О. В. Камозина, Алгебраические решетки кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга,
Дискрет. матем., 2006, том 18, выпуск 2, 139–145

Дискретная математика

том 18 выпуск 2 * 2006

УДК 512.542

Алгебраические решетки кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга

© 2006 г. О. В. Камозина

В статье изучаются решетка всех классов Фиттинга, решетка всех n-кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга с направлением φ, $\psi_0 \leqslant \varphi$, и решетка всех тотально канонических классов Фиттинга. Показано, что данные решетки являются алгебраическими с однопорожденными компактными элементами.

Методы общей теории решеток широко используются в теории групп. Большое количество работ посвящено изучению тех или иных свойств решеток формаций и классов Фиттинга различных типов. Одним из таких свойств является алгебраичность решетки. В работах [1–3] показано, что решетка всех формаций, решетка всех n-кратно локальных формаций, решетка всех разрешимых тотально локальных формаций и решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга являются алгебраическими, причем здесь компактные элементы — это соответствующие однопорожденные классы. Напомним, что полная решетка называется алгебраической, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов. Элемент c полной решетки L называется компактным, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из неравенства $c \leqslant \sup_L X$ вытекает существование такого конечного подмножества $X_0 \subseteq X$, что $c \leqslant \sup X_0$.

В данной работе установлена алгебраичность решетки всех классов Фиттинга, решетки всех n-кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга с направлением φ, $\psi_0 \leqslant \varphi$, и решетки всех тотально канонических классов Фиттинга.

Рассматриваются только конечные группы. Необходимые определения и обозначения можно найти в [1, 4–6]. В частности, Ω — непустой подкласс класса всех конечных простых групп $\mathfrak{I}$, $\Omega' = \mathfrak{I} \setminus \Omega$. Все функции принимают одинаковые значения на изоморфных группах из их области определения. Функция

$$f\colon \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга групп}\}$$

называется ΩR-функцией, функция

$$\varphi\colon \mathfrak{I} \to \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$$

называется FR-функцией. Класс Фиттинга

$$\mathfrak{F} = \Omega R(f,\varphi) = (G\colon O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G^{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G))$$

называется Ω-расслоенным с Ω-спутником f и направлением φ. При рассмотрении различных направлений получаются различные классы Фиттинга. В частности, класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R(f,\varphi)$ называется Ω-свободным и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega FrR(f)$, если

$\varphi(A) = \psi_0(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой $A \in \mathfrak{I}$, Ω-каноническим и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega KR(f)$, если $\varphi(A) = \psi_2'(A) = \mathfrak{G}_A\mathfrak{G}_{A'}$ для любой $A \in \mathfrak{I}$, Ω-биканоническим и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega BR(f)$, если $\varphi(A) = \psi_2(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой неабелевой $A \in \mathfrak{I}$ и $\varphi(A) = \psi_2(A) = \mathfrak{G}_A\mathfrak{G}_{A'}$ для любой абелевой $A \in \mathfrak{I}$.

При $n \geqslant 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно Ω-расслоенным с направлением φ, если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один Ω-спутник, все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно Ω-расслоенными классами Фиттинга с тем же направлением φ, 0-кратно Ω-расслоенным с направлением φ считается всякий класс Фиттинга, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется тотально Ω-расслоенным с направлением φ, если он n-кратно Ω-расслоенный с направлением φ для всех натуральных n.

Перейдем к изложению полученных результатов.

Через ΩR_φ^n (ΩR_φ^∞) обозначим множество всех n-кратно (тотально) Ω-расслоенных классов Фиттинга с направлением φ.

Лемма 1. ΩR_φ^n *— полная решетка классов Фиттинга.*

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n = 0$ утверждение леммы непосредственно следует из определения класса Фиттинга.

Пусть $n = 1$. По лемме 12 из [4] пересечение любой совокупности ΩR-классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, является ΩR-классом Фиттинга, причем если $\mathfrak{F}_i = \Omega R(f_i, \varphi)$, $i \in I$, то $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \Omega R(f, \varphi)$, где $f = \bigcap_{i\in I} f_i$. Для $n > 1$ предположим, что пересечение любой совокупности ΩR_φ^{n-1}-классов Фиттинга есть ΩR_φ^{n-1}-класс Фиттинга и $\mathfrak{F}_i = \Omega R(f_i, \varphi) \in \Omega R_\varphi^n$, $i \in I$, причем $f_i(A) \in \Omega R_\varphi^{n-1}$ для любой $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$. Тогда по предположению индукции $f(A) = \bigcap_{i\in I} f_i(A) \in \Omega R_\varphi^{n-1}$ и по определению $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi) \in \Omega R_\varphi^n$. Таким образом, пересечение любой совокупности ΩR_φ^n-классов Фиттинга есть ΩR_φ^n-класс Фиттинга для любого натурального n.

По лемме 10 из [4] $\varnothing = \Omega R(h, \varphi)$, где $h(A) = \varnothing$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ и φ — произвольное направление. Тогда по индукции, учитывая строение спутника h, нетрудно показать, что $\varnothing \in \Omega R_\varphi^n$.

Для любого $\Omega \subseteq \mathfrak{G}$ справедливо равенство $\mathfrak{G} = \Omega R(m, \varphi)$, где $m(A) = \mathfrak{G}$ для всех $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, φ — произвольное направление. Действительно, для любой группы $G \in \mathfrak{G}$ имеем $G^{\varphi(A)} \lhd G \in \mathfrak{G} = m(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G)$, $O^\Omega(G) \lhd G \in \mathfrak{G} = m(\Omega')$. Следовательно, $G \in \Omega R(m, \varphi)$ и $\mathfrak{G} \subseteq \Omega R(m, \varphi)$. Обратно, так как рассматриваются только классы Фиттинга конечных групп, справедливо включение $\Omega R(m, \varphi) \subseteq \mathfrak{G}$. Таким образом, $\mathfrak{G} = \Omega R(m, \varphi)$. Опять по индукции, учитывая строение спутника m, нетрудно показать, что $\mathfrak{G} \in \Omega R_\varphi^n$. Следовательно, ΩR_φ^n — полная решетка классов Фиттинга для любого $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Лемма доказана.

Следствие 1. ΩR_φ^∞ *— полная решетка классов Фиттинга.*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Тогда* $\operatorname{fit}\mathfrak{X}$ *состоит из групп, получаемых в результате применения конечного числа операций S_n и R к группам из $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{F} = \{G \in k_1 \dots k_m\mathfrak{X} \mid k_i \in \{S_n, R\},\ i = 1, \dots, m,\ m \in \mathbf{N}\}.$$

Покажем, что $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга. Пусть $N \lhd H \in \mathfrak{F}$. Тогда $N \lhd H \in k_1 \dots k_t\mathfrak{X}$ и, значит, $N \in S_n(H) \subseteq S_n k_1 \dots k_t\mathfrak{X}$. Следовательно, $N \in S_n k_1 \dots k_t\mathfrak{X}$ и $N \in \mathfrak{F}$. Допустим, что $B = N_1N_2$, где $N_i \in \mathfrak{F}$, $N_i \lhd B$, $i = 1, 2$. Тогда $N_1 \in k_{i_1} \dots k_{i_r}\mathfrak{X}$,

$N_2 \in k_{j_1} \dots k_{j_s}\mathfrak{X}$. Ввиду того, что S_n и R являются расширяющимися и монотонными, получаем включения $\mathfrak{X} \subseteq k_{j_1} \dots k_{j_s}\mathfrak{X}$, $k_{i_1} \dots k_{i_r}\mathfrak{X} \subseteq k_{i_1} \dots k_{i_r} k_{j_1} \dots k_{j_s}\mathfrak{X}$, $k_{j_1} \dots k_{j_s}\mathfrak{X} \subseteq k_{i_1} \dots k_{i_r} k_{j_1} \dots k_{j_s}\mathfrak{X}$. Таким образом, $N_i \in k_{i_1} \dots k_{i_r} k_{j_1} \dots k_{j_s}\mathfrak{X}$, $i = 1, 2$, а значит, $B = N_1 N_2 \in R k_{i_1} \dots k_{i_r} k_{j_1} \dots k_{j_s}\mathfrak{X}$ и $B \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, значит, и $\operatorname{fit}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. По определению класс Фиттинга k_i-замкнут, поэтому $k_i \operatorname{fit}\mathfrak{X} = \operatorname{fit}\mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \operatorname{fit}\mathfrak{X}$ и k_i монотонна, справедливы соотношения $k_m\mathfrak{X} \subseteq k_m \operatorname{fit}\mathfrak{X} = \operatorname{fit}\mathfrak{X}$. Продолжая этот процесс, получим, что $k_1 \dots k_m\mathfrak{X} \subseteq k_1 \operatorname{fit}\mathfrak{X} = \operatorname{fit}\mathfrak{X}$ для любого $m \in \mathbf{N}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \operatorname{fit}\mathfrak{X}$, и значит, $\operatorname{fit}\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Решетка всех классов Фиттинга является алгебраической.*

Доказательство. Любой класс Фиттинга является решеточным объединением всех своих однопорожденных подклассов Фиттинга. Покажем, что каждый однопорожденный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \operatorname{fit} G$ является компактным элементом в решетке всех классов Фиттинга.

Пусть

$$\mathfrak{F} = \operatorname{fit} G \subseteq \mathfrak{M} = \vee(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \operatorname{fit}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right).$$

Тогда $G \in \operatorname{fit}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right)$. По лемме 2 $G \in k_1 \dots k_m \left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right)$, где $k_i \in \{S_n, R\}$, $i = 1, \dots, m$. Индукцией по m покажем, что существует конечное множество $J \subset I$ такое, что $G \in k_1 \dots k_m \left(\bigcup_{j\in J} \mathfrak{F}_j\right)$.

Пусть $m = 1$. Если $G \in S_n \left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right)$, то найдется $T \in \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ такая, что $G \triangleleft T$. Так как $T \in \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, существует хотя бы один $\mathfrak{F}_j$, $j \in I$, такой, что $T \in \mathfrak{F}_j$, и значит, $G \in S_n(\mathfrak{F}_j)$. Если $G \in R\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right)$, то $G = T_1 \dots T_t$, причем t — конечное число, $T_r \triangleleft G$, $T_r \in \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, $r = 1, \dots, t$. Следовательно, найдутся $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_t$ такие, что $T_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, T_t \in \mathfrak{F}_t$. Значит, $T_r \in \mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_t$ и $G \in R(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_t)$.

Пусть утверждение верно для $m > 1$. Докажем справедливость утверждения для $m + 1$. Тогда $G \in k_1 k_2 \dots k_{m+1} \left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right) = k_1(\mathfrak{H})$, где $\mathfrak{H} = k_2 \dots k_{m+1} \left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\right)$. Если $G \in S_n(\mathfrak{H})$, то $G \triangleleft T \in \mathfrak{H}$. Тогда по индукции существуют $1, \dots, p \in I$ такие, что $T \in k_2 \dots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$. Следовательно, $G \in S_n k_2 \dots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$. Если $G \in R(\mathfrak{H})$, то $G = T_1 \dots T_t$, t — конечное число, $T_r \triangleleft G$, $T_r \in \mathfrak{H}$, $r = 1, \dots, t$. По индукции существуют $r_1, \dots, r_k \in I$ такие, что $T_r \in k_2 \dots, k_{m+1}(\mathfrak{F}_{r_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{r_k})$. Объединяя найденные классы Фиттинга для каждого T_r, образуем класс $k_2 \dots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$, причем очевидно, что $k_2 \dots k_{m+1}(\mathfrak{F}_{r_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{r_k}) \subseteq k_2 \dots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$ для всех групп T_r. Таким образом, $T_r \in k_2 \dots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$, $r = 1, \dots, t$, и $G \in R k_2 \dots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$. Утверждение индукции доказано.

Поскольку $G \in k_1 \dots k_m \left(\bigcup_{j\in J} \mathfrak{F}_j\right) \in \operatorname{fit}\left(\bigcup_{j\in J} \mathfrak{F}_j\right)$, J — конечное множество из I, справедливо включение $\operatorname{fit} G \subseteq \operatorname{fit}\left(\bigcup_{j\in J} \mathfrak{F}_j\right)$, и значит, $\mathfrak{F}$ — компактный элемент решетки всех классов Фиттинга. Теорема доказана.

Пусть θ — полная решетка классов Фиттинга и $\mathfrak{X}$ — произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех θ-классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначим через $\theta \operatorname{fit}\mathfrak{X}$. Мы будем называть Ω-радикальную функцию θ-значной, или, коротко, $\Omega R\theta$-функцией, если все ее значения принадлежат θ. Через $\Omega R_\varphi \theta$ обозначим множество всех Ω-расслоенных классов Фиттинга с направлением φ, обладающих хотя бы одним $\Omega\theta$-спутником. Пересечение всех $\Omega R_\varphi \theta$-классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначим через $\Omega R\theta(\mathfrak{X}, \varphi)$.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, θ — полная решетка классов Фиттинга. Тогда Ω-расслоенный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \Omega R\theta(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ, где $\psi_0 \leqslant \varphi$, обладает единственным минимальным $\Omega\theta$-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \theta\,\mathrm{fit}(O^{\Omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}),$$
$$f(A) = \theta\,\mathrm{fit}(G^{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}), \qquad A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X}),$$
$$f(A) = \varnothing, \qquad A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, φ — такая FR-функция, что $\psi_0 \leqslant \varphi$. Так как $\mathfrak{G}$ — Ω-расслоенный класс Фиттинга с направлением φ, причем все значения его Ω-спутника равны $\mathfrak{G} \in \theta$, справедливо включение $\mathfrak{G} \in \Omega R_{\varphi}\theta$. Кроме того, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{G}$, и значит, $\mathfrak{F} = \Omega R\theta(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует и множество L всех $\Omega\theta$-спутников $\mathfrak{F}$ непусто. Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L. Тогда по лемме 12 из [4] $\mathfrak{F} = \Omega R(f_1, \varphi)$. Так как $f_1(A) = \bigcap_{i \in I} f_i(A) \in \theta$, справедливо включение $f_1 \in L$. Так как $f_1 \leqslant f_i$ для любого $f_i \in L$, то f_1 — единственный минимальный $\Omega\theta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Пусть f — ΩR-функция, описанная в заключении леммы. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$. Тогда $O^{\Omega}(M) \in f(\Omega')$ и из $K(M) \subseteq K(\mathfrak{X})$ следует, что $M^{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(M)$. Значит, $M \in \Omega R(f, \varphi)$ и $\mathfrak{X} \subseteq \Omega R(f, \varphi)$. По построению f — $\Omega\theta$-спутник, поэтому $\mathfrak{F} = \Omega R\theta(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \Omega R(f, \varphi)$.

Аналогично теореме 10 из [4], учитывая, что f_1 — $\Omega\theta$-спутник, получаем, что

$$f(\Omega') = \theta\,\mathrm{fit}(O^{\Omega}(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\Omega'),$$
$$f(A) = \theta\,\mathrm{fit}(G^{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(A), \qquad A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X}),$$
$$f(A) = \varnothing \subseteq f_1(A), \qquad A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X}).$$

Следовательно, $f \leqslant f_1$ и $\Omega R(f, \varphi) \subseteq \Omega R(f_1, \varphi)$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{F} = \Omega R(f, \varphi)$, и значит, $f \in L$. Поскольку f_1 — единственный минимальный $\Omega\theta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, из $f \leqslant f_1$ следует, что $f = f_1$. Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F} = K^{\infty}R(\mathfrak{X})$ и f — минимальный K^{∞}-значный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $f(A) = K^{\infty}R(O^{A,A'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in K(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$ для всех $A \in \mathfrak{I} \setminus K(\mathfrak{X})$.*

Для произвольной совокупности θ-классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ положим

$$\vee^{\theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \theta\,\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — система $\Omega R\theta$-функций. Тогда через $\vee^{\theta}(f_i \mid i \in I)$ обозначим такую $\Omega R\theta$-функцию, что $\vee^{\theta}(f_i \mid i \in I)(A) = \vee^{\theta}(f_i(A) \mid i \in I)$ для любой $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$.

Лемма 4. *Пусть θ — полная решетка и f_i — минимальный $\Omega\theta$-спутник Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ, где $\psi_0 \leqslant \varphi$, $i \in I$. Тогда $\vee^{\theta}(f_i \mid i \in I)$ — минимальный $\Omega\theta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \vee^{\Omega R_{\varphi}\theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Доказательство. Пусть $f = \vee^{\theta}(f_i \mid i \in I)$ и m — минимальный $\Omega\theta$-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \vee^{\Omega R_{\varphi}\theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. Покажем, что $f = m$.

Пусть $A \in \{\Omega'\}$. Тогда, применяя лемму 3, получим, что

$$m(\Omega') = \theta\,\mathrm{fit}\left(O^{\Omega}(G) \mid G \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right) = \theta\,\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I}\theta\,\mathrm{fit}(O^{\Omega}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)\right)$$

$$= \theta\,\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I} f_i(\Omega')\right) = \vee^{\theta}(f_i(\Omega') \mid i \in I) = f(\Omega').$$

Пусть $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F})$. Тогда $m(A) = \varnothing$. Так как $\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, то $A \notin K\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right)$, и значит, $A \notin K(\mathfrak{F}_i)$ и $f_i(A) = \varnothing$ для любого $i \in I$, так что $f(A) = \vee^{\theta}(f_i(A) \mid i \in I) = \varnothing$.

Если $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \setminus K\left(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right)$, то, как и выше, $f(A) = m(A) = \varnothing$.

Пусть $A \in \Omega \cap K(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. Тогда существует $j \in I$ такое, что $A \in K(\mathfrak{F}_j)$, и значит, $f_j(A) \neq \varnothing$. Тогда, применяя лемму 3, получим, что

$$m(A) = \theta\,\mathrm{fit}\left(G^{\varphi(A)} \mid G \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right) = \theta\,\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I}\theta\,\mathrm{fit}(G^{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{F}_i)\right)$$

$$= \theta\,\mathrm{fit}\left(\bigcup_{i\in I} f_i(A)\right) = \vee^{\theta}(f_i(A) \mid i \in I) = f(A).$$

Таким образом, $f(A) = m(A)$ для любой $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, и значит, $f = m$.

Лемма доказана.

В дальнейшем, если $\theta = \Omega R^n_{\varphi}$ $(\Omega R^{\infty}_{\varphi})$, то вместо символов $\vee^{\theta}(f_i \mid i \in I)$ и $\vee^{\theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ будем использовать символы $\vee^{n}(f_i \mid i \in I)$ $(\vee^{\infty}(f_i \mid i \in I))$ и $\vee^{n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ $(\vee^{\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I))$. Те же символы будем использовать, если из контекста очевидно, о каком Ω-расслоенном классе Фиттинга идет речь.

Теорема 2. *Решетка ΩR^n_{φ}, где $\psi_0 \leqslant \varphi$, является алгебраической.*

Доказательство. Так как любой n-кратно Ω-расслоенный класс Фиттинга с направлением φ, $\psi_0 \leqslant \varphi$, является объединением (в решетке ΩR^n_{φ}) своих однопорожденных ΩR^n_{φ}-подклассов Фиттинга, для доказательства утверждения достаточно показать, что каждый однопорожденный ΩR^n_{φ}-класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является компактным элементом решетки ΩR^n_{φ}. Применим индукцию по n. Пусть

$$\mathfrak{F} = \Omega R^n(G,\varphi) \subseteq \mathfrak{M} = \vee^{n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Omega R^n\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \varphi\right),$$

где $\mathfrak{F}_i$ — n-кратно Ω-расслоенный класс Фиттинга с тем же направлением φ, $i \in I$.

При $n = 0$ утверждение верно в силу теоремы 1.

Пусть $n > 0$ и однопорожденные ΩR^{n-1}_{φ}-классы Фиттинга являются компактными элементами в решетке ΩR^{n-1}_{φ}. Пусть f_i — минимальный ΩR^{n-1}_{φ}-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, m — минимальный ΩR^{n-1}_{φ}-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{M}$, f — минимальный ΩR^{n-1}_{φ}-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда по теореме 1 из [7]

$$f(\Omega') = \Omega R^{n-1}(O^{\Omega}(G),\varphi), \qquad f(A) = \Omega R^{n-1}(G^{\varphi(A)},\varphi)$$

для всех $A \in \Omega \cap K(G)$, $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, ввиду следствия 1.1 из [7] $f \leqslant m$. Согласно лемме 4 $m = \vee^{n-1}(f_i \mid i \in I)$, и значит, по индукции, найдутся такие индексы $i_1, \dots, i_t \in I$, что $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \subseteq f_{i_1}(\Omega') \vee^{n-1} \dots \vee^{n-1} f_{i_t}(\Omega')$, и для каждой $A \in \Omega \cap K(G)$ найдутся такие индексы $j_1, \dots, j_r \in I$, что $G^{\varphi(A)} \in f(A) \subseteq f_{j_1}(A) \vee^{n-1} \dots \vee^{n-1} f_{j_r}(A)$.

Возьмем объединение всех этих индексов и обозначим их $k_1, \dots, k_s$. Тогда по лемме 4 $f_{k_1} \vee^{n-1} \dots \vee^{n-1} f_{k_s}$ — минимальный ΩR_{φ}^{n-1}-значный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}_{k_1} \vee^{n} \dots \vee^{n} \mathfrak{F}_{k_s}$. Получаем, что $O^{\Omega}(G) \in f(\Omega') \subseteq f_{k_1}(\Omega') \vee^{n-1} \dots \vee^{n-1} f_{k_s}(\Omega')$, $G^{\varphi(A)} \in f(A) \subseteq f_{k_1}(A) \vee^{n-1} \dots \vee^{n-1} f_{k_s}(A)$ для любой $A \in \Omega \cap K(G)$, и значит, $G \in \mathfrak{F}_{k_1} \vee^{n} \dots \vee^{n} \mathfrak{F}_{k_s}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{k_1} \vee^{n} \dots \vee^{n} \mathfrak{F}_{k_s}$. Следовательно, решетка ΩR_{φ}^{n} является алгебраической.

Теорема доказана.

Следствие 3. *Решетки ΩFr^n, ΩB^n, ΩK^n являются алгебраическими.*

Следствие 4. *Решетки Fr^n, B^n, K^n являются алгебраическими.*

Теорема 3. *Решетка K^{∞} является алгебраической.*

Доказательство. Любой тотально канонический класс Фиттинга является решеточным объединением всех своих однопорожденных тотально канонических подклассов Фиттинга. Покажем, что каждый однопорожденный K^{∞}-класс Фиттинга $\mathfrak{F} = K^{\infty}R(G)$ является компактным элементом в решетке K^{∞}.

Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} = \vee^{\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, где $\mathfrak{F}_i = K^{\infty}R(f_i)$, причем в качестве f_i возьмем минимальный K^{∞}-значный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$.

Доказательство проведем индукцией по длине l композиционного ряда группы $G \in \mathfrak{F}$. Если $l(G) = 1$, то $G \cong A$ — простая группа, а значит, $O^{A,A'}(G) = 1$. Так как $G \cong A \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} = K^{\infty}R\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right)$, ввиду следствия 2 получаем, что $A \in K\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right) = \bigcup_{i \in I} K(\mathfrak{F}_i)$, то есть существует такое $j \in I$, что $A \in K(\mathfrak{F}_j)$, и значит, $f_j(A) \neq \varnothing$. Тогда справедливы включения $O^{A,A'}(G) \in f_j(A)$ и $G \in K^{\infty}R(f_j)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_j$.

Пусть $l(G) \geqslant 1$ и все тотально канонические классы Фиттинга вида $K^{\infty}R(D)$, где $l(D) < l(G)$, являются компактными элементами решетки K^{∞}. Обозначим через f минимальный K^{∞}-значный спутник класса $\mathfrak{F}$, m — минимальный K^{∞}-значный спутник класса $\mathfrak{M}$. Тогда по следствию 2 $f(A) = K^{\infty}R(O^{A,A'}(G))$ для всех $A \in K(G)$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \notin K(G)$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, из следствия 2 получаем, что $f \leqslant m$. Согласно лемме 4 $m = \vee^{\infty}(f_i \mid i \in I)$.

Рассмотрим композиционный ряд группы G $G = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = 1$. Тогда $G/G_1 \cong A$ — простая группа, и значит, $O^{A,A'}(G) \subseteq G_1$ и $l(O^{A,A'}(G)) < l(G)$. Следовательно, по индукции найдутся такие индексы $i_1, \dots, i_t \in I$, что $O^{A,A'}(G) \in f(A) \subseteq f_{i_1}(A) \vee^{\infty} \dots \vee^{\infty} f_{i_t}(A)$. Так как $G/G_1 \cong A = B'$ для любой $B \in K(G) \setminus (A)$, справедливы соотношения $O^{B,B'}(G) \subseteq G_1$ и $l(O^{B,B'}(G)) < l(G)$. Значит, для каждой $B \in K(G) \setminus (A)$ найдутся такие индексы $j_1, \dots, j_r \in I$, что $O^{B,B'}(G) \in f(B) \subseteq f_{j_1}(A) \vee^{\infty} \dots \vee^{\infty} f_{j_r}(A)$.

Возьмем объединение всех этих индексов и обозначим их $k_1, \dots, k_s$. Тогда по лемме 4 $f_{k_1} \vee^{\infty} \dots \vee^{\infty} f_{k_s}$ — минимальный K^{∞}-значный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}_{k_1} \vee^{\infty} \dots \vee^{\infty} \mathfrak{F}_{k_s}$. Так как $O^{C,C'}(G) \in f(C) \subseteq f_{k_1}(C) \vee^{\infty} \dots \vee^{\infty} f_{k_s}(C)$ для любой $C \in K(G)$, справедливо включение $G \in \mathfrak{F}_{k_1} \vee^{\infty} \dots \vee^{\infty} \mathfrak{F}_{k_s}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{k_1} \vee^{\infty} \dots \vee^{\infty} \mathfrak{F}_{k_s}$. Значит, $\mathfrak{F}$ — компактный элемент решетки K^{∞}.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденный тотально канонический класс Фиттинга. Тогда решетка всех тотально канонических подклассов Фиттинга в классе Фиттинга $\mathfrak{F}$ конечна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = K^{\infty}R(G)$. Доказательство проведем индукцией по длине l композиционного ряда группы G.

Если $l(G) = 1$, то $G \cong A$ – простая группа, и значит, $\mathfrak{F} = K^{\infty}R(A) = \mathfrak{G}_A$. Тогда решетка всех тотально канонических подклассов Фиттинга в $\mathfrak{F}$ конечна.

Пусть теперь $l(G) \geqslant 1$ и для всех тотально канонических классов Фиттинга вида $K^{\infty}R(D)$, где $l(D) < l(G)$, решетка их всех тотально канонических подклассов Фиттинга конечна.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный тотально канонический подкласс Фиттинга из $\mathfrak{F}$, и пусть m и f – минимальные K^{∞}-значные спутники классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Тогда по следствию 2 $f(A) = K^{\infty}R(O^{A,A'}(G))$ для всех $A \in K(G)$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \notin K(G)$. Кроме того из включения $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, ввиду следствия 2, получаем, что $m \leqslant f$. Так как $l(O^{A,A'}(G)) < l(G)$, решетка всех тотально канонических подклассов в $f(A)$ конечна. Так как множество $K(G)$ конечно, класс $\mathfrak{F}$ имеет лишь конечное множество тотально канонических подклассов Фиттинга.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Скиба А. Н., *Алгебра формаций.* Беларуская навука, Минск, 1997.

2. Скиба А. Н., О локальных формациях длины 5. В кн.: *Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп.* Наука и техника, Минск, 1986, с. 135–149.

3. Воробьев Н. Н., Скиба А. Н., *Дистрибутивность решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга.* Препринт №82, Гомельский Гос. Унив., Гомель, 1999.

4. Ведерников В. А., Сорокина М. М., Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Дискретная математика* (2001) **13**, №3, 125–144.

5. Ведерников В. А., Максимальные спутники Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН* (2001) **2**, 217–233.

6. Doerk K., Hawkes T., *Finite soluble groupes.* Gruyter, Berlin, 1992.

7. Сорокина М. М., О минимальных спутниках кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга и формаций конечных групп. В сб.: *Брянскому государственному педагогическому университету 70 лет.* БГПУ, Брянск, 2000, с. 199–203.

Статья поступила 17.05.2004.