О. С. Розанова, Достаточное условие потери гладкости решениями системы уравнений для модели тонкой атмосферы, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1991, номер 2, 23–27

Теорема 7. *Пара* $(\mathbb{R}, \mathscr{P})$ *является 3-чередующейся для следующих классов* $\mathscr{P}$:

а) $\mathscr{P}$ — *класс счетных замкнутых дискретов;*

б) $\mathscr{P}$ — *класс счетных дискретов.*

Доказательство. Укажем по три необходимых интервала из определения 3-чередуемости:

а) $1\leqslant\tau<\omega$, $\omega\leqslant\tau\leqslant 2^{\omega}$, $2^{\omega}<\tau$;

б) $\tau=1$, $1<\tau\leqslant 2^{\omega}$, $2^{\omega}<\tau$.

Для каждого интервала нужно применить одну из вышесформулированных теорем.

Замечание. Для класса замкнутых дискретов пока доказано, что $(\mathbb{R}, \mathscr{P})$ является 3-чередующейся парой при дополнительном условии — первый слабо недостижимый кардинал измерим и существует. Если же слабо недостижимых кардиналов нет, то $(\mathbb{R}, \mathscr{P})$ превращается в 2-чередующуюся пару.

В заключение упомянем еще о некоторых нерешенных задачах.

1. При каких $\tau\geqslant\mathfrak{c}^{+}$ пространство $\beta(\mathbb{R}^{\tau})\times\beta(\mathbb{R}^{\tau})$ имеет далекие от дискретов точки? (... удаленные точки?)

2. Привести естественные примеры $k$-чередующих пар $(X, \mathscr{P})$ для $k=4, 5, ..., \omega, ...$ .

Автор благодарен своим учителям А. А. Грызлову и В. И. Пономареву за внимание и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казаков А. Н. Далекие точки в произведениях пространств//Кардинальные инварианты и расширения топологических пространств. Ижевск, 1989. 21—27.
2. Douwen E. K. van. Remote points//Dissert. Math. 1981. 188.
3. Dow A. A separable space has no remote points//Trans. Amer. Math. Soc. 1989. **312**, N 1. 335—353.
4. Dow A. Remote points in large products//Topol. Appl. 1983. **16**, N 1. 11—17.
5. Mrówka S. On $E$-compact spaces. II//Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astr. et phys. 1966. **14**, N 11. 597—605.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.

Поступила в редакцию
07.06.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1991. № 2

УДК 517.958+517.954

**О. С. Розанова**

## ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОТЕРИ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯМИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ ТОНКОЙ АТМОСФЕРЫ

Речь будет идти о системе уравнений, обсуждавшейся в работе [1], но сначала рассмотрим более общую задачу. Пусть $\mathfrak{S}$ — замкнутое (без края) компактное $n$-мерное риманово многообразие, $(x^1, ...$ $..., x^n)$ — локальные криволинейные координаты на нем, $a_{ij}$ — его метрический тензор. Пусть на $\mathfrak{S}$ задана система уравнений вида

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\nabla q(\mathbf{u})+\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})=0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}=(u^1, ..., u^n)$, $\mathbf{Q}=(Q^1, ..., Q^n)$, а $q(\mathbf{u})$ — скалярная функция. Рассмотрим задачу отыскания достаточных условий для образования за конечное время особенностей решения системы (1) при гладких начальных данных. Аналогичная задача для гиперболических систем, записанных в виде законов сохранения, а также для систем некоторого частного вида в предположении, что гладкие начальные данные имеют компактный носитель, исследовалась в работах [2, 3], в работе [4] при помощи метода характеристик изучен случай гиперболической системы двух уравнений с одной пространственной переменной; в [5, 6] результаты работы [4] распространены на любое число уравнений. В [7] для одного квазилинейного уравнения найдены достаточные условия обращения первых производных решения в бесконечность и оценено сверху время существования гладкого решения. В [8] аналогичным методом изучаются системы частного вида.

Пусть $X=(X^1,...,X^n)$ — гладкое векторное поле на многообразии $\mathfrak{S}$. Аналогично [3] введем функционал $F(t)\equiv\int\limits_{\mathfrak{S}}(\mathbf{X}, \mathbf{u})\,d\mathfrak{S}$, $t\geqslant 0$, где $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение на $\mathfrak{S}$ в метрике $a_{ij}$, $d\mathfrak{S}$ — элемент $n$-мерного объема на $\mathfrak{S}$. Пусть $\nabla_i X^j$ — обозначение операции ковариантного дифференцирования относительно $a_{ij}$. Верна

Лемма. *Пусть для системы* (1) *выполняются условия:*

$$\text{I)}\ \int\limits_{\mathfrak{S}} q(\mathbf{u})\nabla_i X^i d\mathfrak{S}\geqslant\varepsilon>0;\quad \text{II)}\ \int\limits_{\mathfrak{S}}(\mathbf{X},\ Q)\,d\mathfrak{S}\leqslant 0;$$

$$\text{III)}\ (F(t))^k<C\int\limits_{\mathfrak{S}} q(\mathbf{u})\nabla_i X^i d\mathfrak{S};\quad C=\text{const}>0;\ k>1;\quad \text{IV)}\ F(0)>0.$$

*Тогда решение системы* (1) *теряет исходную $C^m$-гладкость* ($m\geqslant 1$) *при любых начальных данных за время $T$, такое, что* $T<C(k-1)\times\times(F(0))^{k-1}$.

Доказательство. Используя (I), (II) и аналог формулы Грина (см. [1]), получим

$$(F(t))'=-\int\limits_{\mathfrak{S}}(\mathbf{X},\ \nabla q(\mathbf{u})+\mathbf{Q})\,d\mathfrak{S}\geqslant\int\limits_{\mathfrak{S}} q(\mathbf{u})\nabla_i X^i d\mathfrak{S}>0. \tag{2}$$

Тогда согласно (III)

$$(F(t))^k<C(F(t))'. \tag{3}$$

Кроме того, из (IV) и (2) следует, что $F(t)>0$ при $t>0$. Поэтому, деля (3) на $(F(t))^k$ и интегрируя от 0 до $T$, имеем

$$T<C(k-1)((F(O))^{1-k}-(F(T))^{1-k})<C(k-1)(F(0))^{1-k}.$$

Лемма доказана.

Лемма позволяет, в частности, получить некоторые достаточные условия потери гладкости решений для систем уравнений, используемых в метеорологии. Следуя [1], рассмотрим модель тонкой атмосферы и записанную для нее в $\sigma$-координатах интегродифференциальную систему уравнений:

$$(v^i)'_t=R^{-2}g^2[\mu(v^i)'_\sigma]'_\sigma-v^\alpha\nabla_\alpha v^i-\dot\sigma(v^i)'_\sigma+$$

$$+le^i_{.\alpha}v^\alpha-\nabla^i\Phi-RT\nabla^i(\ln p^*),\quad i=1,\ 2; \tag{4}$$

$$S'_t=-v^\alpha\nabla_\alpha S-\dot\sigma S'_\sigma+QT^{-1}; \tag{5}$$

$$(p^*)'_t=p^*\int\limits_0^1 Md\sigma-g\int\limits_0^1\nabla_\alpha(g^{-1}p^*v^\alpha)\,d\sigma; \tag{6}$$

$$\dot{\sigma} = g(p^*)^{-1}\left(\sigma\int_0^1 \nabla_\alpha (g^{-1}p^* v^\alpha)\,d\sigma - \int_0^\sigma \nabla_\alpha (g^{-1}p^* v^\alpha)\,d\sigma\right) -$$

$$-\sigma\int_0^1 M d\sigma + \int_0^1 M d\sigma; \tag{7}$$

$$\Phi = \Phi^* + R\int_0^1 T\sigma^{-1}\,d\sigma; \tag{8}$$

$$T = T_0 \exp\frac{1}{c_p}\left(S + R\ln\frac{\sigma p^*}{p_0}\right). \tag{9}$$

Здесь: $\mathfrak{S}$ — эквипотенциальная поверхность поля силы тяжести планеты, $e_{ij}$ — дискриминантный тензор поверхности $\mathfrak{S}$; $v^i = dx^i/dt$ — контравариантные координаты горизонтальной составляющей вектора скорости; $S$ — энтропия, $T$ — температура, $p$ — давление, $\Phi$ — геопотенциал, $p^*$ и $\Phi^*$ — соответственно значения давления и геопотенциала на поверхности планеты; $T_0$ и $p_0$ — значения температуры и давления, при которых $S=0$; $R$ — универсальная газовая постоянная, $c_p$ — теплоемкость при постоянном давлении, $l$ — параметр Кориолиса, $g$ — ускорение свободного падения, $\mu$ — коэффициент вертикальной турбулентной вязкости; $Q$ и $M$ — соответственно притоки тепла и массы в атмосферу за единицу времени, отнесенные к единице массы. Пусть $\sigma = p/p^*$ — независимая вертикальная $\sigma$-координата Филипса, $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$. Для дальнейшего важно, что у поверхности планеты $\sigma=1$, $\dot{\sigma}=0$, а на верхней границе атмосферы $\sigma=0$, $\dot{\sigma}=0$ (см. [1]).

Из (4), обозначая через $\omega$ величину горизонтального вихря скорости, имеем

$$(v^i)'_t = -(\dot{\sigma}v^i)'_\sigma - \nabla_i\frac{(\mathbf{v},\ \mathbf{v})}{2} + (l-\omega)\,e^i_{.\alpha}v^\alpha - \nabla^i\Phi -$$

$$- RT\nabla^i(\ln p^*) + R^{-2}g^2\left[\mu (v^i)'_\sigma\right]'_\sigma, \quad i=1,\ 2. \tag{10}$$

Проинтегрировав (10) по $\sigma$ от $\sigma=0$ до $\sigma=1$ и учтя тот факт, что $p^*$ и $g$ не зависят от $\sigma$, получим уравнения

$$\left(\int_0^1 v^i d\sigma\right)'_t + \nabla^i\int_0^1\frac{(\mathbf{v},\ \mathbf{v})}{2}\,d\sigma - e^i_{.\alpha}\int_0^1 (l-\omega)\,v^\alpha\,d\sigma + \int_0^1 \nabla^i\Phi\,d\sigma +$$

$$+\left(R\int_0^1 T\,d\sigma\right)\nabla^i\ln p^* - R^{-2}g^2\mu\,(v^i)'_\sigma = 0, \quad i=1,\ 2.$$

Теперь, обозначив $\int_0^1 v^i d\sigma = u^i$, попадем в ситуацию леммы при $q(\mathbf{u}) = \int_0^1 \frac{(\mathbf{v},\ \mathbf{v})}{2}\,d\sigma > 0$, а соответствующий функционал $F(t)$ будет иметь вид $F(t) = \int_{\mathfrak{S}} (\mathbf{X},\ \mathbf{u})\,d\mathfrak{S} = \int_0^1\int_{\mathfrak{S}} (\mathbf{X},\ \mathbf{v})\,d\mathfrak{S}\,d\sigma$, где $\mathbf{X} = (X^1,\ X^2)$ — гладкое векторное поле на $\mathfrak{S}$. Считая, что

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\mathfrak{S}}(\mathbf{v},\ \mathbf{v})\nabla_i X^i\, d\mathfrak{S}\, d\sigma \geqslant \varepsilon > 0, \tag{11}$$

из неравенства Гёльдера получим

$$(F(t))^2 \leqslant \frac{\int_{\mathfrak{S}}(\mathbf{X},\ \mathbf{X})\, d\mathfrak{S} \int_0^1\int_{\mathfrak{S}}(\mathbf{v},\ \mathbf{v})\, d\mathfrak{S}\, d\sigma}{\int_0^1\int_{\mathfrak{S}}(\mathbf{v},\ \mathbf{v})\nabla_i X^i\, d\mathfrak{S}\, d\sigma}\int_0^1\int_{\mathfrak{S}}(\mathbf{v},\ \mathbf{v})\nabla_i X^i\, d\mathfrak{S}\, d\sigma. \tag{12}$$

Из гладкости $\mathbf{X}$ и замкнутости $\mathfrak{S}$ следует ограниченность величины $(\mathbf{X},\ \mathbf{X})$. При физически естественном предположении об ограниченности по модулю горизонтальной составляющей скорости, ее производной по $\sigma$-координате и горизонтального вихря, а также функции $\mu$ $(|\mathbf{v}|\leqslant U$, $|\mathbf{v}'_\sigma|\leqslant U_\sigma$, $|\omega|<W$, $|\mu|<\tilde{\mu})$, ограниченности величины $p^*$ сверху и снизу соответственно величинами $p^*_{\max}$ и $p^*_{\min}$ с учетом (8), аналога формулы Грина, неравенства Гёльдера и свойств ковариантного дифференцирования получаем, что из (11) и (12) вытекает соблюдение условия (III) леммы при $k=2$ и $C=\varepsilon^{-1}U^2\int_{\mathfrak{S}}(\mathbf{X},\ \mathbf{X})\, d\mathfrak{S}\int_{\mathfrak{S}} d\mathfrak{S}$, а условие (II) выполнено, если

$$\frac{p^*_{\min}}{p^*_{\max}}\int_0^1\int_{\mathfrak{S}}\Phi\nabla_i X^i\, d\mathfrak{S}\, d\sigma \geqslant \left(\int_{\mathfrak{S}} d\mathfrak{S}\right)^{\frac{1}{2}}\left[U\left(\int_0^1\int_{\mathfrak{S}}(\mathbf{X},\ \mathbf{X})\, l\, d\mathfrak{S}\, d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + WU\left(\int_{\mathfrak{S}}(\mathbf{X},\mathbf{X})\, d\mathfrak{S}\right)^{\frac{1}{2}} + R^{-2}\tilde{\mu}U_\sigma\left(\int_0^1\int_{\mathfrak{S}}(\mathbf{X},\ \mathbf{X})\, g^4 d\mathfrak{S}\, d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{13}$$

$$\int_0^1\int_{\mathfrak{S}}(\Phi\mathbf{X},\ \nabla\ln p^*)\, d\mathfrak{S}\, d\sigma \geqslant 0. \tag{14}$$

Итак, установлена следующая

Теорема. *Пусть величина приземного давления $p^*$ ограничена снизу и сверху величинами $p^*_{\min}$ и $p^*_{\max}$ соответственно, а горизонтальная составляющая скорости, ее производная по вертикальной координате и горизонтальный вихрь, а также коэффициент вертикальной турбулентной вязкости $\mu$ ограничены по модулю величинами $U$, $U_\sigma$, $W$ и $\tilde{\mu}$ соответственно. Пусть $\mathbf{X}=(X^1,\ X^2)$ — стационарное векторное поле на $\mathfrak{S}$, для которого верны условия (11) и (14).*

*Тогда, если выполняются не зависящая от времени оценка (13) и зависящее только от начальных данных условие*

$$F(0)=\int_0^1\int_{\mathfrak{S}}(\mathbf{X},\ \mathbf{v}(0,\ \mathbf{x}))\, d\mathfrak{S}\, d\sigma > 0,$$

*то любое первоначально гладкое решение системы* (4)—(9) *теряет гладкость за время* $T$, *такое, что*

$$T<(F(0))^{-1}\varepsilon^{-1}U^2\int_{\mathfrak{G}}(\mathbf{X},\ \mathbf{X})\,d\mathfrak{G}\int_{\mathfrak{G}}d\mathfrak{G}.$$

При физической интерпретации модели, рассмотренной в [1], это означает образование атмосферных фронтов.

Автор выражает признательность Э. Р. Розендорну за внимание к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розендорн Э. Р. Интегродифференциальная система модели тонкой атмосферы// //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1981. № 3. 12—17.
2. Sideris T. C. Singularities of hyperbolic equations//Arch. Ration. Mech. and Anal. 1984. **86**, N 4. 369—381.
3. Sideris T. C. Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids// //Communs Math. Phys. 1985. **101**, N 4. 475—485.
4. Glimm J., Lax P. D. Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation law//Mem. Amer. Math. Soc. 1970. N 101.
5. John F. Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation// //Communs Pure. and Appl. Math. 1974. **27**. 377—405.
6. Liu T.-P. Development of singularities in the nonlinear wave for quasilinear hyperbolic partial differential equations//J. Diff. Equat. 1979. **33**. 92—111.
7. Lax P. D. Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations//J. Math. Phys. 1964. **5**. 611—613.
8. Levine H. A., Protter M. H. The breakdown of solutions of quasilinear first order systems of partial differential equations//Arch. Ration. Mech. and Anal. 1986. **95**, N 3. 253—269.

Поступила в редакцию
14.06.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1991. № 2

УДК 519.714.2

**Р. М. Колпаков**

## О ПОРОЖДЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ $\pi$-СЕТЯМИ

Пусть $Q$ — множество рациональных чисел в интервале (0, 1). Обозначим через $x\&y$ и $x\vee y$ две операции, определенные на $Q$:
$x\&y=x\cdot y$, $x\vee y=1-(1-x)(1-y)$.

Будем рассматривать порождение чисел из $Q$ формулами в базисе, состоящем из этих операций, именно будем говорить, что число $a\in\in Q$ порождается системой чисел $\mathfrak{M}\subset Q$ (конечной или бесконечной), если существует формула в базисе $(\&, \vee)$, порождающая число $a$ (т. е. значение которой равно $a$, см. [1, с. 62—64]). Обозначим через $[\mathfrak{M}]$ множество всех чисел из $Q$, порождаемых системой $\mathfrak{M}$. Множество $A\subset Q$ назовем конечно порожденным, если оно содержит такое конечное подмножество $\mathfrak{M}$, что $A\subseteq[\mathfrak{M}]$. Сложность порождающей формулы $F$ определим как количество вхождений в нее числовых символов и обозначим эту величину через $L(F)$. Пусть $a\in[\mathfrak{M}]$. Положим $L_{\mathfrak{M}}(a)=\min L(F)$, где минимум берется по всем формулам в базисе $(\&, \vee)$, составленным из чисел системы $\mathfrak{M}$ и порождающим $a$. Величину $L_{\mathfrak{M}}(a)$ назовем сложностью порождения числа $a$ системой $\mathfrak{M}$.

Данная постановка задачи имеет естественную интерпретацию в виде вероятностных контактных $\pi$-схем (см. [2]), поскольку порождение числа $a$ системой $\mathfrak{M}$ эквивалентно существованию $\pi$-схемы с ве-