



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Снурницын, Аддитивная задача с функцией Рамануджана,  
*Чебышевский сб.*, 2011, том 12, выпуск 4, 112–128

<https://www.mathnet.ru/cheb115>

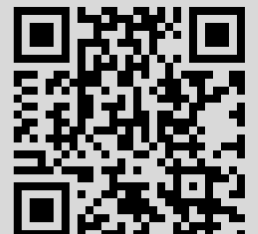
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

15 мая 2025 г., 19:34:01



# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

## Том 12 Выпуск 4 (2011)

---

УДК 511.34

### АДДИТИВНАЯ ЗАДАЧА С ФУНКЦИЕЙ РАМАНУДЖАНА <sup>1</sup>

П. В. Снурницын (г. Москва)

#### Аннотация

В работе рассматривается аддитивная задача с функцией Рамануджана. Доказано что множество значений функции Рамануджана является аддитивным базисом множества целых чисел порядка 7544.

Функция Рамануджана  $\tau$  может быть определена как коэффициент разложения

$$q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n,$$

(см. [1, 2]). В 2008 г. М.З. Гараев, В.С. Гарсиа, С.В. Конягин [3] рассмотрели аддитивную задачу с последовательностью значений функции Рамануджана. В их работе было доказано, что эта последовательность образует конечный аддитивный базис множества целых чисел порядка 74000. Другими словами, для любого целого числа  $N$  диофантово уравнение

$$\sum_{i=1}^{74000} \tau(n_i) = N$$

разрешимо в натуральных числах  $n_1, \dots, n_{74000}$ . При этом выполняется следующее условие

$$\max_{1 \leq i \leq 74000} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}}.$$

В работе [4] М.З. Гараев, В.С. Гарсиа, С.В. Конягин доказали, что для любого целого числа  $N$  уравнение

$$\sum_{i=1}^{148000} \tau(n_i) = N$$

разрешимо в натуральных числах  $n_1, \dots, n_{148000}$ , причем

$$\max_{1 \leq i \leq 148000} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}} e^{-c \frac{\log |N|}{\log \log |N|}},$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант  $\mathcal{N}$  01-00-433а.

где  $c > 0$  — абсолютная постоянная.

В 2011 году в работах автора [5, 6] были получены значения порядка аддитивного базиса последовательности значений функции Рамануджана, равные 8012, 7940 соответственно. В данной работе доказывается, что значение порядка базиса равно 7544.

**ТЕОРЕМА 1.** *Для любого целого числа  $N$  уравнение*

$$\sum_{i=1}^{7544} \tau(n_i) = N$$

*разрешимо в натуральных числах  $n_1, \dots, n_{7544}$ , причем*

$$\max_{1 \leq i \leq 7544} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}}.$$

Пусть  $M$  — достаточно большое четное число. Приведем некоторые результаты работы М.З. Гараева, В.С. Гарсия, С.В. Конягина [3]. Обозначим

$$\mathcal{P} = \{p : p \text{ — простое, } 23 < p \leq M^{\frac{1}{11}}\}.$$

Следующая оценка известна как гипотеза Рамануджана и была доказана Делинем [7]

$$|\tau(n)| \ll n^{\frac{11}{2} + \varepsilon}.$$

Из этой оценки можно заключить, что  $N^6$  чисел вида

$$\sum_{i=1}^6 \tau(n_i), \quad 1 \leq n_1, \dots, n_6 \leq N,$$

являются целыми числами порядка  $O(N^{\frac{11}{2} + \varepsilon})$ . То есть, в среднем, каждое число представимо суммой шести значений многими способами. Имея в виду это замечание, рассмотрим подмножества  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{P}$ , обладающие тем свойством, что уравнение

$$\sum_{i=1}^6 \tau(p'_i) \neq \sum_{i=7}^{12} \tau(p'_i)$$

неразрешимо в числах  $p'_1, \dots, p'_{12} \in \mathcal{P}_0$ ,  $p'_1 < \dots < p'_6$ ,  $p'_7 < \dots < p'_{12}$ ,  $(p'_1, \dots, p'_6) \neq (p'_7, \dots, p'_{12})$ . Такие подмножества  $\mathcal{P}_0$  будем называть допустимыми. В работе [3] доказано, что допустимые подмножества  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$  существуют и  $|\mathcal{P}_0| \geq 12$ . Обозначим через  $\mathcal{P}'$  допустимое подмножество  $\mathcal{P}$  наибольшей мощности. То есть  $\mathcal{P}'$  — это такое подмножество  $\mathcal{P}$ , что  $|\mathcal{P}'| \geq 12$ , и все суммы вида

$$\tau(p'_1) + \dots + \tau(p'_6), \quad p'_1 < \dots < p'_6, \quad p'_1, \dots, p'_6 \in \mathcal{P}',$$

различны.

ЛЕММА 1. Для числа элементов множества  $\mathcal{P}'$  выполняется оценка

$$|\mathcal{P}'| \ll M^{\frac{1}{11} - \frac{1}{132}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3].

ЛЕММА 2. Для любого  $p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$  существуют  $p'_1, \dots, p'_{11} \in \mathcal{P}'$  такие, что

$$p^{11} = \sum_{i=1}^6 \tau(p'_i p) - \sum_{i=7}^{11} \tau(p'_i p) - \tau(p^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3].

ЛЕММА 3. Любое целое число  $r$ ,  $0 \leq r < 370944$  представимо в виде

$$r = \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i),$$

где  $a_i \leq 105$ ,  $1 \leq i \leq 198$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3].

Лемма 2 устанавливает связь между рассматриваемой задачей и задачей о представлении целого числа суммой одиннадцатых степеней простых чисел. Будем использовать формулы и оценки, связанные с проблемами Варинга–Гольдбаха и Варинга. Для удобства обозначим  $\nu = 1/11$ . Пусть  $r$  — целое,  $B > 11(r + 1)$ . Введем следующие обозначения

$$P_0 = M^\nu, \quad P = [P_0], \quad L = \log P = \nu \log M, \quad \vartheta = ML^{-B},$$

Положим

$$S(\alpha) = \sum_{p \in \mathcal{P}} e(\alpha p^{11}).$$

Рассмотрим интервал  $\left[-\frac{1}{\vartheta}; 1 - \frac{1}{\vartheta}\right]$ . Для целых чисел  $a$ ,  $q$  таких, что  $0 \leq a < q$ ,  $(a, q) = 1$ ,  $q \leq L^B$ , положим

$$\mathfrak{M}(a, q) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q\vartheta}; \frac{a}{q} + \frac{1}{q\vartheta}\right].$$

Различные интервалы  $\mathfrak{M}(a, q)$  не пересекаются. Интервал  $\left[-\frac{1}{\vartheta}; 1 - \frac{1}{\vartheta}\right]$  разобьем на два множества

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\substack{q \leq L^B, a < q \\ (a, q) = 1}} \mathfrak{M}(a, q), \quad \mathfrak{m} = \left[-\frac{1}{\vartheta}; 1 - \frac{1}{\vartheta}\right] \setminus \mathfrak{M}.$$

Нам понадобится асимптотическая формула для интеграла

$$J(M, r) = \int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^r e(-\alpha M) d\alpha.$$

Пусть

$$T_{a,q} = \sum_{\substack{0 \leq l < q \\ (l,q)=1}} e_q(al^{11}), \quad A_r(M, q) = \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \left( \frac{T_{a,q}}{\varphi(q)} \right)^r e_q(-aM),$$

$$\mathfrak{S}(M, r) = \sum_{q=1}^{\infty} A_r(M, q).$$

выражение  $\mathfrak{S}(M, r)$  будем называть особым рядом.

ЛЕММА 4. При  $r \geq 23$  имеет место асимптотическая формула

$$J(M) = \mathfrak{S}(M) \frac{\Gamma(\nu + 1)^r}{\Gamma(r\nu)} \frac{M^{r\nu-1}}{(\log M)^r} + O\left(\frac{M^{r\nu-1} \log \log M}{(\log M)^r \log M}\right),$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8].

ЛЕММА 5. Если  $r \geq 23$ ,  $M \equiv r \pmod{2}$ , то существует не зависящая от  $M$  постоянная  $C > 0$  такая, что

$$\mathfrak{S}(M, r) \geq C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8].

ЛЕММА 6. Для любого  $B_0 > 0$  имеет место оценка

$$\max_{\alpha \in \mathfrak{M}} |S(\alpha)| \ll \frac{P_0}{L^{B_0}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9].

Пусть  $U$  — целое число, удовлетворяющее условию

$$|U| \ll P_0.$$

Введем следующие обозначения

$$S_0(\alpha) = \sum_{x \leq P_0} e(\alpha x^{11}),$$

$$S_{a,q} = \sum_{1 \leq x \leq q} e_q(ax^{11}), \quad A'_r(U, q) = \sum_{\substack{a < q \\ (a,q)=1}} \frac{|S_{a,q}|^{2r}}{q^{2r}} e_q(-aU),$$

$$\mathfrak{S}_0(U, r) = \sum_{q=1}^{\infty} A'_r(U, q),$$

выражение  $\mathfrak{S}_0(U, r)$  будем называть особым рядом.

$$\gamma_0(\xi) = \int_0^1 e(\xi x^{11}) dx,$$

$$\Psi_0(M, U, r) = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_0(z)|^{2r} e\left(-\frac{U}{M}z\right) dz,$$

интеграл  $\Psi_0(M, U, r)$  будем называть особым интегралом.

Рассмотрим интервал  $[-P_0^{11-\nu}; 1 - P_0^{11-\nu}]$ . Для целых чисел  $a, q$  таких, что  $0 \leq a < q$ ,  $(a, q) = 1$ ,  $q \leq P_0^\nu$ , положим

$$\mathfrak{M}'(a, q) = \left[ \frac{a}{q} - P_0^{-11+\nu}; \frac{a}{q} + P_0^{-11+\nu} \right].$$

Интервалы  $\mathfrak{M}'(a, q)$  не пересекаются. Введем следующее разбиение промежутка  $[-P_0^{-11+\nu}; 1 - P_0^{-11+\nu}]$

$$\mathfrak{M}' = \bigcup_{\substack{q \leq P_0^\nu, a < q \\ (a, q) = 1}} \mathfrak{M}'(a, q),$$

$$\mathfrak{m}' = [-P_0^{-11+\nu}; 1 - P_0^{-11+\nu}] \setminus \mathfrak{M}'.$$

Нам понадобится асимптотическая формула для интеграла

$$J'(M, U, r) = \int_{\mathfrak{M}'} |S_0(\alpha)|^{2r} e(-\alpha U) d\alpha.$$

ЛЕММА 7. Для любого  $\varepsilon > 0$  и для любого целого  $a$ ,  $(a, q) = 1$  имеем

$$S_{a,q} \ll_{\varepsilon} q^{1-\nu+\varepsilon}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9].

ЛЕММА 8. Для  $A'_r(U, q)$  имеем

$$A'_r(U, q) \ll_{\varepsilon} q^{1-2\nu r+2\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9].

Отсюда также следует, что особый ряд сходится при  $r > 11$ .

ЛЕММА 9. Имеет место оценка

$$\gamma_0(\xi) \ll Z_0(\xi) = \min(1, |\xi|^{-\nu}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9].

Из последней леммы следует сходимость особого интеграла при  $2r > 11$ .

ЛЕММА 10. При  $r > 11$  имеет место равенство

$$J'(M, U, r) = \Psi_0(M, U) \mathfrak{S}_0(U) M^{2r\nu-1} + O(P_0^{2r-11-8\nu}),$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению  $J'(M, U, r)$  и свойству множества  $\mathfrak{M}'$  имеем

$$J'(M, U, r) = \sum_{q \leq P_0^\nu} \sum_{\substack{a < q \\ (a, q) = 1}} \int_{\mathfrak{M}'(a, q)} |S_0(\alpha)|^{2r} e(-\alpha U) d\beta.$$

Рассмотрим интеграл отвечающий интервалу  $\mathfrak{M}'(a, q)$ . Запишем  $\alpha \in \mathfrak{M}'(a, q)$  в виде  $\alpha = \frac{a}{q} + \beta$  и преобразуем  $S_0\left(\frac{a}{q} + \beta\right)$ . Переменная суммирования  $x$  изменяется в пределах  $1 \leq x \leq P_0$ , представим  $x$  в виде  $x = qt + l$ , где  $1 \leq l \leq q$ ,  $\frac{1-l}{q} \leq t \leq \frac{P_0-l}{q}$ . Тогда

$$\begin{aligned} S_0\left(\frac{a}{q} + \beta\right) &= \sum_{x \leq P_0} e\left(\left(\frac{a}{q} + \beta\right) x^{11}\right) = \\ &= \sum_{1 \leq l \leq q} \sum_{\frac{1-l}{q} \leq t \leq \frac{P_0-l}{q}} e\left(\left(\frac{a}{q} + \beta\right) (qt + l)^{11}\right) = \\ &= \sum_{1 \leq l \leq q} e_q(al^{11}) \sum_{\frac{1-l}{q} \leq t \leq \frac{P_0-l}{q}} e(\beta(qt + l)^{11}). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{1-l}{q} \leq t \leq \frac{P_0-l}{q}} e(\beta(qt + l)^{11}) &= \int_{\frac{1-l}{q}}^{\frac{P_0-l}{q}} e(\beta(qt + l)^{11}) dt + O(1) = \\ &= \frac{1}{q} \int_0^{P_0} e(\beta x^{11}) dx + O(1) = \frac{1}{q} \gamma(\beta) + O(1), \end{aligned}$$

где

$$\gamma(\beta) = \int_0^{P_0} e(\beta x^{11}) dx,$$

см., например, [10]. Следовательно,

$$S_0\left(\frac{a}{q} + \beta\right) = \frac{S_{a,q}}{q} \gamma(\beta) + O(P_0^\nu).$$

По лемме 9,

$$\gamma(\beta) \ll Z(\beta) = P_0 \min(1, |P_0^{11} \beta|^{-\nu}).$$

Тогда

$$\frac{S_{a,q}}{q} \gamma(\beta) \ll Z(\beta),$$

и имеем

$$\left| S_0 \left( \frac{a}{q} + \beta \right) \right|^{2r} = \frac{|S_{a,q}|^{2r}}{q^{2r}} |\gamma(\beta)|^{2r} + O(Z(\beta)^{2r-1} P_0^\nu),$$

откуда

$$\begin{aligned} \left| S_0 \left( \frac{a}{q} + \beta \right) \right|^{2r} e \left( - \left( \frac{a}{q} + \beta \right) U \right) &= \\ &= \frac{|S_{a,q}|^{2r}}{q^{2r}} e_q(-aU) |\gamma(\beta)|^{2r} e(-\beta U) + O(Z(\beta)^{2r-1} P_0^\nu). \end{aligned}$$

Так как по лемме 9

$$\int_{-P_0^{\nu-11}}^{P_0^{\nu-11}} Z(\beta)^{2r-1} P_0^\nu d\beta \ll P_0^{2r-1+\nu-11},$$

то для интеграла отвечающего интервалу  $[-P_0^{\nu-11}; P_0^{\nu-11}]$  получим

$$\begin{aligned} \int_{-P_0^{\nu-11}}^{P_0^{\nu-11}} \left| S_0 \left( \frac{a}{q} + \beta \right) \right|^{2r} e \left( - \left( \frac{a}{q} + \beta \right) U \right) d\beta &= \\ &= \frac{|S_{a,q}|^{2r}}{q^{2r}} e_q(-aU) \int_{-P_0^{\nu-11}}^{P_0^{\nu-11}} |\gamma(\beta)|^{2r} e(-\beta U) d\beta + O(P_0^{2r-1+\nu-11}). \end{aligned}$$

Суммируя по всем промежуткам, образующим множество  $\mathfrak{M}'$ , получаем

$$\begin{aligned} J'(M, U, r) &= \sum_{q \leq P_0^\nu} \sum_{\substack{a < q \\ (a,q)=1-P_0^{\nu-11}}}^{P_0^{\nu-11}} \int \left| S_0 \left( \frac{a}{q} + \beta \right) \right|^{2r} e \left( - \left( \frac{a}{q} + \beta \right) U \right) d\beta = \\ &= \sum_{q \leq P_0^\nu} \sum_{\substack{a < q \\ (a,q)=1}} \frac{|S_{a,q}|^{2r}}{q^{2r}} e_q(-aU) \int_{-P_0^{\nu-11}}^{P_0^{\nu-11}} |\gamma(\beta)|^{2r} e(-\beta U) d\beta + O(P_0^{2r-11-8\nu}) = \\ &= \sum_{q \leq P_0^\nu} A'_r(U, q) \int_{-P_0^{\nu-11}}^{P_0^{\nu-11}} |\gamma(\beta)|^{2r} e(-\beta U) d\beta + O(P_0^{2r-11-8\nu}). \end{aligned}$$



Преобразуя первое слагаемое последней суммы, получим

$$J'(M, U, r) = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\beta)|^{2r} e(-\beta U) d\beta \sum_{q=0}^{\infty} A'_r(U, q) + O(P_0^{2r-11-8\nu}).$$

Преобразуем  $\gamma(\beta)$

$$\gamma(\beta) = \int_0^{P_0} e(\beta x^{11}) dx = P_0 \int_0^1 e(\beta P_0^{11} x^{11}) dx = P_0 \gamma_0(\beta P_0^{11}).$$

Тогда для интеграла в асимптотической формуле получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\beta)|^{2r} e(-\beta U) d\beta &= P_0^{2r} \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_0(\beta P_0^{11})|^{2r} e(-\beta U) dz = \\ &= P_0^{2r-11} \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_0(z)|^{2r} e\left(-\frac{U}{P_0^{11}} z\right) dz = M^{2r\nu-1} \Psi_0(M, U). \end{aligned}$$

Окончательно, получаем

$$\begin{aligned} J'(M, U, r) &= \Psi_0(M, U, r) \mathfrak{S}(M, r) M^{2r\nu-1} + O(P_0^{2r-11-8\nu}) = \\ &= \Psi_0(M, U, r) \mathfrak{S}(M, r) M^{2r\nu-1} + O(M^{2r\nu-1-8\nu^2}). \end{aligned}$$

Из лемм 9, 8 следует, что при  $r > 11$  сходятся особый ряд и особый интеграл. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится также оценка тригонометрической суммы  $S_0(\alpha)$  на точках второго класса.

ЛЕММА 11. Для точек второго класса  $\mathfrak{m}'$  имеем

$$\max_{\alpha \in \mathfrak{m}'} |S_0(\alpha)| \ll P_0^{1-\rho},$$

где  $\rho = \frac{1}{7657}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9].

Докажем следующее утверждение о представимости чисел суммой одиннадцати степеней простых чисел.

ЛЕММА 12. Для достаточно большого четного  $M$  уравнение

$$\sum_{i=1}^{204} p_i^{11} = M$$

разрешимо в числах  $p_1, \dots, p_{204} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $s$  — натуральное число. Положим

$$P_0 = M^{\frac{1}{11}}, P_1 = \frac{1}{4}P_0, P_2 = \frac{1}{2}P_1^{1-\frac{1}{11}}, \dots, P_s = \frac{1}{2}P_{s-1}^{1-\frac{1}{11}}.$$

Определим следующие множества

$$\mathcal{U}_i = \{u : u \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}', P_i < u < 2P_i\}, 1 \leq i \leq s.$$

Из асимптотического закона распределения простых чисел (см. [10]) для числа элементов в множестве  $\mathcal{U}_i$  имеем

$$|\mathcal{U}_i| \asymp \pi(2P_i) - \pi(P_i),$$

или

$$|\mathcal{U}_i| \asymp \frac{P_i}{\log P_i}. \quad (1)$$

Пусть  $r$  — натуральное число. Рассмотрим уравнение

$$p_1^{11} + \dots + p_r^{11} + u_1^{11} + \dots + u_s^{11} + u_{s+1}^{11} + \dots + u_{2s}^{11} = M, \quad (2)$$

в числах, удовлетворяющих условиям

$$p_1, \dots, p_r \in \mathcal{P}, \quad u_1, u_{s+1} \in \mathcal{U}_1, \dots, u_s, u_{2s} \in \mathcal{U}_s.$$

Прежде всего, покажем, что уравнение

$$u_1^{11} + \dots + u_s^{11} = u_{s+1}^{11} + \dots + u_{2s}^{11} \quad (3)$$

имеет только решения вида  $u_1 = u_{s+1}, u_2 = u_{s+2}, \dots, u_s = u_{2s}$ . Действительно, пусть  $u_1 \neq u_{s+1}$ . Тогда, с одной стороны,

$$|u_1^{11} - u_{s+1}^{11}| = |u_1 - u_{s+1}| |u_1^{10} + u_1^9 u_{s+1} + \dots + u_{s+1}^{10}| \geq 11|u_1 - u_{s+1}| P_1^{10},$$

с другой стороны,

$$|u_2^{11} + \dots + u_s^{11} - u_{s+2}^{11} - \dots - u_{2s}^{11}| \leq (2P_2)^{11} = P_1^{10},$$

что невозможно. Из этого следует, что число решений уравнения (3) не превосходит

$$|\mathcal{U}_1| |\mathcal{U}_2| \dots |\mathcal{U}_s|.$$

Пусть  $I(M) = I(M; r, s)$  — число решений уравнения (2). Как и выше положим  $\vartheta = M(\log M)^{-B}$ ,  $B > 11(r+1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_0^1 S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha = \\ &= \int_{-\frac{1}{\vartheta}}^{1-\frac{1}{\vartheta}} S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha, \end{aligned}$$

где

$$T_i(\alpha) = \sum_{u \in \mathcal{U}_i} e(\alpha u^{11}), \quad 1 \leq i \leq s.$$

Рассмотрим разбиение интервала интегрирования.

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\substack{q \leq L^B, a < q \\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}(a, q), \quad \mathfrak{m} = \left[ -\frac{1}{\vartheta}; 1 - \frac{1}{\vartheta} \right] \setminus \mathfrak{M}.$$

Соответственно этому разбиению для  $I(M)$  имеем

$$I(M) = I_{\mathfrak{M}}(M) + I_{\mathfrak{m}}(M),$$

где

$$I_{\mathfrak{M}}(M) = \int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha,$$

$$I_{\mathfrak{m}}(M) = \int_{\mathfrak{m}} S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha.$$

Рассмотрим  $I_{\mathfrak{M}}(M)$ . Меняя порядок интегрирования и суммирования в  $T_i(\alpha)$ , получим

$$I_{\mathfrak{M}}(M) = \sum_{u_1, u_{s+1} \in \mathcal{U}_1} \dots \sum_{u_s, u_{2s} \in \mathcal{U}_s} \int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^r e(-\alpha(M - u_1^{11} - \dots - u_{2s}^{11})) d\alpha.$$

Для интеграла

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^r e(-\alpha M_1) d\alpha$$

по леммам 4, 5 при  $r \geq 23$  справедлива асимптотическая формула

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^r e(-\alpha M_1) d\alpha = \mathfrak{S}(M_1) \frac{\Gamma(\frac{1}{11})^r}{\Gamma(\frac{1}{11}r)} \frac{M_1^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M_1)^r} + O\left( \frac{M_1^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M_1)^r} \frac{\log \log M_1}{\log M_1} \right),$$

Следовательно, при достаточно большом  $M$  имеем неравенства

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^r e(-\alpha M_1) d\alpha \leq C \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r}, \quad \int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^r e(-\alpha M_1) d\alpha \geq C \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r}.$$

Откуда получаем следующие неравенства для  $I_{\mathfrak{M}}(M)$

$$I_{\mathfrak{M}}(M) \leq C (|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|)^2 \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r}, \quad I_{\mathfrak{M}}(M) \geq C (|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|)^2 \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r}.$$

В интеграле по точкам второго класса  $I_m(M)$  вынесем максимум модуля суммы  $S(\alpha)$  и распространим интегрирование по всему отрезку

$$\begin{aligned} |I_m(M)| &= \left| \int_m S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha \right| \leq \\ &\leq \max_{\alpha \in m} |S(\alpha)|^{r_0} \int_m |S(\alpha)|^{r-1} |T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha \leq \\ &\leq \max_{\alpha \in m} |S(\alpha)|^{r_0} \int_0^1 |S(\alpha)|^{2r_1} |T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha, \end{aligned}$$

где  $r = r_0 + 2r_1$ ,  $r_0 = 1$ , если  $r$  нечетно,  $r_0 = 2$ , если  $r$  четно. Последний интеграл равен числу решений уравнения

$$p_1^{11} + \dots + p_{r_1}^{11} + u_1^{11} + \dots + u_s^{11} = p_{r_1+1}^{11} + \dots + p_{2r_1}^{11} + u_{s+1}^{11} + \dots + u_{2s}^{11},$$

где  $p_1, p_{r_1+1}, \dots, p_{r_1}, p_{2r_1} \in \mathcal{P}$ ,  $u_1, u_{s+1} \in \mathcal{U}_1, \dots, u_s, u_{2s} \in \mathcal{U}_s$ . В свою очередь, число решений этого уравнения не превосходит числа решений уравнения

$$x_1^{11} + \dots + x_{r_1}^{11} + u_1^{11} + \dots + u_s^{11} = x_{r_1+1}^{11} + \dots + x_{2r_1}^{11} + u_{s+1}^{11} + \dots + u_{2s}^{11},$$

где  $1 \leq x_1, \dots, x_r \leq M^{\frac{1}{11}}$ ,  $u_1, u_{s+1} \in \mathcal{U}_1, \dots, u_s, u_{2s} \in \mathcal{U}_s$ . Поэтому

$$|I_m(M)| \leq \max_{\alpha \in m} |S(\alpha)|^{r_0} \int_0^1 |S_0(\alpha)|^{2r_1} |T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha,$$

где

$$S_0(\alpha) = \sum_{x \leq M^{\frac{1}{11}}} e(\alpha x^{11}).$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} J(M) &= \int_0^1 |S_0(\alpha)|^{2r_1} |T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha = \\ &= \int_{-P^{-11+\nu}}^{1-P^{-11+\nu}} |S_0(\alpha)|^{2r_1} |T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha. \end{aligned}$$

Рассмотрим разбиение отрезка интегрирования

$$\mathfrak{M}' = \bigcup_{\substack{q \leq P^\nu, a < q \\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}'(a, q), \quad \mathfrak{m}' = \left[ -P^{\frac{1}{11}-11}; 1 - P^{\frac{1}{11}-11} \right] \setminus \mathfrak{M}'.$$

Соответственно разбиению, имеем

$$J(M) = J_{\mathfrak{M}'}(M) + J_{\mathfrak{m}'}(M),$$

где

$$J_{\mathfrak{M}'}(M) = \int_{\mathfrak{M}'} |S_0(\alpha)|^{2r_1} |T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha,$$

$$J_{\mathfrak{m}'}(M) = \int_{\mathfrak{m}'} |S_0(\alpha)|^{2r_1} |T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Рассмотрим  $J_{\mathfrak{M}'}(M)$ . Меняя порядок интегрирования и суммирования в  $T_i(\alpha)$ , запишем  $J_{\mathfrak{M}'}(M)$  в виде

$$\sum_{u_1, u_{s+1} \in \mathcal{U}_1} \dots \sum_{u_s, u_{2s} \in \mathcal{U}_s} \int_{\mathfrak{M}'} |S_0(\alpha)|^{2r_1} e(\alpha(u_1^{11} + \dots + u_s^{11} - u_{s+1}^{11} - \dots - u_{2s}^{11})) d\alpha,$$

при этом

$$|u_1^{11} + \dots + u_s^{11} - u_{s+1}^{11} - \dots - u_{2s}^{11}| \leq (2P_1)^{11} = 2^{11} M^{\frac{1}{11}} \ll M^{\frac{1}{11}}.$$

Для интеграла

$$\int_{\mathfrak{M}'} |S_0(\alpha)|^{2r_1} e(-\alpha U) d\alpha,$$

где

$$U = U(u_1, \dots, u_{2s}) = -u_1^{11} - \dots - u_s^{11} + u_{s+1}^{11} + \dots + u_{2s}^{11},$$

по лемме 10 при  $r_1 > 11$  имеем

$$\int_{\mathfrak{M}'} |S_0(\alpha)|^{2r_1} e(-\alpha U) d\alpha = \Psi_0(M, U) M^{\frac{2}{11}r_1-1} + O\left(M^{\frac{2}{11}r_1-1-\frac{8}{121}}\right),$$

откуда

$$J_{\mathfrak{M}'}(M) = M^{\frac{2}{11}r_1-1} \sum_{u_1, u_{s+1} \in \mathcal{U}_1} \dots \sum_{u_s, u_{2s} \in \mathcal{U}_s} \Psi_0(M, U(u_1, \dots, u_{2s})) +$$

$$+ O\left((|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|)^2 M^{\frac{2}{11}r_1-1-\frac{8}{121}}\right).$$

Так как особый интеграл ограничен, то получаем следующее равенство

$$J_{\mathfrak{M}'}(M) = O\left((|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|)^2 M^{\frac{2}{11}r_1-1}\right) + O\left((|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|)^2 M^{\frac{2}{11}r_1-1-\frac{8}{121}}\right),$$

или

$$J_{\mathfrak{M}'}(M) = O\left((|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|)^2 M^{\frac{2}{11}r_1-1}\right).$$

Перейдем к оценке  $J_{\mathfrak{m}'}(M)$ . Вынесем максимум модуля тригонометрической суммы на втором классе за знак интеграла и распространим интегрирование на единичный отрезок, получим

$$|J_{\mathfrak{m}'}(M)| \leq \max_{\alpha \in \mathfrak{m}'} |S_0(\alpha)|^{2r_1} \int_0^1 T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 d\alpha.$$

Интеграл в правой части равен числу решений уравнения (3), то есть не превосходит  $|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|$ . По лемме 11 имеем

$$\max_{\alpha \in \mathfrak{m}'} |S_0(\alpha)| \ll M^{\frac{1}{11}(1-\rho)}, \quad \rho = \frac{1}{7657}.$$

Отсюда получаем оценку

$$|J_{\mathfrak{m}'}(M)| \ll |\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s| M^{\frac{1}{11}(1-\rho)2r_1}.$$

Таким образом, для интеграла  $J(M)$  получаем

$$J(M) = O\left(|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|^2 M^{\frac{2}{11}r_1-1}\right) + O\left(|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s| M^{\frac{2}{11}r_1-\frac{2}{11}\rho r_1}\right).$$

Возвращаясь к оценке  $I_{\mathfrak{m}}(M)$ , имеем

$$I_{\mathfrak{m}}(M) = O\left(\max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)|^{r_0} (|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|)^2 M^{\frac{2}{11}r_1-1}\right) + O\left(\max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)|^{r_0} |\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s| M^{\frac{2}{11}r_1-\frac{2}{11}\rho r_1}\right).$$

По лемме 6 для любого  $B_0$

$$\max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| \ll \frac{M^{\frac{1}{11}}}{(\log M)^{B_0}}.$$

Отсюда

$$I_{\mathfrak{m}}(M) = O\left(|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|^2 \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^{B_0}}\right) + O\left(|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s| \frac{M^{\frac{1}{11}r-\frac{2}{11}\rho r_1}}{(\log M)^{B_0}}\right).$$

Тогда для  $I(M) = I_{\mathfrak{M}}(M) + I_{\mathfrak{m}}(M)$  получаем

$$I(M) \geq C_1 (|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|)^2 \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} - C_2 (|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|)^2 \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^{B_0}} - C_3 |\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s| \frac{M^{\frac{1}{11}r-\frac{2}{11}\rho r_1}}{(\log M)^{B_0}}.$$

Выбирая  $B_0$  достаточно большим так, чтобы  $B_0 > r$ , получаем

$$I(M) \geq C_1 (|\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s|)^2 \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} - C_2 |\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s| \frac{M^{\frac{1}{11}r - \frac{2}{11}\rho r_1}}{(\log M)^r}. \quad (4)$$

Из оценки (1) имеем

$$C_3 \frac{M^{1 - (\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^s} \leq |\mathcal{U}_1| \dots |\mathcal{U}_s| \leq C_4 \frac{M^{1 - (\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^s}.$$

Подставляя эти оценки в (4), будем иметь

$$I(M) \geq C_1 \frac{M^{2 - 2(\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^{2s}} \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} - C_2 \frac{M^{1 - (\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^s} \frac{M^{\frac{1}{11}r - \frac{2}{11}\rho r_1}}{(\log M)^r}. \quad (5)$$

Для того, чтобы выполнялось неравенство  $I(M) > 0$ , достаточно чтобы в (5) первое слагаемое было по порядку больше второго, то есть, чтобы

$$2 - 2\left(\frac{10}{11}\right)^s + \frac{1}{11}r - 1 > 1 - \left(\frac{10}{11}\right)^s + \frac{1}{11}r - \frac{2}{11}\rho r_1,$$

или

$$s > \frac{\log(\frac{2}{11}\rho r_1)}{\log(\frac{10}{11})}.$$

Значения параметров  $r_1, s$ , при которых выполняется последнее неравенство, составляют

$$s \geq 80, \quad r_1 \geq 21$$

или

$$s \geq 80, \\ r \geq \begin{cases} 43, & \text{если } r \equiv 1 \pmod{2}, \\ 44, & \text{если } r \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

При этом выполняется оценка снизу

$$I(M) = I(M, r, s) \geq C \frac{M^{\frac{1}{11}r+1-\eta}}{(\log M)^{r+2s}},$$

где  $\eta = 2\left(\frac{10}{11}\right)^{80}$ . Имеем также оценку сверху

$$I(M) = I(M, r, s) \leq C \frac{M^{\frac{1}{11}r+1-\eta}}{(\log M)^{r+2s}}.$$

Таким образом, полагая  $s = 80$ , при  $r \geq 43$  имеем

$$C_1 \frac{M^{\frac{1}{11}r+1-\eta}}{(\log M)^{r+160}} \leq I(M) \leq C_2 \frac{M^{\frac{1}{11}r+1-\eta}}{(\log M)^{r+160}}, \quad (6)$$

Рассмотрим уравнение (6) при  $r = 44$ . Пусть  $I'(M)$  — число решений этого уравнения, а  $I''(M)$  — число таких решений, что по крайней мере одно  $p_{j_0} \in \mathcal{P}'$ . Для  $I'(M)$  из (6) при  $r = 44$  получаем оценку снизу

$$I'(M) \geq C \frac{M^{\frac{55}{11} - \eta}}{(\log M)^{204}}.$$

А для  $I''(M)$  из (6) при  $r = 43$  и леммы 1 получаем оценку сверху

$$I''(M) \leq C |\mathcal{P}'| \frac{M^{\frac{54}{11} - \eta}}{(\log M)^{203}} \ll \frac{M^{\frac{55}{11} - \eta - \frac{1}{132}}}{(\log M)^{203}}.$$

Таким образом  $I'(M) > I''(M)$ , и уравнение

$$p_1^{11} + \dots + p_{44}^{11} + u_1^{11} + \dots + u_{160}^{11} = M,$$

разрешимо в числах  $p_1, \dots, p_{44}, u_1, \dots, u_{160} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ . Лемма доказана.

Перейдем к доказательству основного результата.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.** Будем следовать схеме доказательства работы [3]. Из лемм 2, 12 получаем, что для достаточно большого четного  $M$

$$M = \sum_{i=1}^{204} p_i^{11} = \sum_{i=1}^{204} \left( \sum_{j=1}^6 \tau(p'_{ij} p_i) - \sum_{j=7}^{11} \tau(p'_{ij} p_i) - \tau(p_i^2) \right),$$

где  $p_i \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ ,  $1 \leq i \leq 204$ ,  $p'_{ij} \in \mathcal{P}'$ ,  $1 \leq i \leq 204$ ,  $1 \leq j \leq 11$ , или

$$M = \sum_{i=1}^{1224} \tau(n_i) - \sum_{j=1}^{1224} \tau(m_j), \quad (7)$$

причем из условий на  $p_i, p'_{ij}$  имеем  $n_i, m_j \leq M^{\frac{2}{11}}$ ,  $(n_i m_j, 23!) = 1$ . Здесь  $1224 = 204 \times 6$ .

Умножая уравнение (7) на  $-1$ , получим аналогичное представление для  $-M$ . Заменяя  $M$  на  $M - \tau(1)$  или  $M - \tau(29)$ , получим что любое целое число  $M$  с достаточно большим  $|M|$  может быть представлено в виде

$$M = \sum_{i=1}^{1224} \tau(n_i) - \sum_{i=1}^{1225} \tau(m_i), \quad (8)$$

где  $n_i, m_j \leq |M|^{\frac{2}{11}} + 1$ ,  $(n_i m_j, 23!) = 1$ . Известно, что

$$-\tau(12) = 370944 = \tau(27) + \tau(55) + \tau(69) + \tau(90) + \tau(105)$$

[3]. Умножим (8) на  $-\tau(12)$ , из мультипликативности и условий на  $n_i, m_j$  получим

$$370944M = \sum_{i=1}^{7345} \tau(n_i), \quad (9)$$



где  $n_i \leq 106|M|^{\frac{2}{11}} + 1$ . Здесь  $7345 = 1224 \times 5 + 1225$ .

Пусть  $K$  — произвольное целое число с достаточно большим модулем. По лемме 3 найдутся числа  $a_1, \dots, a_{198} \leq 105$  такие, что

$$K \equiv \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i) \pmod{370944}.$$

Следовательно, из (9) имеем

$$K = \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i) + 370944M = \sum_{i=1}^{7543} \tau(n_i),$$

где число 7543 получается как  $198 + 7345$ , причем

$$\max_{1 \leq i \leq 7543} n_i \ll |K|^{\frac{2}{11}}.$$

Таким образом, существует целое положительное число  $K_0$  такое, что для любого целого  $K$ ,  $|K| \geq K_0$  уравнение

$$K = \sum_{i=1}^{7543} \tau(n_i)$$

имеет решение.

Пусть  $N$  — произвольное целое число. Если  $|N| > K_0$ , то  $|N - \tau(1)| \geq K_0$  и число  $N - \tau(1)$  представимо суммой 7543 значений  $\tau(n)$  при  $n \ll |N|^{\frac{2}{11}}$ . В этом случае теорема доказана.

Пусть  $|N| \leq K_0$ . Существует  $n_0$  такое, что  $|\tau(n_0)| > 2K_0$ . Тогда  $|N - \tau(n_0)| > K_0$ , и  $K - \tau(n_0)$  представимо суммой 7543 значений  $\tau(n)$  при  $n \ll 1$ . Теорема доказана.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ramanujan S. On certain arithmetical functions // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1916. V. 22. no. 9. P. 159–184.
- [2] Iwaniec H. Topics in classical automorphic forms. Grad. Stud. Math., Amer. Math. Soc. Providence, RI. 1997.
- [3] Гараев М.З., Гарсия В.С., Конягин С.В. Проблема Варинга с  $\tau$ -функцией Рамануджана // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72. вып.1. С. 39–50.
- [4] Garaev M.Z., Garcia V.C., Konyagin S.V. The Waring problem with the Ramanujan  $\tau$ -function. II // Canad. Math. Bull. 2009. V. 52. no. 2. P. 195–199.

- [5] Снурницын П.В. О базисных свойствах  $\tau$ -функции Рамануджана // Матем. заметки. 2011. Т. 90. вып. 5. С. 736–743.
- [6] Снурницын П.В. О представимости целых чисел значениями функции Рамануджана // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2011. Т. 6. С. 49–52.
- [7] Deligne P. La conjecture de Weil. I // Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. 1974. V. 43. P. 273–307.
- [8] Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1947. Т. 22. Изд-во АН СССР. М.–Л. С. 3–179.
- [9] Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980.
- [10] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.

Московский педагогический государственный университет  
Поступило 23.12.2011