (Y_{j_\nu} - Y_{j_\nu}^0) \beta_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}^{(j)}; \; j = 1, 2, \ldots m,$$

holomorphes dans un voisinage des système $Y_1^0, Y_2^0, \ldots Y_m^0$, les coefficients $\beta^{(j)}_{j_1, j_2, \ldots j_\nu}$ étant définis par les rélations de récurrence:

$$\beta^{(j)}_{j_1} = \frac{\Delta_{j_1 j}}{\Delta}$$

$$\beta^{(j)}_{j_1, j_2, \ldots j_\nu} = -\frac{1}{\Delta} \sum_{\mu=2}^{\nu} \sum_{h=1}^{m} \sum_{h_1, h_2, \ldots h_\mu}^{(1, 2, \ldots m)} \sum_{1 \leq \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{\mu-1} \leq \nu} \beta^{(h_1)}_{j_1 \ldots j_{\varkappa_1}} \beta^{(h_2)}_{j_{\varkappa_1+1} \ldots j_{\varkappa_2}} \ldots$$
$$\ldots \beta^{(h_\mu)}_{j_{\varkappa_{\mu-1}+1} \ldots j_\nu} \alpha^{(h)}_{h_1, h_2, \ldots h_\mu} \Delta_{h_j},$$

où Δ_{hj} est le complément algébrique de la h-ième ligne et de la j-ème colonne dans le déterminant Δ. La démonstration de ces deux lemmes est évidente: on forme les séries des compositions satisfaisant formellement aux conditions et on établit la convergence en se servant des propositions analogues de la théorie des fonctions de plusieures variables complexes.

§ 7. Le calcul des séries des puissances d'une seule substitution X est complétement analogue au calcul des séries des puissances d'une variable complexe ξ, cas l'incommutativité de la composition ne peut être patente dans ce cas. *). On démontre ainsi la proposition suivante: soit $G(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m)$ une fonction entiére des variables numériques $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$; si les m fonctions: $\varphi_j(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu^{(j)} \xi^\nu$ $(j = 1, 2 \ldots m)$ de la variable ξ, holomorphes dans un voisinage du point $\xi = 0$, identifient la relation: $G(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots \varphi_m(\xi)) = 0$, les m fonctions: $\varphi_j(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu^{(j)} X^\nu$ de la substitution X identifient la rélation analogue: $G(\varphi_1(X), \varphi_2(X), \ldots, \varphi_m(X)) = 0$. **)

---

*) Ces séries sont au fond un cas particulier des séries des puissances d'une quantité complexe formée avee plusieure unités linéairement independantes, qui ont été étudiées par M. Weyr. [Bulletin des Sc. math. (1887) 2-me série, t. II; p. 205]. Les séries des puissances d'une matrice du deuxième dégrè de la forme $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} X^\nu$ ont été considérées par M. Schlesinger. („Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf functionentheoretischer Grundlage". 1922, p. 154). Cet auteur en fait quelques applications à l'étude d'un système d'équation différentielles linéaires dans un voisinage d'un point singülier.

**) En vertu du § 5 les fonctions $\varphi_j(X)$ sont holomorphes dans un voisinage de la substitution nulle. D'ailleurs, pour que la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu X^\nu$ soit con-

Les fonctions élémentaires: e^X; t^X, $\lg X$, X^t, où t est un nombre, jouent un rôle important dans la suite. Les deux premières fonctions sont définies par les développements entièrs:

$$(10) \qquad e^X = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} X^\nu ; \; t^X = e^{X \lg t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} (X \lg t)^\nu .$$

Le logarithme: $Y = \lg X$ sera traité comme l'ensemble de toutes les substitutions satistaisant á l'èquation $e^Y = X$. Il résulte immédiatement de la proposition indiquée ci-dessus et du § 5, que la branche du logarithme, se réduisant à zéro pour $X = 1$, est une fonction holomorphe

$$(11) \qquad \lg X = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (X-1)^\nu$$

dans le voisinage $| X-1 | < \left\| \frac{1}{n} \right\|$ de la substitution identique. La fonction X^t se trouve définie par la rélation: $X^t = e^{t \lg X}$. La branche de cette fonction, se réduisant à 1 pour $X = 1$ est une fonction holomorphe

$$X^t = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t(t-1) \ldots (t-\nu+1)}{1 \cdot 2 \ldots \nu} (X-1)^\nu$$

dans le voisinage indiqué de la substitution identique.

§ 8. Les éléments et les nombres caractéristiques de la substitution X étant donnée, les éléments des substitutions e^X, t^X, $\lg X$, X^t se calculent à l'aide d'un nombre fini d'opération rationnelles, exponentielles et logarithmiques: Pour le faire voir, considérons une matrice régulière $Y_b(x)$ ne possedant qu'un seul point singulier a à distance finie et se réduisant à la matrice identique pour $x = b$. Soit U et V la substitution différentielle et la substitution intégrale de la matrice $Y_b(x)$. La substitution U étant donnée, la matrice $Y_b(x)$ satisfait au système

$$(12) \qquad \frac{dY}{dx} = \frac{YU}{x-a} .$$

et les développements (10) du § 7 fournissent les représentations:

$$(13) \qquad Y_b(x) = \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^U ; \quad V = e^{2\pi i U} \; ^{*)}$$

---

vergente il faut et il suffit que les nombres caractéristiques de le substitution X soient á l'interieur du cercle de la convergence de la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \xi^\nu$. Cette proposition suit immédiatement d'un théorème de M. Weyr. (op. cit. p. 207)

*) Dans le développement

$$\left(\frac{x-a}{b-a} \right)^U = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \lg^\nu \frac{x-a}{b-a} U^\nu$$

on prend les déterminations des logarithmes, se réduisant à zéro pour $x = b$.

Supposons que le déterminant caractéristique de la substitution U n'admet que les diviseurs élémentaires simples: $\sigma - \sigma_1$, $\sigma - \sigma_2, \ldots,$ $\ldots, \sigma - \sigma_n$ et désignons par $[\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n]$ la substitution, dont tous les élèments sont nuls, sauf les éléments diagonaux, qui sont respectivement $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$. En tenant compte de la représentation canonique:

$$U = S\,[\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n]\, S^{-1},$$

et en resolvant le système (12) on reçoit les représentations canoniques:

$$\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^U = S\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\sigma_1}, \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\sigma_2}, \ldots, \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\sigma_n}\right] S^{-1}$$

$$e^{2\pi i U} = S\left[e^{2\pi i\sigma_1}, e^{2\pi i\sigma_2}, \ldots, e^{2\pi i\sigma_n}\right] S^{-1}.$$

En procédant d'une fason analogue, on dèmontre, que si le dèterminant caractéristique de la substitution U admet les diviseurs élémentaires:

$$(\sigma - \sigma_1)^{\rho_1}, (\sigma - \sigma_2)^{\rho_2}, \ldots, (\sigma - \sigma_s)^{\rho_s};\ \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s = n,$$

les diviseurs élémentaires de la substitution $e^{2\pi i U}$ sont:

$$(\omega - e^{2\pi i\sigma_1})^{\rho_1};\ (\omega - e^{2\pi i\sigma_2})^{\rho_2}, \ldots, (\omega - e^{2\pi i\sigma_s})^{\rho_s}.$$

On reçoit ainsi les représentations analogues des substitutions $\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^U$ et $e^{2\pi i U}$ dans la cas général.

Inversement, si la substitution donnée V admet les diviseurs élèmentaires:

$$(\omega - \omega_1)^{\rho_1};\ (\omega - \omega_2)^{\rho_2}, \ldots, (\omega - \omega_s)^{\rho_s};\ \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s = n,$$

les diviseurs élémentaires de toutes les déterminations de la substitution $\frac{1}{2\pi i} \lg V$ sont de la forme:

$$\left(\sigma - \frac{1}{2\pi i}\lg \omega_1 - r_1\right)^{\rho_1};\ \left(\sigma - \frac{1}{2\pi i}\lg \omega_2 - r_2\right)^{\rho_2};\ \ldots \left(\sigma - \frac{1}{2\pi i}\lg \omega_s - r_s\right)^{\rho_s},$$

où par $\lg \omega_1, \lg \omega_2, \ldots, \lg \omega_s$ sont désignées les valeurs principales des logarithmes et $r_1, r_2, \ldots r_s$ sont des entiers arbitraires. Si les diviseurs élementaires de la substitution V sont simples, de sorte que:

$$V = T\,[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega]\, T^{-1},$$

les représentations canoniques des substitution

$$\frac{1}{2\pi i}\lg V \text{ et } \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V} \text{ sont:}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\lg V = T\left[\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_1 + r_1\,;\,\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_2 + r_2, \ldots;\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_n + r_n\right]T^{-1}$$

$$\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V} = T\left[\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_1 + r_1}, \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_2 + r_2}, \ldots\right.$$

$$\left., \ldots \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_n + r_n}\right]T^{-1}.$$

Dans le cas général on reçoit les représentations analogues.

Ces considérations mettent complètement en évidence le caractère de la multiformité du logarithme d'une substitution et donnent en même temps la résolution des problèmes réguliers de Poincaré et de Riemann dans le cas élémentaire d'un seul point singulier à distance finie. La résolution du problème de Poincaré est présentée par les formules (13) et celle du problème de Riemann — par les formules:

$$(14) \qquad U = \frac{1}{2\pi i}\lg V\,;\; Y_b(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\lg V}.$$

Les expressions (14) représentent évidemment toutes les matrices regulières, admettant la substitution intégrale V en point a et se reduisant á I pour $x = b$ et toutes les substitutions différentielles correspondant, pourvu que l'on prenne toutes les déterminations du logarithme.

III.

§ 9. En abordant la résolution algorithmique du problème de Poincaré, nous introduisons le système des fonctions:

$$(15) \quad L_b(a_{j_1}\, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \,|\, x);\; j_1, j_2, \ldots j_\nu = 1, 2 \ldots m\,;\; \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

définies par les rélations de recurrence:

$$(16) \qquad L_b(a_{j_1}|x) = \int_b^x \frac{dx}{x - a_{j_1}}\,;$$

$$L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}\, a_{j_\nu}|x) = \int_b^x \frac{L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}}|x)}{x - a_{j_\nu}}\, dx\,,$$

où b est un point fixe à distance finie, distinct des points $a_1, a_2, \ldots a_m$. Nous avons nommé ces fonctions „hyperlogarithmes" de la coufigura-

tion $a_1, a_2 \ldots a_m$ *). Chaque hyperlogarithme (15) peut être traité comme une fonction uniforme sur la surface universelle de la superposition: $\mathfrak{S}(a_1, a_2, a_m, \infty)$ aux points de la ramification $a_1, a_2, \ldots, a_m \infty$ du type logarithmique, les feuillets étant réunis le long des coupures (a_1, ∞), $(a_2 \infty) \ldots (a_m \infty)$ [§ 1]. En fixant le point b sur l'un des feuillets et en designant par σ la lougueur d'un chemin (bx) sur la surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2 \ldots a_m, \infty)$, liant les points b et x et par δ — la distance minimale de ce chemin aux points $a_1, a_2, \ldots a_m$, on a les évaluations évidentes:

$$(17) \qquad | L_b(a_{j_1} a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} | x) | < \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu .$$

On déduit aisément des rélations de récurrence (16), qu'à l'intérieur du cercle dont le centre est en point b et dont le rayon est le minimum de la distance de point b aux points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, l'hyperlogarithme (15) est développable suivant les puissances de $x - b$:

$$(18) \quad L_b(a_{j_1} a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} | x) =$$

$$= (-1)^\nu \sum_{s=\nu}^{\infty} (x-b)^s \sum_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\nu = s} \frac{1}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)\ldots(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\nu)} \times$$

$$\times \frac{1}{(a_{j_1}-b)^{\mu_1}(a_{j_2}-b)^{\mu_2}\ldots(a_{j_\nu}-b)^{\mu_\nu}}$$

la dernière somme étant étendue sur toutes les valeurs entiéres positives de indices $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$, satisfaisant à l'égalité indiqué. Le prolongement analytique de la série (18) se fait d'une manière particulièrement simple: soit (bx) un chemin fini arbitraire sur le surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, ne traversant aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$. On marque sur ce chemin quelques points intermédiaires $c_1, c_2, \ldots c_s$, afin que toutes les valeurs: $L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} | c_1)$; $L_{c_1}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} | c_2)$, $\ldots L_{c_s}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} | x)$ se calculent á l'aide de la série (18), et on reçoit:

$$(19) \quad L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} | x) =$$

$$= \sum_{0 \leq \varkappa_1 \leq \ldots \leq \varkappa_s \leq \nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_{\varkappa_1}} | c_1) L_{c_1}(a_{j_{\varkappa_1+1}} \ldots a_{j_{\varkappa_2}} | c_2) \ldots$$

$$\ldots L_{c_s}(a_{j_{\varkappa_s+1}} \ldots a_{j_\nu} | x),$$

*) C. R. t. 185. (1927) p. 439. Les fonctions de cette forme ont été mentionnées par Poincaré (op. cit. p. 312).

où l'on pose, que le facteur $L_{c_\tau}(a_{j_{\varkappa_\tau+1}} \dots a_{j_{\varkappa_{\tau+1}}} \mid c_{s+1})$ est ègal à l'unité, si $\varkappa_\tau + 1 > \varkappa_{\tau+1}$ *). Cette formule vient immédiatement des rélations (16).

Désignons par b_j le point superposé b sur la surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \dots \dots a_m, \infty)$, qu'on obtient en suivant dans le sens positif le chemin (a_j), croisant une seule fois la coupure $(a_j \infty)$ et ne croisant aucune autre coupure. Les valeurs d'hyperlogarithmes en points b_j, représentées par les intégrales:

$$(20)\quad \begin{cases} L_b(a_{j_1} \mid b_j) = P_b^{(j)}(a_{j_1}) = \displaystyle\int_{(a_j)} \frac{dx}{x - a_{j_1}} \\ L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} \mid b_j) = P_b^{(j)}(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu}) = \\ \qquad = \displaystyle\int_{(a_j)} \frac{L_b(a_{j_1} \dots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} dx \end{cases}$$

seront nommées „paramètres de la configuration $a_1, a_2 \dots, a_m$" **). Il suit de la formule (19), que les valeurs d'hyperlogarithmes sur le bord positif et négatif de toute coupure $(a_j \infty)$ sont liées par les rélations:

$$(21)\quad L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_\nu} \mid \overset{-}{x}) = \sum_{\varkappa=0}^{\nu} P_b^{(j)}(a_{j_1}, \dots, a_{j_\varkappa}) L_b(a_{j_{\varkappa+1}}, \dots, a_{j_\nu} \mid \overset{+}{x}).$$

Ces rélations mettent complétement en évidence le caractère de la ramifications de la hyperlogarithmes en points $a_1, a_2, \dots, a_m$.

§ 10. En se servant des fonctions introduites dans le paragraphe précédent, on démontre le théorème fondamental sur la représentation d'une matrice régulière normale ***) par la série des compositions des substitutions différentielles.

Théorème I. La matrice régulière normale en point b et admettant les substitutions différentielles $U_1, U_2, \dots, U_m$ en points $a_1, a_2, \dots, a_m$, est une fonction entière des substitutions différentielles, représentée par le développement:

$$(22)\quad Y_b(x) = \Phi_b\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \dots, U_m \\ a_1, a_2, \dots, a_m \end{matrix} \middle| x\right) =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i_1, i_2, \dots j_\nu}^{(1,2,\dots m)} U_{j_1} U_{j_2} \dots U_{j_\nu} L_b\left(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_\nu} \mid x\right),$$

*) Une convention analogue concerne encore quelques formules suivantes.

**) Les rélations de recurrence, définissant les paramètres de la configuration independamment d'hyperlogarithmes, seront données dans notre mémoire suivant.

***) Nous dirons, q'une matrice régulière est normale en point b, si elle se réduit à la matrice identique en ce point.

dont les coefficients sont les hyperlogarithmes de la configuration $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Ce développement est uniformement convergent par rapport à x et représente la matrice regulière dans chaque domaine fini de la surface $\mathfrak{S}\ (a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour ancun des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Démonstration. En vertu des évaluations (17) et des considérations de la fin du § 5, on conclut, que la série (22) représente une fonction entière des substitutions $U_1, U_2, \ldots, U_m$ et que la convergence est uniforme par rapport à x dans chaque domaine fini de la surface $\mathfrak{S}\ (a_1\ a_2, \ldots, a_m, \infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$. En différentiant cette série membre à membre, conformémant aux rélations (16), on resoit:

$$\frac{dY_b(x)}{dx} =$$

$$= \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} U_j L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu}, a_j \mid x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu} \mid x) \frac{U_j}{x - a_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{Y_b(x) \cdot U_j}{x - a_j}.$$

On voit de là, que la série (22) représente une matrice regulière admettant les substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ en points $a_1, a_2, \ldots a_m$. Cette matrice est évidemment normale en point b.

Notre théorème I n'est au fond autre chose, que la résolution du système d'equations différentielles (1) à l'aide de la méthode des approximations successives. Grâce au calcul des substitutions nous avons réussi quand même de mettre le résultat sous forme définitive d'une série des compositions, cette forme étant très instructive et trés favorable pour les recherches ultérieures, car elle donne la représentation algorithmique des fonctions en question dans tout la domaine de leur existence et met complétement en évidence la nature de leur dépendance de la variable x, des substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ et de la configuration des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Il suit du théorème démontré une évaluation simple d'une matrice regulière normale, admettant les substitutions différentielles données. En vertu des formules (22), (17), (10) et (6) on a l'inégalité:

$$\left| \Phi_b \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x \right) - \mathrm{I} \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} (|U_1| + |U_2| + \cdots + |U_m|)^\nu \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^\nu =$$

$$= e^{\frac{\sigma}{\delta}(|U_1| + |U_2| + \cdots + |U_m|)} - \mathrm{I},$$

d'où il vient:

$$(23)\qquad \left|\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right) - \mathrm{I}\right| \leqq \frac{1}{n}\left\|e^{\frac{\sigma \cdot m \cdot n \cdot \rho}{\delta}} - 1\right\|,$$

si

$$|U_j| \leqq \|\rho\| \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Une matrice régulière arbitraire, admettant les substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ en points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, est évidemment liée avec la matrice normale considerée par la rélation:

$$(24)\quad \Phi\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right) = C \cdot \Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots; a_m\end{matrix}\middle| x\right), \text{ où}$$

$$C = \Phi\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| b\right).$$

Il en résulte, que le théorème I nous donne la représentation de toute matrice regulière, définie par un systéme des substitutions différentielles et par sa valeur initiale en point arbitraire, distinct des points singuliers.

Ce théorème fournit, outre cela, le moyen convenable aux calculs numériques. Pour calculer la valeur $\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right)$, on marque sur le chemin (bx) les points intérmédiaires $c_1, c_2, \ldots, c_s$, afin que les coefficients hyperlogarithmiques des développements des matrices

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| c_1\right),\ \Phi_{c_1}\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| c_2\right) \ldots \Phi_{c_s}\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, U_m\end{matrix}\middle| x\right)$$

se calculent à l'aide des séries de la forme (18), et on pose:

$$\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= \Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| c_1\right) \cdot \Phi_{c_1}\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| c_2\right) \ldots \Phi_{c_s}\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right).$$

La formule (22) devient particulièrement simple si la groupe derivé des substitutions différentielles est commutatif. Un calcul simple montre, qu'on a alors:

$$(25)\qquad \Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right) = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x - a_j}{b - a_j}\right)^{U_j}.$$

Il s'ensuit, que dans ce cas les intégrales du système régulier d'équations différentielles linéaires sont représentables sous forme finie.

§ 11. Il suit de la définition même [§ 1; (2)], que la substitution intégrale en point a_j d'une matrice régulière normale en point b est présentée par la valeur de cette matrice en point superposé b_j de la surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$ [§ 9]. Donc, en posant dans le développement (22) $x = b_j$ et en tenant compte des rélations (20) on arrive au théorème suivant, sur la représentation d'une substitution intégrale par la série des compositions des substitutions différentielles:

Théorème II. La substitution intégrale en point a_j d'une matrice régulière, normale en point b et admettant les substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ en points $a_1, a_2, \ldots, a_m$, est une fonction entière des substitutions différentielles, représentée par le développement:

$$(26) \qquad V_j = \Omega_b^{(j)}\begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2 \ldots, m)} U_{j_1}, U_{j_2}, \ldots, U_{j_\nu} \; P_b^{(j)} \; (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu}),$$

dont les coefficients sont les paramètres de la configuration $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

En vertu de la rélation (24) la substitution intégrale en point a_j d'une matrice régulière arbitraire $\Phi\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x\right)$, définie par un système des substitutions différentielles et par sa valeur initiale en point b: $\Phi\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| b\right) = C$, est représentable sous forme:

$$(26a) \qquad \Omega^{(j)}\begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix} = C \; \Omega_b^{(j)}\begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix} \; C^{-1} .$$

Il suit de la rélation (25), que si le groupe dérivé des substitutions différentielles est commutatif, les substitutions intégrales sont:

$$(27) \qquad \Omega_b^{(j)}\begin{pmatrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{pmatrix} = e^{2\pi i U_j} .$$

§ 12. Pour achever l'exposition de la résolution algorithmique du problème de Poincaré il nous reste à étudier la nature des paramètres de la configuration $P_b^{(j)}(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu})$, traités comme fonctions des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et du point de la normalisation b.

A cet effet nous démontrerons qu'il existe une fonction:

$$\Theta_h\left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| x\right) = Z_h(x)$$

des substitutions $U_1, U_2, \ldots, U_m$, holomorphe par rapport à U_h dans un voisinage de la substitution nulle et entière par rapport à $U_1, \ldots, U_{h-1}, U_{h+1}, \ldots, U_m$, représentant une matrice regulière $Z_h(x)$, qui admet les substitutions différentielles $U_1, U_2, \ldots, U_m$ en points $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et qui est développable dans un voisinage du point $x = a_h$ en série de la forme:

$$Z_h(x) = (x - a_h)^{U_h} \overline{Z}_h(x), \tag{28}$$

où

$$\overline{Z}_h(x) = I + \sum_{s=1}^{\infty} A_h^{(s)} (x - a_h)^s,$$

les matrices $A_h^{(s)}$ étant indépendantes de x. Nous nommerons la matrice $Z_h(x)$ „matrice régulière métacanonique", car, si la substitution S_h réduit la substitution différentielle U_h à la forme canonique: $S_h U_h S_h^{-1}$, la matrice intégrale canonique du système (1) en point a_h s'écrira évidemment sous forme:

$$S_h \cdot Z_h(x).$$

En substituant l'expression (28) dans le système (1), on reçoit:

$$\frac{(x-a_h)^{U_h}}{x-a_h} \cdot U_h \left[I + \sum_{s=1}^{\infty} A_h^{(s)} (x-a_h)^s \right] + (x-a_h)^{U_h} \sum_{s=1}^{\infty} s A_h^{(s)} (x-a_h)^{s-1} =$$

$$= (x-a_h)^{U_h} \left[I + \sum_{s=1}^{\infty} A_h^{(s)} (x-a_h)^s \right] \left[\frac{U_h}{x-a_h} - \sum_{j \neq h} \sum_{s=1}^{\infty} U_j \frac{(x-a_h)^{s-1}}{(a_j - a_h)^s} \right]$$

et les matrices $A_h^{(s)}$ se trouvent définies par les rélatlons de recurrence:

$$U_h A_h^{(s)} + s A_h^{(s)} - A_h^{(s)} U_h = \tag{29}$$

$$= - \sum_{j \neq h} \left[\frac{A_h^{(s-1)}}{a_j - a_h} + \frac{A_h^{(s-2)}}{(a_j - a_h)^2} + \ldots + \frac{A_h^{(1)}}{(a_j - a_h)^{s-1}} + \frac{I}{(a_j - a_h)^s} \right] U_j.$$

Afin de resoudre ces équations par rapport aux matrices $A_h^{(s)}$ nous remarquons, que l'équation de la forme:

$$UA + sA - AU = K \tag{30}$$

peut être traité, comme un système de n^2 équations, linéaires par rapport aux élements $\{A\}_{kl}$ de la matrice A, le déterminant de ce système étant distinct de zéro, pourvu que les différences des nombres caractéristiques distincts de la substitution U ne soient pas entières, ce qui a toujours lieu, quand la substitution U se trouve dans un voisi-

nage convenable de la substitution nulle. A cette dernière condition, l'équation (30) admet la solution unique, représentable par la série:

$$(31) \qquad A = \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{\infty} U^{\alpha}\, K U^{\beta} \frac{(-1)^{\alpha}}{s^{\alpha+\beta+1}} \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!}.$$

En effet, il est aisé de voir, que cete série identifie formellement l'équation considerée. En supposant, d'ailleurs, que

$$|U| < \|u\| < \left\| \frac{1}{2n} \right\|; \quad |K| < \|k\|,$$

on a:

$$(32) \qquad |A| < \sum_{\alpha,\,\beta=0}^{\infty} |U|^{\alpha}\, |K| \cdot |U|^{\beta} \frac{(\alpha+\beta)!}{s\,.\,\alpha!\,\beta!} < \left\| \frac{k}{s\,(1-2\,nu)} \right\|.$$

Donc, si la substitution U se trouve dans le voisinage indiqué de la substitution nulle, le série (31) est absolument convergente et représente la solution unique de l'équation (30).

Introduisons le système des fonctions:

$$\Delta_h^{(s)}\,(a_{j_1},\, a_{j_2}, \ldots,\, a_{j_\nu});\; j_1,\, j_2, \ldots,\, j_\nu = 1,\, 2, \ldots,\, m;\; \nu = 1,\, 2,\, 3, \ldots.$$

définies par les rélations:

$$\Delta_h^{(s)}\,(a_h^{\lambda_0}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \lambda_0 = 0 \\ 0 \text{ pour } \lambda_0 > 0 \end{cases};$$

$$\Delta_h^{(s)}\,(a_h^{\lambda_0}\, a_{h_1}\, a_h^{\lambda_1} \ldots a_{h_\sigma}\, a_h^{\lambda_\sigma}) =$$

$$= \sum_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\sigma=s} \frac{\tau\,(\lambda_0\, \mu_1\, \lambda_1 \ldots,\, \mu_\sigma\, \lambda_\sigma)}{(a_{h_1}-a_h)^{\mu_1}\,(a_{h_2}-a_h)^{\mu_2} \ldots (a_{h_\sigma}-a_h)^{\mu_\sigma}}$$

pour $s \geqq \sigma$, et $\Delta_h^{(s)}\,(a_h^{\lambda_0}\, a_{h_1}\, a_h^{\lambda_1} \ldots a_{h_\sigma}\, a_h^{\lambda_\sigma}) = 0$ pour $s < \sigma$, où les indices $h_1,\, h_2, \ldots,\, h_\sigma$ sont distincts de l'indice h, les indices $\lambda_0,\, \lambda_1, \ldots,\, \lambda_\sigma$ — sont des nombres entiers non négatifs, la ligne:

$$\underbrace{a_h,\, a_h, \ldots,\, a_h}_{\lambda_0 \text{ fois}}\; a_{h_1}\; \underbrace{a_h,\, a_h, \ldots,\, a_h}_{\lambda_1 \text{ fois}}\; a_{h_2} \ldots\ldots$$

est remplacée, pour abréger, par le symbole: $a_h^{\lambda_0}\, a_{h_1}\, a_h^{\lambda_1}\, a_{h_2} \ldots$ — la somme est étendue sur toutes les valeurs entières positives des indices $\mu_1,\, \mu_2, \ldots,\, \mu_\sigma$, satisfaisant à l'égalité indiquée, et les constantes numériques: $\tau\,(\lambda_0,\, \mu_1,\, \lambda_1, \ldots,\, \mu_\sigma,\, \lambda_\sigma)$ sont définies par la rélations de recurrence:

$$(33) \qquad \tau\,(\lambda_0\, \mu_1\, \lambda_1) = \frac{(-1)^{\lambda_0+1}(\lambda_0+\lambda_1)!}{\lambda_0!\,\lambda_1!} \frac{1}{\mu_1^{\lambda_0+\lambda_1+1}},$$

$$\tau\,(\lambda_0\, \mu_1\, \lambda_1 \ldots\, \mu_\sigma\, \lambda_\sigma) =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\lambda_0} \frac{(-1)^{\varkappa+1}(\varkappa+\lambda_\sigma)!}{\varkappa!\,\lambda_\sigma!} \frac{\tau\,(\lambda_0-\varkappa_1\, \mu_1\, \lambda_1, \ldots,\, \mu_{\sigma-1}\, \lambda_{\sigma-1})}{(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\sigma)^{\varkappa+\lambda_\sigma+1}}.$$

En se servant de la formule (31) on tire consécutivement des rélations (29) les expressions des matrices $A_h^{(s)}$ sous forme des séries des compositions:

$$A_h^{(s)} = \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\lambda_0,\ldots,\lambda_\sigma=0}^{\infty} \sum_{h_1,\ldots h_\sigma \neq h} U_h^{\lambda_0} U_{h_1} U_h^{\lambda_1} \ldots U_{h_\sigma} U_h^{\lambda_\sigma} \times$$
$$\times \Delta_h^{(s)} (a_h^{\lambda_0} a_{h_1} a_h^{\lambda_1} \ldots a_{h_\sigma} a_h^{\lambda_\sigma}),$$

où la deuxième somme est étendue sur toutes les valeurs entières non négatives des indices $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$, et la troisième sur toutes les combinaisons des valeurs $1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, m$ des indices $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$. En posant:

$$|U_h| < \|u\| < \left\| \frac{1}{2n} \right\|; \quad |U_j| < \|u'\|; \quad |a_j - a_h| > \delta$$
$$(j = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, m); \quad \frac{n(m-1)u'}{1-2nu} = t$$

et en tenant compte de la formule (32), on déduit les inégalités:

$$\sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\lambda_0,\ldots,\lambda_\sigma=0}^{\infty} \sum_{h_1,\ldots,h_\sigma \neq h} |U_h|^{\lambda_0} \cdot |U_{h_1}| \cdot |U_h|^{\lambda_1} \cdots |U_{h_\sigma}| \cdot |U_h|^{\lambda_\sigma} \times$$
$$\times |\Delta_h^{(s)} (a_h^{\lambda_0} a_{h_1} a_h^{\lambda_1} \cdots a_{h_\sigma} a_h^{\lambda_\sigma})| < \left\| \frac{(t+1)^{s-1} t}{s\delta^s} \right\|.$$

On en conclut, que la série:

$$1 + \sum_{s=1}^{\infty} |x - a_h|^s \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\lambda_0,\ldots\lambda_\sigma=0}^{\infty} \sum_{h_1,\ldots h_\sigma \neq h} |U_h|^{\lambda_0} |U_{h_1}| \cdot |U_h|^{\lambda_1} \cdots |U_{h_\sigma}| \times$$
$$\times |U_h|^{\lambda_\sigma} \cdot |\Delta_h^{(s)} (a_h^{\lambda_0} a_{h_1} a_h^{\lambda_1} \ldots a_{h_\sigma} a_h^{\lambda_\sigma})|$$

et, par suite, les séries:

$$\overline{Z}_k(x) =$$
$$= 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (x - a_h)^s \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\lambda_0,\ldots,\lambda_\sigma=0}^{\infty} \sum_{h_1,\ldots h_\sigma \neq h} U_h^{\lambda_0} U_{h_1} U_h^{\lambda_1} \cdots U_{h_\sigma} U_h^{\lambda_\sigma} \times$$
$$\times \Delta_h^{(s)} (a_h^{\lambda_0} a_{h_1} a_h^{\lambda_1} \cdots a_{h_\sigma} a_h^{\lambda_\sigma}).$$

sont convergentes, pourvu que l'on ait:

$$(34) \qquad |U_h| < \|u\| < \left\| \frac{1}{2n} \right\|; \quad |x - a_h| < \frac{\delta}{1+t}.$$

Ces conditions étant supposées remplies, le changement d'ordre des sommations est permis et on a:

$$(35)\quad \overline{Z}_h(x) = \overline{\Theta}_h \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m, \\ a_1, a_2, \ldots, a_n, \end{matrix} \middle| \, x \right) =$$

$$= \mathrm{I} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu}, \overline{N}_h (a_{j_1} a_{j_2} \ldots, a_{j_\nu} \mid x),$$

où

$$(36)\qquad \overline{N}_h (a_{j_1} a_{j_2}, \ldots a_{j_\nu} \mid x) = \sum_{s=0}^{\infty} (x - a_h)^s \Delta_h^{(s)} (a_{j_1} a_{j_2} \ldots, a_{j_\nu}).$$

En différentiant les séries (36) on établit, que les fonctions $\overline{N}_h (a_{j_1} a_{j_2} \ldots, a_{j_\nu} \mid x)$ satisfont aux relations de récurrence:

$$(37)\qquad \overline{N}_h (a_{j_1} \mid x) = \int_{a_h}^{x} \frac{dx}{x - a_{j_1}}, \; si \; j_1 \neq h; \; \overline{N}_h (a_h \mid x) = 0$$

$$\overline{N}_h (a_{j_1} \ldots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} \mid x) =$$

$$= \int_{a_h}^{x} \frac{\overline{N}_h (a_{j_1}, \ldots, a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} dx, \; si \; j_1 \neq h,$$

et

$$\overline{N}_h (a_h a_{j_2} \ldots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} \mid x) =$$

$$= \int_{a_h}^{x} \left[\frac{\overline{N}_h (a_h a_{j_2} \ldots a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_{j_\nu}} - \frac{\overline{N}_h (a_{j_2} \ldots a_{j_{\nu-1}} a_{j_\nu} \mid x)}{x - a_h} \right] dx,$$

si $j_1 = h$. Les coefficients du développement (35) sont définis par les relations de récurrence (37) dans tout le domaine de leur existence sur la surface $\mathfrak{S}$ $(a_1, a_2, \ldots, a_m \infty)$. Démontrons maintenant, que la matrice $\overline{Z}_h (x)$ est représentable par le développement (36) aussi dans tout le domaine de son existence par rapport à x et que la matrice métacanonique:

$$\Theta_h \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right) = (x - a_h)^{U_h} \overline{\Theta}_h \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, a_2, \ldots, a_m \end{matrix} \middle| \, x \right)$$

peut être traitée comme une fonction des substitutions différentielles, holomorphe par rapport à U_h dans un voisinage de la substitution nulle et entière par rapport à $U_1, \ldots U_{h-1}, U_{h+1}, \ldots U_m$, dans chaque domaine fini de la surface $\mathfrak{S}$ (a_1, a_2, a_m, ∞), ne contenant à l'intérieur

et sur le contour aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$. En effet, si les points b et x se trouvent dans un voisinage convenable du point a_h, en vertu de la formule (24), on a les relations:

$$(x-a_h)^{U_h}\,\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)=$$

$$=(b-a_h)^{U_h}\,\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)\cdot\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)$$

et

$$\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, x\right)=$$

$$(37a)\qquad =\left(\frac{b-a_h}{x-a_h}\right)^{U_h}\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, b\right)\cdot\Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle|\, x\right).$$

Il s'ensuit, que les fonctions $\overline{N}_h(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu}\,|\,x)$ sont des polynomes des fonctions $\overline{N}_h(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu}\,|\,b)$ et $L_b(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_\nu}\,|\,x)$ et que la série (35), où les coefficients sont définis par les formules (37) est uniformement convergente par rapport à x dans chaque domaine fini de la surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour aucun des point $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Outre cela, en vertu de la convergence uniforme de cette série dans un voisinage du point a_h, qui entre dans la série de Taylor pour la matrice $\overline{Z}_h(x)$, la série (35) reste évidemment uniformement convergente dans chaque domaine finie de la surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m\,\infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour aucun des points $a_1, \ldots a_{h-1}, a_{h+1}, \ldots a_m$ et appartenant aux feuillets, qui ont commun le point a_h, mentionné ci-dessus.

En considérant les relations de récurrence (29), comme les systèmes de n^2 équations, linéaires par rapport aux éléments $\{A_h^{(s)}\}_{kl}$ des matrices $A_h^{(s)}$ et en se servant de la formule (37a), on peut démontrer, que la matrice métacanonique $Z_h(x)$ existe encore, si U_h est une substitutions arbitraire, dont toutes les différences des nombres caractéristiques distincts ne sont pas des nombres entiers. Mais dans le cas, où la substitution U_h se trouve hors du voisinage de la substitutions nulle, la matrice $\overline{Z}_h(x)$ n'est pas développable en série des compositions de la forme (35). Pour considérer cette matrice comme une fonction des substitutions différentielles dans tout le domaine de son existence par rapport à ces substitutions, il faut introduire la généralisation de la notion d'une fonction analytique des substitutions, mentionnée dans la remarque au § 4. On peut démontrer ainsi, que la matrice $\overline{Z}_h(x)$ est une

fonction méromorphe par rapport à la substitution U_h, les singularités de cette fonction correspondant aux valeurs de la substitution U_h, dont quelques différences des nombres caractéristiques distincts sont entières. Il en résulte la différence intrinsèque entre les matrices régulières normales et les matrices régulières métacanoniques, traitées comme fonctions des substitutions différentielles: les premières sont entières par rapport à toutes les substitutions différentielles, tandis que les secondes ne sont que méromorphes par rapport à l'une de ces substitutions.

§ 13. La matrice métacanonique inverse est de la forme:

$$Z_h(x)^{-1} = \bar{Z}_h(x)^{-1}(x-a_h)^{-U_h},$$

où

$$\bar{Z}_h(x)^{-1} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \overset{*}{A}{}_h^{(s)}(x-a_h)^s.$$

Cette matrice satisfait évidemment au système:

$$\frac{d\overset{*}{Y}}{dx} = -\sum_{j=1}^{m} \frac{U_j}{x-a_j}\overset{*}{Y},$$

adjoint par rapport au système (1), et les matrices $\overset{*}{A}{}_h^{(s)}$, indépendantes de x, remplient les relations de récurrence:

$$U_h\overset{*}{A}{}_h^{(s)} + s\overset{*}{A}{}_h^{(s)} - \overset{*}{A}{}_h^{(s)}U_h =$$
$$= \sum_{j \neq h} U_j\left[\frac{\overset{*}{A}{}_h^{(s-1)}}{a_j-a_h} + \frac{\overset{*}{A}{}_h^{(s-2)}}{(a_j-a_h)^2} + \ldots + \frac{\overset{*}{A}{}_h^{(1)}}{(a_j-a_h)^{s-1}} + \frac{1}{(a_j-a_h)^s}\right].$$

Introduisons le système des fonctions:

$$\overset{*}{\Delta}{}_h^{(s)}(a_{j_1}\ a_{j_2}\ \ldots\ a_{j_\nu});\ j_1, j_2, \ldots, j_\nu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

définies par les relations:

$$\overset{*}{\Delta}{}_h^{(s)}(a_h^{\lambda_0}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \lambda_0 = 0; \\ 0 \text{ pour } \lambda_0 > 0; \end{cases}$$

$$\overset{*}{\Delta}{}_h^{(s)}(a_h^{\lambda_0}\ a_{h_1}\ a_h^{\lambda_1}\ \ldots\ a_{h_\sigma}a_h^{\lambda_\sigma}) =$$
$$= \sum_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\sigma=s} \frac{\overset{*}{\tau}(\lambda_0\ \mu_1\ \lambda_1\ \ldots,\ \mu_\sigma\lambda_\sigma)}{(a_{h_1}-a_h)^{\mu_1}(a_{h_2}-a_h)^{\mu_2}\ldots(a_{h_\sigma}-a_h)^{\mu_\sigma}},$$

pour $s \geqq \sigma$, et $\overset{*}{\Delta}{}_h^{(s)} (a_h^{\lambda_0} \; a_{h_1}, \; a_h^{\lambda_1} \ldots \; a_{h_\sigma} a_h^{\lambda_\sigma}) = 0$, pour $s < \sigma$, où les constantes numériques $\overset{*}{\tau} (\lambda_0, \mu_1, \lambda_1, \ldots, \mu_\sigma \lambda_\sigma)$ sont définies par les rélations de récurrence:

$$(38) \qquad \overset{*}{\tau} (\lambda_0 \mu_1 \lambda_1) = \frac{(-1)^{\lambda_0} \; (\lambda_0 + \lambda_1)!}{\lambda_0! \; \lambda_1!} \; \frac{1}{\mu_1^{\lambda_0 + \lambda_1 + 1}} \; ;$$

$$\overset{*}{\tau} (\lambda_0 \; \mu_1 \; \lambda_1 \ldots, \mu_\sigma \lambda_\sigma) =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\lambda_\sigma} \frac{(-1)^{\lambda_0} \; (\lambda_0 + \varkappa)!}{\lambda_0! \; \varkappa!} \; \frac{\overset{*}{\tau} \; (\lambda_1 \; \mu_2 \lambda_2 \ldots \mu_\sigma \lambda_\sigma - \varkappa)}{(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\sigma)^{\lambda_0 + \varkappa + 1}} \; .$$

En se servant des mêmes raisonnements que dans le paragraphe précédent, on reçoit le développement:

$$(39) \quad \overline{Z}_h \; (x)^{-1} = \overline{\Theta}_h \left(\begin{matrix} U_1, U_2, \ldots, U_m \\ a_1, \; a_2, \ldots, \; a_m \end{matrix} \middle| \; x \right)^{-1} =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1,2,\ldots,m)} U_{j_1} \; U_{j_2} \ldots \; U_{j_\nu} \; \overline{\overset{*}{N}}_h \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_\nu} \mid x)$$

où

$$(40) \qquad \overline{\overset{*}{N}}_h \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_\nu} \mid x) = \sum_{s=0}^{\infty} (x - a_h)^s \; \overset{*}{\Delta}{}_h^{(s)} \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_\nu}),$$

ce développement étant valable aux conditions (34).

On établit ensuite, que les fonctions $\overline{\overset{*}{N}}_h \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_\nu} \mid x)$ peuvent ètre définies par les relations de récurrence:

$$(41) \qquad \overline{\overset{*}{N}}_h \; (a_{j_1} \mid x) = - \int_{a_h}^{x} \frac{dx}{x - a_{j_1}} \; ; \quad \overline{\overset{*}{N}}_h \; (a_h \mid x) = 0$$

$$\overline{\overset{*}{N}}_h (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x) = - \int_{a_h}^{x} \frac{\overline{\overset{*}{N}}_h \; (a_{j_2} \ldots \; a_{j_\nu} \mid x)}{x - a_{j_1}} \; dx, \text{ si } j_\nu \neq h,$$

et

$$\overline{\overset{*}{N}}_h \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_{\nu-1}} a_h \mid x) =$$

$$= \int_{a_h}^{x} \left[- \frac{\overline{\overset{*}{N}}_h \; (a_{j_2} \ldots \; a_{j_{\nu-1}} \; a_h \mid x)}{x - a_{j_1}} + \frac{\overline{\overset{*}{N}}_h \; (a_{j_1} \; a_{j_2} \ldots \; a_{j_{\nu-1}} \mid x)}{x - a_h} \right] dx,$$

si $j_\nu = h$, et que la série (39) représente ainsi la matrice $\overline{Z}_h \; (x)$ dans tout le domaine de son existence par rapport à x.

Donc, la matrice métacanonique inverse:

$$\Theta_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right)^{-1} = \overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right)^{-1}(x-a_h)^{-U_h}$$

est aussi une fonction holomorphe dans un voisinage de la substitution nulle par rapport à U_h et entière par rapport à $U_1, \ldots, U_{h-1}, U_{h+1}, \ldots U_m$ dans chaque domaine fini de la surface $\mathfrak{S}$ $(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, ne contenant à l'intérieur et sur le contour aucun des points $a_1, a_2, \ldots a_m$. En général, la matrice métacanonique inverse considérée est une fonction méromorphe par rapport à la substitution U_h, possédant les mêmes siugularités que la matrice correspondante directe.

La dependence de la matrice $\overline{\Theta}\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right)^{-1}$ de la variable x est analogue à celle de la matrice $\overline{\Theta}\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right)$.

§ 14. Supposons maintenant, que la substitution U_h se trouve dans un voisinage convenable de la substitution nulle. En vertu de la relation (24) on a alors la représentation:

$$(42)\qquad \Phi_b\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right) =$$

$$= \overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1}\left(\frac{x-a_h}{b-a_h}\right)^{U_h}\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| x\right).$$

En faisant $x = b_h$, on en conclut, que la substitution intégrale V_h en point a_h de la matrice régulière normale (42) peut être mise sous forme:

$$(43)\quad \Omega_b^{(h)}\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\right) =$$

$$= \overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| b\right)^{-1} e^{2\pi i U_h}\,\overline{\Theta}_h\left(\begin{matrix}U_1, U_2, \ldots, U_m\\ a_1, a_2, \ldots, a_m\end{matrix}\middle| b\right) \text{*)}.$$

---

*) Il suit de cette représentation, que les substitution V_h et $e^{2\pi i U_h}$ sont sémblables, pourvu que U_h soit dans un voisinage de la substitution nulle. En tenant compte des considérations de la fin du § 12, on conclut, que ces substitutions restent encore semblables, si U_h est une substitution arbitraire, dont toutes les différences des nombres caractéristiques distincts ne sont pas des nombres entiers.

En substituant dans cette relation les développements (39) et (35) et en comparant le résultat au developpement (26) du théorème II, on reçoit les représentations des paramètres de la configuration:

$$(44)\quad P_b^{(h)}(a_h^{\lambda_0}\, a_{h_1}\, a_h^{\lambda_1} \dots a_{h_\sigma}\, a_h^{\lambda_\sigma}) =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{\alpha_\varkappa+\beta_\varkappa+\gamma_\varkappa=\lambda_\varkappa} \overset{*}{N}_h (a_h^{\lambda_0}\, a_{h_1}\, a_h^{\lambda_1} \dots a_{h_\varkappa} a_h^{\alpha_\varkappa} \mid b) \frac{(2\pi i)^{\beta_\varkappa}}{\beta_\varkappa!} \times$$

$$\times \overline{N}_h (a_h^{\gamma_\varkappa}\, a_{h_{\varkappa+1}}\, a_h^{\lambda_{\varkappa+1}} \dots a_{h_\sigma}\, a_{h_\sigma}^{\lambda} \mid b),$$

la dernière somme étant étendue sur toutes les valeurs entières non négatives des indices $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa, \gamma_\varkappa$, satisfaisant à l'égalité indiquée. En remplaceant dans la formule (44) les fonctions $\overset{*}{N}_h$ et $\overline{N}_h$ par leurs développements (40) et (36), on arrive à la conclusion suivante: chaque paramètre de la configuration $P_b^{(j)}(a_{j_1}\, a_{j_2} \dots a_{j_\nu})$ est une fonction holomorphe de b dans un voisinage du point a_j, représentée par le développement:

$$(45)\qquad P_b^{(j)}(a_{j_1}\, a_{j_2} \dots a_{j_\nu}) = \sum_{s=0}^{\infty} (b-a_j)^s\, p_j^{(s)}(a_{j_1}\, a_{j_2} \dots a_{j_\nu}),$$

les coefficients $p_j^{(s)}(a_{j_1}\, a_{j_2} \dots a_{j_\nu})$ étant des fonctions rationnelles de $a_1, a_2, \dots, a_m$, définies par les relations

$$p_h^{(0)}(a_h^{\lambda_0}) = \frac{(2\pi i)^{\lambda_0}}{\lambda_0!};\ p_h^{(s)}(a_h^{\lambda_0}) = 0 \text{ pour } s > 0;$$

$$p_h^{(s)}(a_h^{\lambda_0}\, a_{h_1}\, a_h^{\lambda_1} \dots a_{h_\sigma}\, a_h^{\lambda_\sigma}) = 0, \text{ pour } s < \sigma, \text{ et}$$

$$(46)\quad p_h^{(s)}(a_h^{\lambda_0}\, a_{h_1}\, a_h^{\lambda_1} \dots a_{h_\sigma}\, a_h^{\lambda_\sigma}) =$$

$$= \sum_{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\sigma=s} \frac{\theta(\lambda_0\, \mu_1\, \lambda_1 \dots \mu_\sigma\, \lambda_\sigma)}{(a_{h_1}-a_h)^{\mu_1}(a_{h_2}-a_h)^{\mu_2} \dots (a_{h_\sigma}-a_h)^{\mu_\sigma}},$$

pour $s \geqq \sigma$, où $\theta(\lambda_0\, \mu_1\, \lambda_1 \dots \mu_\sigma\, \lambda_\sigma)$ sont des constantes numériques:

$$(47)\quad \theta(\lambda_0\, \mu_1\, \lambda_1 \dots \mu_\sigma\, \lambda_\sigma) =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\sigma} \sum_{\alpha_\varkappa+\beta_\varkappa+\gamma_\varkappa=\lambda_\varkappa} \overset{*}{\tau}(\lambda_0\, \mu_1\, \lambda_1 \dots \mu_\varkappa, \alpha_\varkappa) \frac{(2\pi i)^{\beta_\varkappa}}{\beta_\varkappa!}\, \tau(\gamma_\varkappa \mu_{\varkappa+1}\, \lambda_{\varkappa+1} \dots \mu_\sigma\, \lambda_\sigma).\ ^{*)}$$

---

*) On pose: $\overset{*}{\tau}(\lambda_0) = \tau(\lambda_0) = 0$ pour $\lambda_0 > 0$ et $\overset{*}{\tau}(0) = \tau(0) = 1$.

Le système des coupures $(a_1\infty), (a_2\infty), \ldots, (a_m\infty)$ étant fixé, désignons par K_h le cercle, dont le centre est en point a_h et dont le rayon est le minimum de la distance du point a_h aux coupures $(a_1\infty), \ldots, (a_{h-1}\infty)$, $(a_{h+1}\infty), \ldots, (a_m\infty)$. La formule (45) nous fournit évidemment le moyen du calcul numérique des paramètres de la configuration dans le cas, où le point de la normalisation b se trouve à l'intérieur du cercle K_j. Dans, le cas contraire, le calcul se fait à l'aide d'hyperlogarithmes: on fixe un point c à l'intérieurs du cercle K_j et on pose:

$$P_b^{(j)}(a_{j_1} \ldots a_{j_\nu}) = \sum_{0 \leqslant \varkappa \leqslant \lambda \leqslant \nu} L_b(a_{j_1} \ldots a_{j_\varkappa} \mid c)\, P_c^{(j)}(a_{j_{\varkappa+1}} \ldots a_{j_\nu})\, L_c(a_{j_{\lambda+1}} \ldots a_{j_\nu} \mid b),$$

où le chemin (bc), definissant les valeurs d'hiperlogarithmes, appartient entièrement au même feuillet de la surface $\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty)$, où se trouve le point b.

Les résultats, que nous venons à établir, donnent la résolution algorithmique complète du problème de Poincaré soit au point de vue de la théorie des fonctions, soit au point de vue des calculs numériques.

Алгоритмическое решение задач Poincaré и Riemann'a.

(*Статья первая:* **Задача Poincaré о построении группы монодромии данной системы линейных дифференциальных уравнений с регулярными интегралами**).

И. А. Лаппо-Данилевский.

Таблицу аналитических функций $Y(x)$, выполняющую систему дифференциальных уравнений $\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{YU_j}{x-a}$ и претерпевающую подстановки V_j, при обходе независимой переменной точек a_j, автор называет „регулярной матрицей, имеющей дифференциальные подстановки U_j и интегральные подстановки V_j". Основание теории регулярных матриц составляют задачи Poincaré и Riemann'a: первая заключается в построении $Y(x)$ и V_j по данным U_j и a_j, вторая — в построении $Y(x)$ и U_j по данным V_j и a_j. Аналитический аппарат алгоритмического решения указанных задач доставляется теорией аналитических функций от линейных подстановок. Дополняя обычные определения рациональных операций в области линейных подстановок определением предельного перехода, автор вводит понятие „голоморфной функции от подстановок", представляемой рядом композицией, и распространяет на ряды

композиций некоторые положения обыкновенной теории степенных рядов. Обращаясь к решению задачи Poincaré, автор доказывает, что регулярная матрица, заданная независящими от дифференциальных подстановок начальными условиями, и соответствующие интегральные подстановки являются целыми функциями от дифференциальных подстановок, представимыми рядами композиций:

$$Y_b(x) = \mathrm{I} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} U_{j_1} U_{j_2} \ldots U_{j_\nu} L_b (a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$$

$$V_j = \mathrm{I} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_\nu}^{(1, 2, \ldots, m)} U_{j_1} U_j \ldots U_{j_\nu} P_b^{(j)} (a_j a_j \ldots a_{j_\nu}),$$

где $Y_b(b) = \mathrm{I}$, $L_b(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu} \mid x)$ — суть „гиперлогарифмы конфигурации $a_1, a_2, \ldots, a_m$“, определяемые последовательными интегрированиями в пределах от b до x, и $P_b^{(j)}(a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_\nu})$ — „параметры конфигурации“, определяемые контурными интегралами, взятыми по петлям, начинающимся и кончающимся в точке b и заключающим внутри себя соответствующие точки a_j. Далее, автор дает разложения гиперлогарифмов и параметров конфигурации по степеням соответственно $x - b$ и $b - a_j$ и устанавливает простые формулы для построения аналитических продолжений этих разложений. Таким образом, выясняется характер зависимости регулярной матрицы и интегральных подстановок не только от текущей переменной и дифференциальных подстановок, но и от конфигурации особых точек и точки нормализации, и приведенные выше формулы делаются вполне пригодными для вычислений. Кроме „нормальных“ регулярных матриц $Y_b(x)$, автор рассматривает „метаканонические“ регулярные матрицы

$$Z_j(x) = (x - a_j)^{U_j} \overline{Z}_j(x),$$

где $\overline{Z}_j(x)$ голоморфна относительно x в окрестности точки $x = a_j$ и $\overline{Z}_j(a_j) = \mathrm{I}$. Метаканонические регулярные матрицы $Z_j(x)$ оказываются целыми функциями относительно дифференциальных подстановок $U_1, \ldots, U_{j-1}, U_{j+1} \ldots, U_m$ и мероморфными относительно U_j.