Ш. Ш. Юсубов, Об оптимальности особых по компонентам управлений в системах Гурса–Дарбу,
Пробл. управл., 2014, выпуск 5, 2–6

УДК 517.977

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ ПО КОМПОНЕНТАМ УПРАВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ ГУРСА – ДАРБУ

Ш.Ш. Юсубов

Введено понятие управления, особого по части компонентов в смысле принципа максимума Понтрягина и особого по остальным компонентам в классическом смысле. Получены новые необходимые условия оптимальности в системах Гурса — Дарбу.

Ключевые слова: необходимые условия, оптимальность, особое по компонентам управление.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование многих прикладных процессов приводит к задаче управления для систем, описываемых нелинейными гиперболическими уравнениями второго порядка с краевыми условиями Гурса — Дарбу [1—5]. К настоящему времени вопросы, связанные с выводом необходимых условий оптимальности первого и более высокого порядков в таких системах достаточно полно изучены [2—15]. Известно, что необходимые условия оптимальности высокого порядка тесно связаны с теорией оптимальных особых управлений. Отдельно рассматриваются управления, особые в классическом смысле [11, 13—15], и управления, особые в смысле принципа максимума Понтрягина [8—13].

В известных нам работах при исследовании особых управлений рассмотрены только случаи, когда все компоненты управляющих функций удовлетворяют одним и тем же условиям. Не рассмотрены случаи, когда часть компонентов управляющих функций являются особыми в классическом смысле, а другая часть — особыми в смысле принципа максимума Понтрягина. Оказывается, что такие случаи представляют и теоретический, и практический интерес.

В настоящей статье в развитие предложенной в работе [15] методики вводится понятие особого по компонентам управления и на его основе предлагается новая схема вывода необходимых условий оптимальности. Получены новые необходимые условия оптимальности для особых по компонентам управлений, позволяющие существенно сузить множество управлений, подозрительных на оптимальность.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в $D = \{(t, x)\}: t \in T = [t_0, t_1], x \in X = [x_0, x_1]$, управляемый процесс описывается системой гиперболических уравнений

$$z_{tx} = f(t, x, z, z_t, z_x, u) \quad (1)$$

с условиями Гурса

$$z(t, x_0) = \varphi_1(t), \quad t \in T, \quad z(t_0, x) = \varphi_2(x), \quad x \in X,$$
$$\varphi_1(t_0) = \varphi_2(x_0). \quad (2)$$

Здесь $z(t, x)$ — n-мерный вектор состояния системы, $u(t, x)$ — r-мерный вектор управления. Как и в работе [15], представим управление $u(t, x)$ в виде $u(t, x) = (v(t, x), w(t, x))'$, $v(t, x) = (v_1(t, x), ..., v_{r_0}(t, x))$, $w(t, x) = (w_1(t, x), ..., w_{r_1}(t, x))$, $0 \le r_0 \le r$, $r_0 + r_1 = r$; $f(t, x, z, p_1, p_2, v, w)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по p, w ($p = (z, p_1, p_2)$) до второго порядка включительно, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — n-мерные вектор-функции, непрерывно дифференцируемые на T и X соответственно.

В качестве множества допустимых управлений берется множество кусочно-непрерывных r-мерных вектор-функций $u(t, x) = (v(t, x), w(t, x))'$, принимающих значения из заданного непустого ограниченного множества U:

$$u(t, x) = (v(t, x), w(t, x))' \in U \subset R^r,$$
$$(t, x) \in D. \quad (3)$$

Кроме того, предполагаем, что проекция сечения U для каждого v на r_1-мерное пространство является открытым множеством.

Существование и единственность решения системы (1), (2) исследованы, например, в работе [16]. Поэтому предполагается, что каждому допустимому управлению $(v(t, x), w(t, x))'$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $z(t, x)$ задачи (1), (2), определенное на D.

Задача заключается в минимизации функционала

$$S(v, w) = \varphi(z(T_1, X_1), ..., z(T_k, X_k)), \qquad (4)$$

определенного на решениях системы (1), (2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, где $\varphi(z_1, ..., z_k)$ — заданная, дважды непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных скалярная функция, а $(T_i, X_i) \in D$, $i = \overline{1, k}$, — заданные точки, причем $t_0 < T_1 < T_2 < ... < T_k \le t_1$, $x_0 < X_1 < X_2 < ... < X_k \le x_1$.

Допустимое управление $(v(t, x), w(t, x))'$, являющееся решением задачи минимума функционала (4) при ограничениях (1)—(3), назовем оптимальным управлением, соответствующее ему решение $z(t, x)$ системы (1), (2) — оптимальной траекторией, а $(v(t, x), w(t, x), z(t, x))$ — оптимальным процессом.

Пусть $(v(t, x), w(t, x), z(t, x))$ — фиксированный допустимый процесс в задаче (1)—(4). Введем обозначения:

$$H(t, x, p(t, x), v, w, \psi(t, x)) \equiv \\ \equiv \psi'(t, x)f(t, x, p(t, x), v, w),$$

$$\Delta_{\bar v} f(t, x) \equiv f(t, x, p(t, x), \bar v(t, x), w(t, x)) - \\ - f(t, x, p(t, x), v(t, x), w(t, x)),$$

$$f_p(t, x) \equiv f_p(t, x, p(t, x), v(t, x), w(t, x)) \text{ и т. д.}$$

Здесь $\psi(t, x)$ − n-мерная вектор-функция сопряженных переменных, определяемая соотношением

$$\psi(t, x) = -\sum_{i=1}^{k} \lambda'(T_i, X_i; t, x)\partial\varphi(z(T_1, X_1), ..., \\ ..., z(T_k, X_k))/\partial z_i,$$

где «′» означает транспонирование, а матрица-функция $\lambda(t, x; \tau, s)$ — решение интегрального уравнения

$$\lambda(t, x; \tau, s) = E + \int_\tau^t\int_s^x \lambda(t, x; \xi, \eta)f_z(\xi, \eta)d\xi d\eta + \\ + \int_\tau^t \lambda(t, x; \xi, s) f_{z_x}(\xi, s)d\xi + \int_s^x \lambda(t, x; \tau, \eta) f_{z_t}(\tau, \eta)d\eta,$$

причем $\lambda(t, x; \tau, s) = 0$ при $t < \tau$ или $x < s$, E — единичная $n \times n$ матрица.

Известно [2—15], что для задачи (1)—(4) получены многочисленные необходимые условия оптимальности первого и высокого порядков. Приведем пример, в котором показывается, что применение известных результатов [2—15] к допустимому управлению, удовлетворяющему условию максимума, нельзя исключить из числа претендентов на оптимальность.

Пример. Пусть минимизируется функционал

$$S(u) = z_2(1,1)$$

при ограничениях

$$z_{1tx} = |u_1|, \quad z_{2tx} = u_2 z_{1t} + 2u_2^4,$$
$$(t, x) \in T \times X = [0,1] \times [0,1], \qquad (5)$$
$$z_i(t, 0) \equiv z_i(0, x) \equiv 0, \quad i = 1,2, \quad t \in T, \quad x \in X,$$
$$U = \{(u_1, u_2)': u_1 = 0, \pm 1, u_2 \in (-1, 1)\}.$$

Исследуем на оптимальность допустимое управление $(u_1, u_2)' = (0, 0)'$. Соответствующее этому управлению решение системы (5) $z_1(t, x) \equiv z_2(t, x) \equiv 0$, $(t, x) \in D$. Гамильтониан системы имеет вид $H(t, x, p, v, w, \psi) \equiv \psi_1|u_1| + \psi_2(u_2 z_{1t} + 2u_2^4)$, а система сопряженных уравнений имеет решение $\psi_1(t, x) \equiv 0$, $\psi_2(t, x) \equiv -1$, $(t, x) \in D$. Отметим, что вдоль управления $(0, 0)'$ принцип максимума Понтрягина выполняется: $\Delta_u H = -2u_2^4 \le 0$, и результаты работ [2—14] применить к этому примеру нельзя. С другой стороны, можно показать, что и результаты работы [15] оставляют управление $(0, 0)'$ в числе претендентов на оптимальность.

Таким образом, чтобы получить дополнительную информацию об оптимальности исследуемого управления $(0, 0)'$, нужны новые необходимые условия оптимальности.

Цель данной работы заключается в выводе новых необходимых условий оптимальности в таких случаях.

2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ ПО КОМПОНЕНТАМ УПРАВЛЕНИЙ

Пусть $(v(t, x), w(t, x), z(t, x))$ — фиксированный допустимый процесс в задаче (1)—(4). Наряду с процессом $(v(t, x), w(t, x), z(t, x))$ рассмотрим другой допустимый процесс: $(\bar v(t, x) = v(t, x) + \Delta v(t, x)$, $\bar w(t, x) = w(t, x) + \Delta w(t, x)$, $\bar z(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x))$. Тогда приращение функционала можно представить в виде:

$$\Delta S(v, w) = -\iint_D [\Delta_{\bar v} H(t, x) + H'_w(t, x)\Delta w(t, x) + \\ + \Delta_v H'_w(t, x)\Delta w(t, x) + \Delta_{\bar v} H'_p(t, x)\Delta p(t, x) + \\ + \frac{1}{2}\Delta p'(t, x)H_{pp}(t, x)\Delta p(t, x) +$$

$$
+ \Delta p'(t, x) H_{pw}(t, x) \Delta w(t, x) + \\
+ \frac{1}{2} \Delta w'(t, x) H_{ww}(t, x) \Delta w(t, x) + \\
+ \frac{1}{2} (\Delta p'(t, x) \Delta_{\bar{v}} H_{pp}(t, x) \Delta p(t, x) + \\
+ 2\Delta p'(t, x) \Delta_{\bar{v}} H_{pw}(t, x) \Delta w(t, x) + \\
+ \Delta w'(t, x) \Delta_{\bar{v}} H_{ww}(t, x) \Delta w(t, x) + \\
+ o([\|\Delta p(t, x)\| + \|\Delta w(t, x)\|]^2)] dt dx + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{i, j = 1}^{k} \Delta z'(T_i, X_i) \frac{\partial^2 \varphi(z(T_1, X_1), ..., z(T_k, X_k))}{\partial z_i \partial z_j} \times \\
\times \Delta z(T_j, X_j)) + o\left(\left[\sum_{i = 1}^{k} \|\Delta z(T_i, X_i)\|\right]^2\right), \quad (6)
$$

где $\Delta z(t, x)$ — решение задачи:

$$
\Delta z_{tx} = f_z(t, x)\Delta z + f_{z_t}(t, x)\Delta z_t + f_{z_x}(t, x)\Delta z_x + \\
+ \Delta_{\bar{v}} f(t, x) + f_w(t, x)\Delta w(t, x) + r(t, x), \quad (t, x) \in D, \\
\Delta z(t, x_0) = \Delta z(t_0, x_0) = 0, \quad t \in T, \quad x \in X, \quad (7)
$$

а

$$
r(t, x) = \Delta_{\bar{v}} f_w(t, x)\Delta w(t, x) + \Delta_{\bar{v}} f_z(t, x)\Delta z + \\
+ \Delta_{\bar{v}} f_{z_t}(t, x)\Delta z_t + \Delta_{\bar{v}} f_{z_x}(t, x)\Delta z_x + o(\|\Delta z(t, x)\| + \\
+ \|\Delta z_t(t, x)\| + \|\Delta z_x(t, x)\| + \|\Delta w(t, x)\|); \quad (8)
$$

$o(\alpha)/\alpha \to o$, при $\alpha \to o$, $\|\Delta z(t, x)\|$ — евклидова норма вектора $\Delta z(t, x)$ в R^n.

Отметим, что для приращения $\Delta z(t, x)$ решения задачи (7) и его производных $\Delta z_t(t, x)$, $\Delta z_x(t, x)$ имеют место представления

$$
\Delta z(t, x) = \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} \lambda(t, x; \tau, s)(\Delta_{\bar{v}} f(\tau, s) + \\
+ f_w(\tau, s)\Delta w(\tau, s) + r(\tau, s)) d\tau ds,
$$

$$
\Delta z_t(t, x) = \int_{x_0}^{x} \lambda(t, x; t, s)(\Delta_{\bar{v}} f(t, s) + f_w(t, s)\Delta w(t, s) + \\
+ r(t, s)) ds + \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} \lambda(t, x; \tau, s)(\Delta_{\bar{v}} f(\tau, s) + \\
+ f_w(\tau, s)\Delta w(\tau, s) + r(\tau, s)) d\tau ds, \quad (9)
$$

$$
\Delta z_x(t, x) = \int_{t_0}^{t} \lambda(t, x; \tau, x)(\Delta_{\bar{v}} f(\tau, x) + f_w(\tau, x)\Delta w(\tau, x) + \\
+ r(\tau, x)) d\tau + \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} \lambda(t, x; \tau, s)(\Delta_{\bar{v}} f(\tau, s) + \\
+ f_w(\tau, s)\Delta w(\tau, s) + r(\tau, s)) d\tau ds,
$$

и для них имеют место оценки [2]:

$$
\|\Delta z(t, x)\| \le c \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} \|\Delta_{\bar{u}} f(\tau, s)\| d\tau ds,
$$

$$
\|\Delta z_t(t, x)\| \le c\left(\int_{x_0}^{x} \|\Delta_{\bar{u}} f(t, s)\| ds + \right. \\
\left. + \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} \|\Delta_{\bar{u}} f(\tau, s)\| d\tau ds \right), \quad (10)
$$

$$
\|\Delta z_x(t, x)\| \le c\left(\int_{t_0}^{t} \|\Delta_{\bar{u}} f(\tau, x)\| d\tau + \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} \|\Delta_{\bar{u}} f(\tau, s)\| d\tau ds \right),
$$

где $c = \mathrm{const} > 0$.

Из выражения (6) следуют аналог уравнения Эйлера

$$
H_w(t, x) = 0, \quad (t, x) \in D \quad (11)
$$

и условие максимума Понтрягина

$$
\Delta_v H(t, x) \equiv H(t, x, p(t, x), v, w(t, x), \psi(t, x)) - \\
- H(t, x, p(t, x), v(t, x), \\
w(t, x), \psi(t, x)) \le 0, \quad (v, w(t, x))' \in U, \\
(t, x) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1). \quad (12)
$$

Теорема 1 [15]. *Если допустимое управление* $(v(t, x), w(t, x))'$ *удовлетворяет условию* (11), *то для его оптимальности в задаче* (1)—(4) *необходимо, чтобы выполнялось условие Лежандра — Клебша*

$$
w' H_{ww}(t, x) w \le 0, \quad w \in R^{r_1}, \\
(t, x) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1) \; \blacklozenge. \quad (13)
$$

Отметим, что не исключена возможность вырождения условия оптимальности (12) и (13).

Определение. Допустимое управление $(v(t, x), w(t, x))'$, удовлетворяющее условиям (11)—(13), назовем особым по компоненте v в смысле принципа максимума Понтрягина и особым по компоненте w в классическом смысле, если существует множество $U_0 \subset U$ такое, что выполняются условия

$$
\Delta_v H(t, x) = 0, \; (v, w(t, x))' \in U_0, \quad (14)
$$

$$
w' H_{ww}(t, x) w = 0, \quad w \in R^{r_1}, \\
(t, x) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1), \quad (15)
$$

где $U_0/\{(v(t, x), w(t, x))'\} \ne \varnothing$, $(t, x) \in D$.

Ясно, что при выполнении условий (14), (15) принцип максимума Понтрягина (12) и условие Лежандра — Клебша (13) вырождаются и не дают никакой информации об оптимальности исследуемого управления. Поэтому требуются дополнительные исследования.

Для получения новых необходимых условий оптимальности вариацию управления $(v(t, x), w(t, x))'$ определим в виде

$$\Delta v(t, x) = \\ = \begin{cases} v - v(t, x),\ (t, x) \in (\theta - ac\varepsilon, \theta) \times [\sigma, \sigma + \varepsilon^2), \\ 0,\ (t, x) \in D \backslash \{(\theta - ac\varepsilon, \theta] \times [\sigma, \sigma + \varepsilon^2)\}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\Delta w(t, x) = \begin{cases} \varepsilon \delta w(t, x),\ (t, x) \in [\theta, t_1] \times [\sigma, \sigma + \varepsilon^2), \\ 0,\ (t, x) \in D \backslash \{[\theta, t_1] \times [\sigma, \sigma + \varepsilon^2)\}, \end{cases} \quad (17)$$

где $a > 0$, $c > 0$ — произвольные числа, $(v, w(t, x)) \in U$, $(t, x) \in D$, $\delta w(t, x)$, $(t, x) \in D$, произвольная кусочно-непрерывная вектор-функция со значениями из R^{r_1}, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, такое что $t_0 < \theta - ac\varepsilon < \theta < t_1$, $x_0 \le \sigma < \sigma + \varepsilon^2 < x_1$, $(v(t, x), w(t, x) + \varepsilon\delta w(t, x))' \in U$, $(t, x) \in D$, (θ, σ) — точка непрерывности функции $(v(t, x), w(t, x))'$.

В силу оптимальности особого по компоненте v в смысле принципа максимума Понтрягина и особого по компоненте w в классическом смысле управления $(v(t, x), w(t, x))'$, с учетом выражений (9), (10), (16) и (17) в формуле (6) имеем

$$a^2c^2(\Delta_v H'_{z_x}(\theta, \sigma)\Delta_v f(\theta, \sigma) + \\ + \Delta_v f'(\theta, \sigma)\Psi_1(\theta, \sigma)\Delta_v f(\theta, \sigma)) + 2ac\Delta_v f'(\theta, \sigma) \times \\ \times \int_\theta^{t_1} \lambda'(t, \sigma; \theta, \sigma)\Big[H_{z_x z_x}(t, \sigma)\int_\theta^t \lambda(t, \sigma; \tau, \sigma) \times \\ \times f_w(\tau, \sigma)\delta w(\tau, \sigma)d\tau + H_{z_x w}(t, \sigma)\delta w(\tau, \sigma)\Big]dt + \\ + \int_\theta^{t_1}\Big[\Big(\int_\theta^t \lambda(t, \sigma; \tau, \sigma) f_w(\tau, \sigma)\delta w(\tau, \sigma)d\tau\Big) \times \\ \times H_{z_x z_w}(t, \sigma)\Big(\int_\theta^t \lambda(t, \sigma; \tau, \sigma) f_w(\tau, \sigma)\delta w(\tau, \sigma)d\tau\Big) + \\ + 2\Big(\int_\theta^t \lambda(t, \sigma; \tau, \sigma) f_w(\tau, \sigma)\delta w(\tau, \sigma)d\tau\Big)' \times \\ \times H_{z_x w}(t, \sigma)\delta w(t, \sigma)\Big]dt \le 0, \quad (18)$$

$$\Psi_1(\theta, \sigma) = \int_\theta^t \lambda'(t, \sigma; \theta, \sigma) H_{z_x z_x}(t, \sigma)\lambda(t, \sigma; \theta, \sigma)dt.$$

Далее, полагая $c = \varepsilon_1 > 0$ и

$$\delta w(t, \sigma) = \begin{cases} w,\ t \in [\theta, \theta + b\varepsilon_1), \\ 0,\ t \notin [\theta, \theta + b\varepsilon_1), \end{cases}$$

где $b > 0$, $w \in R^{r_1}$, а $\varepsilon_1 > 0$ — достаточно малое число, такое что $t_0 \le \theta < \theta + b\varepsilon_1 < t_1$, можно показать, что из выражения (18) следует неравенство

$$a^2a_1(\theta, \sigma; v) + 2ab\Delta_v f'(\theta, \sigma)(H_{z_x w}(\theta, \sigma) + \\ + \Psi_1(\theta, \sigma) f_w(\theta, \sigma))w + b^2b_1(\theta, \sigma; w) \le 0,$$

где

$$a_1(\theta, \sigma; v) \equiv \Delta_v H'_{z_x}(\theta, \sigma)\Delta_v f(\theta, \sigma) + \\ + \Delta_v f'(\theta, \sigma)\Psi_1(\theta, \sigma)\Delta_v f(\theta, \sigma),$$

$$b_1(\theta, \sigma; w) \equiv w'(H_{w z_x}(\theta, \sigma) + \\ + f'_w(\theta, \sigma)\Psi_1(\theta, \sigma)) f_w(\theta, \sigma)w.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$a^2a_2(\theta, \sigma; v) + 2ab\Delta_v f'(\theta, \sigma)(H_{z_x w}(\theta, \sigma) + \\ + \Psi_2(\theta, \sigma) f_w(\theta, \sigma))w + b^2b_2(\theta, \sigma; w) \le 0,$$

где

$$a_2(\theta, \sigma; v) \equiv \Delta_v H'_{z_x}(\theta, \sigma)\Delta_v f(\theta, \sigma) + \\ + \Delta_v f'(\theta, \sigma)\Psi_2(\theta, \sigma)\Delta_v f(\theta, \sigma),$$

$$b_2(\theta, \sigma; w) \equiv w'(H_{w z_x}(\theta, \sigma) + \\ + f'_w(\theta, \sigma)\Psi_2(\theta, \sigma)) f_w(\theta, \sigma)w,$$

$$\Psi_2(\theta, \sigma) = \int_\sigma^{x_1} \lambda'(\theta, x; \theta, \sigma) H_{z_t z_t}(\theta, x)\lambda(\theta, x; \theta, \sigma)dx.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если* $(v(t, x), w(t, x))'$ *— особое по компоненте* v *в смысле принципа максимума Понтрягина и особое по компоненте* w *в классическом смысле оптимальное управление в задаче* (1)—(4), *то вдоль процесса* $(v(t, x), w(t, x), z(t, x))$ *выполняются условия*

$$a^2a_1(t, x; v) + 2ab\Delta_v f'(t, x)(H_{z_x w}(t, x) + \\ + \Psi_1(t, x) f_w(t, x))w + b^2b_1(t, x; w) \le 0, \quad (19)$$

и

$$a^2a_2(t, x; v) + 2ab\Delta_v f'(t, x)(H_{z_t w}(t, x) + \\ + \Psi_2(t, x) f_w(t, x))w + b^2b_2(t, x; w) \le 0 \quad (20)$$

при всех $a > 0$, $b > 0$, $(v, w(t, x))' \in U_0$, $w \in R^{r_1}$, $(t, x) \in (t_0, t_1) \times (x_0, x_1)$. ♦

Из условий (19) и (20) вытекает

Следствие. Для оптимальности особого по компоненте v в смысле принципа максимума Понтрягина и особого по компоненте w в классическом смысле управления $(v(t, x), w(t, x))'$ в задаче (1)—(4) необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$a_1(t, x; v) \le 0, \quad b_1(t, x; w) \le 0,$$

$$\Delta_v f'(t, x)(H_{z_x w}(t, x) + \Psi_1(t, x) f_w(t, x))w \le$$
$$\le \sqrt{a_1(t, x; v) \cdot b_1(t, x; w)},$$

и

$$a_2(t, x; v) \le 0, \quad b_2(t, x; w) \le 0,$$

$$\Delta_v f'(t, x)(H_{z_t w}(t, x) + \Psi_2(t, x) f_w(t, x))w \le$$
$$\le \sqrt{a_2(t, x; v) \cdot b_2(t, x; w)}, \qquad (21)$$

при всех $(v, w(t, x))' \in U_0$, $w \in R^{r_1}$, $(t, x) \in (t_0, t_1) \times$ $\times (x_0, x_1)$.

Для иллюстрации эффективности, например, необходимого условия оптимальности (21) рассмотрим приведенный ранее пример 1. Вдоль управления $(0, 0)'$ имеем:

$$\Delta_{u_1} H = 0, \quad H_{u_2} = 0, \quad H_{u_2 u_2} = 0,$$

$$\Delta_{u_1} H'_{z_x} \cdot \Delta_{u_1} f = 0, \quad \Delta_{u_1} f' \cdot H_{z_x u_2} = 0,$$

$$H_{z_x u_2} \cdot f_{u_2} = 0, \quad \Psi_i(t, x) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\Delta_{u_1} H'_{z_x} \cdot \Delta_{u_1} f = 0, \quad \Delta_{u_1} f' \cdot H_{z_t u_2} = -|u_1| u_2,$$

$$H_{u_2 z_1} \cdot f_{u_2} = 0, \ \ a_i(t, x; v) \equiv b_i(t, x; w) \equiv 0, \ \ i = 1, 2.$$

Условие (21) принимает вид

$$-|u_1| u_2 \le 0, \quad \forall u_1 \in \{0, \pm 1\}, \quad \forall u_2 \in R,$$

и не выполняется, например, при $u_1 = \pm 1$, $u_2 \in (-\infty, 0)$. Это показывает, что управление $(0, 0)'$ не может быть оптимальным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введено понятие особого по некоторым компонентам в смысле принципа максимума Понтрягина, а по другим компонентам в классическом смысле управления и на его основе предложена новая схема вывода необходимых условий оптимальности. Полученные в работе результаты новые и они позволяют сузить множество управлений, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина. На примере показано, что ранее известные необходимые условия оптимальности не выявляют управления, не являющиеся оптимальными, в то время как полученные в работе условия позволяют показать, что рассматриваемые управления не могут быть оптимальными.

Дальнейшее развитие этого метода может существенно пополнить арсенал необходимых условий оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 736 с.
2. *Егоров А.И.* Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. — 1964. — Т. 25, № 5. — С. 613—623.
3. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965. — 474 с.
4. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977. — 480 с.
5. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
6. *Ахмедов Т. К., Ахиев С.С.* Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН АзССР. — 1972. — Т. 28, № 5. — С. 12—16.
7. *Плотников В.И., Сумин В.И.* Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса — Дарбу // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 61—77.
8. *Ащепков Л.Т., Васильев О.В.* Об оптимальности особых управлений в системах Гурса — Дарбу // Там же. — 1975. — Т. 15, № 5. — С. 1157—1167.
9. *Срочко В.А.* Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами // Сибирский математический журнал. — 1976. — Т. 17, № 5. — С. 1108—1115.
10. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности второго порядка для системы с распределенными параметрами // Препринт / Ин-т математики АН БССР. —1982. — № 31 (156). — 31 с.
11. *Гасанов К.К., Юсубов Ш.Ш.* Об оптимальности особых управлений в системах с распределенными параметрами / Деп. в АзНИИНТИ. — № 56. Аз-В83.
12. *Васильев О.В.* Качественные и конструктивные методы оптимизации систем с распределенными параметрами: автореф. дис. ... д-р физ.-мат. наук. — Л.: ЛГУ, 1984. — 39 с.
13. *Мансимов К.Б.* Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. ... д-р физ.-мат. наук. — Баку, 1994. — 42 с.
14. *Меликов Т.К.* Необходимые условия оптимальности в некоторых задачах оптимального управления: автореф. дис. ... д-р физ.-мат. наук. — Баку, 2005. — 41 с.
15. *Юсубов Ш.Ш.* Необходимые условия оптимальности особого управления в одной системе с распределенными параметрами // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 1. — С. 22—27.
16. *Плотников В.И., Сумин В.И.* Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса — Дарбу // Дифференциальные уравнения. — 1972. — Т. 8, № 5. — С. 845—856.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Юсубов Шакир Шыхы оглы — канд. физ.-мат. наук, доцент, Бакинский государственный университет,
✉ yusubov_sh@mail.ru.