



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Александров, Л. В. Дородницын, А. П. Дубень, Д. Р. Колюхин, Валидация стохастического алгоритма генерации турбулентных пульсаций скоростей, основанного на рандомизированном спектральном методе, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2020, 109

<https://www.mathnet.ru/ipmp2900>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

13 мая 2025 г., 06:14:24





ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А.В. Александров,
Л.В. Дородницын, А.П. Дубень,
Д.Р. Колюхин

Валидация стохастического
алгоритма генерации
турбулентных пульсаций
скоростей, основанного на
рандомизированном
спектральном методе

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Валидация стохастического алгоритма генерации турбулентных пульсаций скоростей, основанного на рандомизированном спектральном методе / А.В. Александров [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 109. 18 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-109>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-109>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**А.В. Александров, Л.В. Дородницын, А.П. Дубень,
Д.Р. Колюхин**

**Валидация стохастического алгоритма
генерации турбулентных пульсаций
скоростей, основанного
на рандомизированном
спектральном методе**

Москва — 2020

Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П., Колюхин Д.Р.

Валидация стохастического алгоритма генерации турбулентных пульсаций скоростей, основанного на рандомизированном спектральном методе

В работе выполнена численная валидация алгоритма генерации турбулентных пульсаций скоростей, основанного на рандомизированном спектральном методе. Валидация проводится на основе расчетов пристеночных канонических турбулентных течений (развитое турбулентное течение в бесконечном плоском канале и течение возле плоской пластины) и задачи об обтекании выпуклости на плоской пластине.

Ключевые слова: синтетическая турбулентность, рандомизированный спектральный метод, IDDES, течение возле выпуклости на пластине

Alexandrov Anatoly, Dorodnicyn Ludwig, Duben Aleksey, Kolyukhin Dmitry

Validation of stochastic algorithm for generation of a turbulent velocity fluctuation field based on the randomized spectral method

The validation of the stochastic spectral algorithm for generation of a turbulent velocity fluctuation fields based on the randomized spectral method is presented. The validation of the considered algorithm is done on simulation of two canonical turbulent flows (turbulent planar channel flow and flow over the flat plate) and flow over a wall-mounted hump.

Key words: synthetic turbulence, randomized spectral method, IDDES, flow over wall-mounted hump

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00726-А.

Оглавление

| | |
|--|----|
| Введение | 3 |
| Алгоритм генерации турбулентного поля скорости на основе рандомизированного спектрального метода..... | 4 |
| Расчет канонических сдвиговых турбулентных течений..... | 5 |
| Расчет обтекания выпуклости на плоской пластине | 11 |
| Заключение..... | 16 |

Введение

Искусственно сгенерированные турбулентные поля скорости широко используются при численном моделировании задач вычислительной газовой динамики. Использование таких полей для построения начальных и/или граничных условий позволяет ощутимо снизить вычислительную стоимость расчетов.

Существует несколько классов методов генерации искусственных турбулентных полей [1]. В настоящее время наибольшее распространение получили спектральные методы, строящие поле в виде суммы гармоник Фурье [2,3,4]. Детерминированные методы данного класса хорошо изучены. В частности, в работах [5, 6] проведена валидация этих методов на примере расчетов канонических турбулентных течений и задачи об обтекании выпуклости на плоской пластине. Стохастические спектральные методы генерации исследовались меньше. В работе [7] исследовались свойства стохастического метода генерации реализаций поля скорости, основанного на рандомизированном спектральном методе [8] для случая однородной изотропной турбулентности. Было показано, что полученные поля обладают необходимыми спектральными и корреляционными свойствами. В работе [9] представлены результаты валидации одного из вариантов стохастического спектрального генератора в неоднородном случае на примере расчета турбулентного течения в канале.

В настоящей работе представлены результаты валидационных расчетов, выполненных с использованием алгоритма генерации реализаций поля скорости, основанного на рандомизированном спектральном методе (РСМ) [8]. Как и, в частности, в работе [5], в качестве референсных тестов выбраны хорошо известные задачи, для которых имеются надёжные эталонные данные для сравнения. В частности, рассмотрены канонические сдвиговые турбулентные течения (развитое турбулентное течение в бесконечном плоском канале и течение возле плоской пластины) и ресурсоемкая задача об обтекании выпуклости на плоской пластине [10]. Для более детальной оценки результатов расчеты выполнялись как с использованием стохастического спектрального генератора (ССГ), основанного на рандомизированном спектральном методе [8], так и с генератором, основанным на детерминированном спектральном методе (ДСМ), описанном в работе [11]. Результаты расчетов задачи об обтекании выпуклости на плоской пластине сравнивались с имеющимися экспериментальными данными [10].

Алгоритм генерации турбулентного поля скорости на основе рандомизированного спектрального метода

Опишем кратко стохастический метод генерации, который будет использоваться в дальнейшем. Более подробное описание метода можно найти в работах [9].

Как и в случае детерминированного спектрального метода [11], турбулентное поле строится в два этапа. На первом этапе строится однородное изотропное поле, а на втором выполняется его адаптация к анизотропному случаю.

Однородное изотропное поле строится в виде суммы гармоник Фурье следующего вида

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^N \sqrt{g^n(k^n)} [\boldsymbol{\sigma}^n \cos(k_n(\mathbf{d}^n \cdot \mathbf{x}) + \varphi^n)]. \quad (1)$$

В отличие от детерминированного спектрального метода, параметры гармоник, включая волновые числа, являются стохастическими. Выбор параметров подробно описан в работе [9]. Полученное однородное изотропное поле скоростей обладает бездивергентностью, помимо этого обеспечивается стремление к энергетическому спектру $E(k)$ при $N \rightarrow \infty$.

Адаптация к анизотропному случаю в данной работе выполнялась путем масштабирования однородного изотропного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, полученного по формуле (1). Искомое синтетическое поле пульсационных скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ строится в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}),$$

где масштабирующий оператор $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ определяется локальным значением тензора рейнольдсовых напряжений $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ из его разложения Холецкого $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Заметим, что такой способ адаптации к анизотропному случаю, хотя и является широко распространенным [5,11,12], тем не менее не гарантирует сохранения бездивергентности поля. Предложенный в работе [13] метод, позволяющий сохранить свойство бездивергентности для анизотропных полей, не рассматривался, поскольку появился уже после проведения вошедших в данную работу расчетов.

Зависимость турбулентной скорости от времени в данной работе задавалась методом «волновой конвекции» аналогично работе [11].

Расчет канонических сдвиговых турбулентных течений

Валидация описанного выше генератора синтетической турбулентности проводилась на примере расчетов пристеночных турбулентных течений. Описанный выше алгоритм генерации турбулентных полей скорости использовался для создания турбулентного контента на входе в расчетную область. Во всех рассмотренных для валидации задачах в качестве начальных условий ($t=0$) используется газодинамическое поле, посчитанное на основе метода RANS с моделью замыкания Спаларта-Аллмараса [14], турбулентные пульсации при $t=0$ отсутствовали, а численное моделирование проводилось с использованием вычислительного алгоритма, реализованного в программном комплексе NOISEtte [15,16]. Эволюция течения моделировалась на основе уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа с использованием гибридного RANS-LES подхода IDDES [17] для моделирования турбулентности. Расчеты проводились с помощью центрально-разностной схемы EBR4 повышенной точности [18] для аппроксимации конвективных потоков. Для генератора синтетической турбулентности на входной границе брались компоненты тензора рейнольдсовых напряжений \mathbf{R} , полученные из расчета методом RANS с моделью замыкания Menter SST [19].

Первым было рассмотрено **развитое турбулентное течение в плоском канале**. Представленные ниже результаты получены при числе Рейнольдса, определяемом по полуширине канала $H/2$ и динамической скорости u_τ на стенке, $Re_\tau = 395$, что соответствует одному из вариантов эталонных данных [20].

Постановка задачи

Расчетная область представляет собой параллелепипед

$$\{0 < x < 5H\} \times \{0 < y < H\} \times \{-0.75H < z < 0.75H\}.$$

Фоновое течение направлено вдоль оси x ; стенки канала расположены в плоскостях $y=0$ и $y=H$.

Ставятся следующие граничные условия. На стенках канала

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad y = 0, H.$$

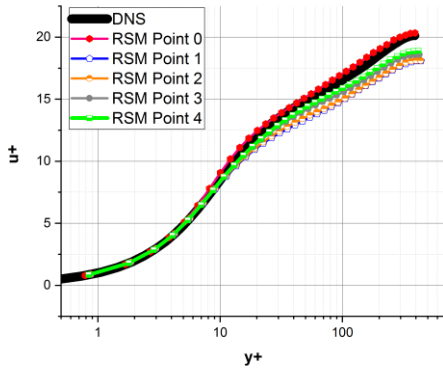
На боковых границах $z = \pm 0.75H$ задаются периодические условия. На входной границе поддерживаются значения всех газодинамических параметров и турбулентной вязкости, полученные из расчета RANS. К вектору скорости добавляются также сгенерированные турбулентные пульсации:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}(0, y, z) + \mathbf{u}'(0, y, z, t), \quad p = \bar{p}(0, y, z), \quad \rho = \bar{\rho}(0, y, z), \quad x = 0.$$

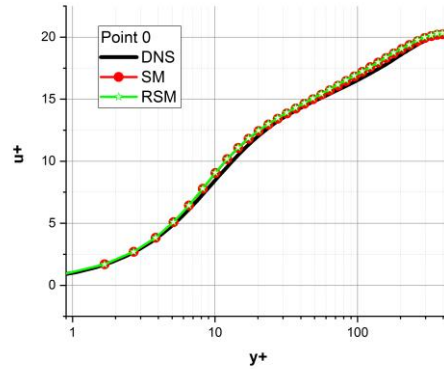
Условия на выходной границе выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad p = p_1(y, z), \quad x = 5H.$$

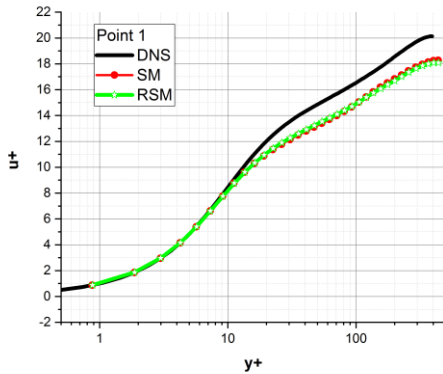
(a)



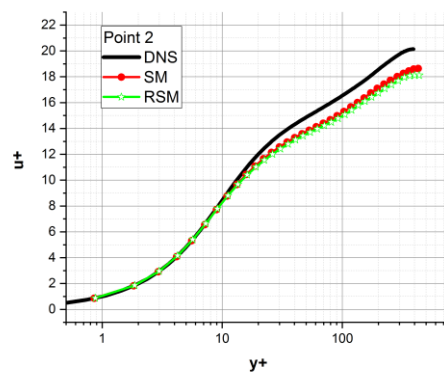
(б)



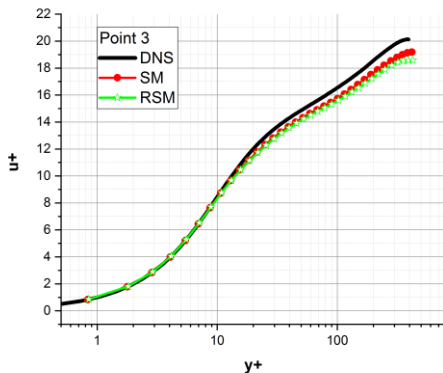
(в)



(г)



(д)



(e)

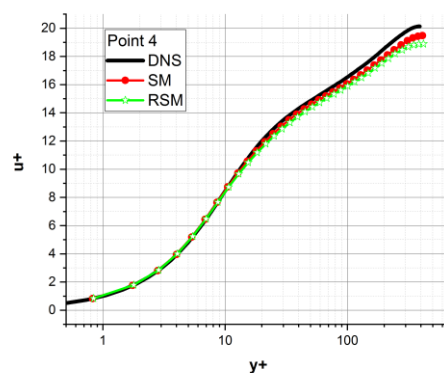


Рис. 1. Зависимости скорости u^+ от y^+ в пяти сечениях канала

Величина p_1 подбирается так, чтобы перепад давления $p_1(y, z) - \bar{p}(0, y, z)$ поддерживал требуемую скорость потока вдоль канала.

Вычислительная сетка была построена с учетом требования LES о том, чтобы при заданном числе Рейнольдса разрешались пристеночные турбулентные структуры. Сетка равномерна по x и z : $\Delta x = H/20$; $\Delta z = H/40$. Сетка по y сгущается по направлениям к обеим границам по закону геометрической прогрессии с коэффициентом 1.1. Для пристеночной ячейки $\Delta y = 10^{-3}H$, что

удовлетворяет условию $\Delta y^+ < 1$; максимальный размер $\Delta y = H/40$. Число узлов сетки по направлениям x , y и z составило $101 \times 71 \times 61$.

Заметим, что ранее частично данные результаты приводились авторами в работе [9], тем не менее для полноты изложения представляется логичным привести их в данной работе.

Накопление статистики для построения профилей скорости и рейнольдсовых напряжений проводится в течение времени $20H/U_b$ (где U_b – среднерасходная скорость) после выхода расчета на статистически установившийся режим.

На рисунке 1(а) приведены полученные зависимости безразмерной скорости u^+ от переменной пограничного слоя y^+ в пяти точках (на расстоянии 0 , H , $2H$, $3H$ и $4H$ от входной границы), соответствующих имевшимся данным DNS расчета. Видно, что с удалением от границы скорость стремится к значениям, предсказываемым DNS расчетом. Для сравнения на рисунках 1(б–е) приведены результаты моделирования с использованием предложенного генератора и детерминированного генератора из [11]. Видно, что во всех точках результаты расчетов практически не отличаются от результатов с использованием детерминированного генератора.

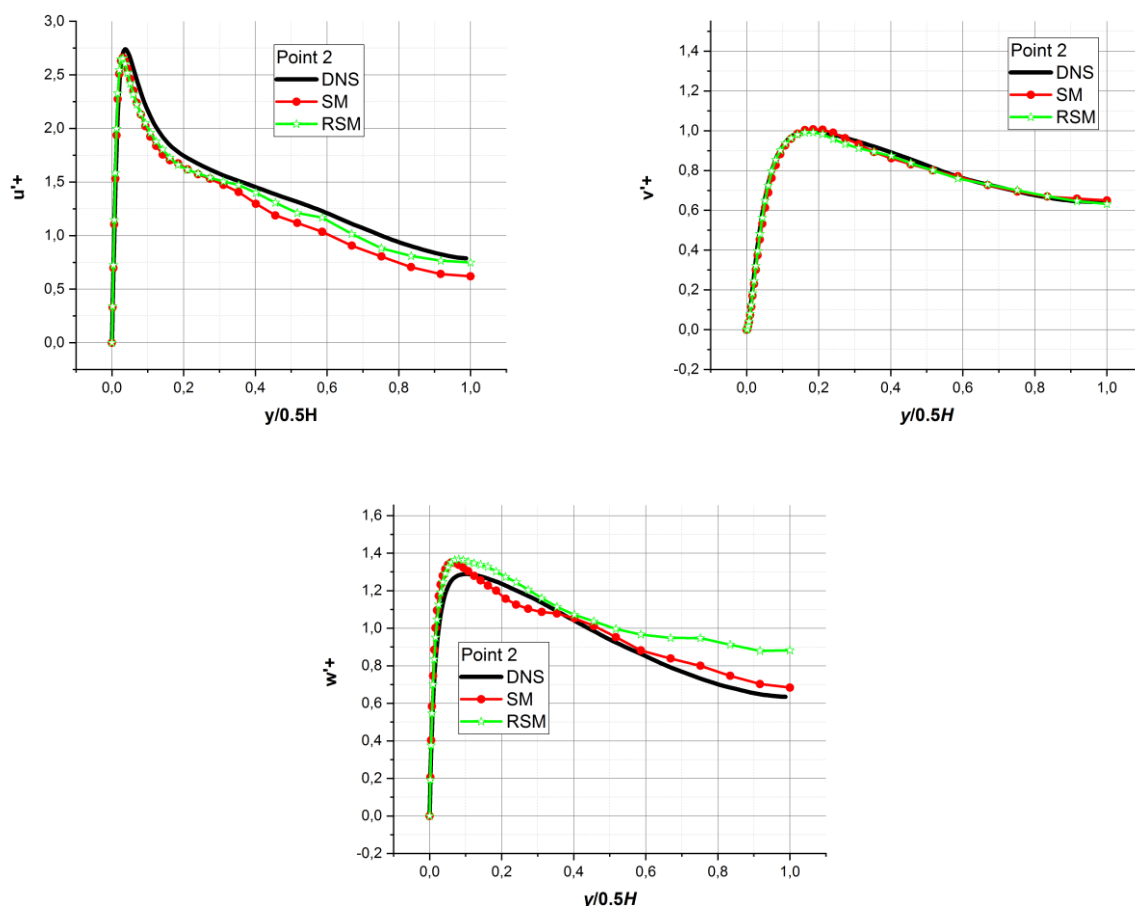


Рис. 2. Зависимости компонент тензора рейнольдсовых напряжений u'^+ , v'^+ и w'^+ от y^+ в сечении $x=4H$

На рисунке 2 приведены профили u'^+ , v'^+ и w'^+ . Видно, что результаты моделирования на основе рандомизированного метода чуть лучше соответствуют эталонным значениям для u'^+ , для v'^+ результаты очень близки друг к другу, а w'^+ чуть лучше предсказывается расчетом на основе детерминированного генератора.

Второй задачей для валидации было выбрано течение в пограничном слое на плоской пластине.

Задача о течении в пограничном слое на плоской пластине ставилась так, чтобы проведенные вспомогательные RANS расчеты в дальнейшем можно было использовать при моделировании задачи об обтекании выпуклости на плоской пластине. Прежде всего проводился RANS расчет течения в пограничном слое на плоской пластине с числом Рейнольдса, построенным по хорде выпуклости c , равным $Re_c = 9.36 \cdot 10^5$. Результатом расчета являлся профиль всех газодинамических и турбулентных переменных, в котором число Рейнольдса, посчитанное по толщине потери импульса, равнялось $Re_\theta = 7200$. Это соответствует экспериментальному значению для задачи об обтекании выпуклости на плоской пластине [10]. Полученный профиль продольной компоненты скорости и экспериментальные данные приведены на рисунке 3. Толщина пограничного слоя на входе составляла примерно $\delta_{0,99} = 0.1c$.

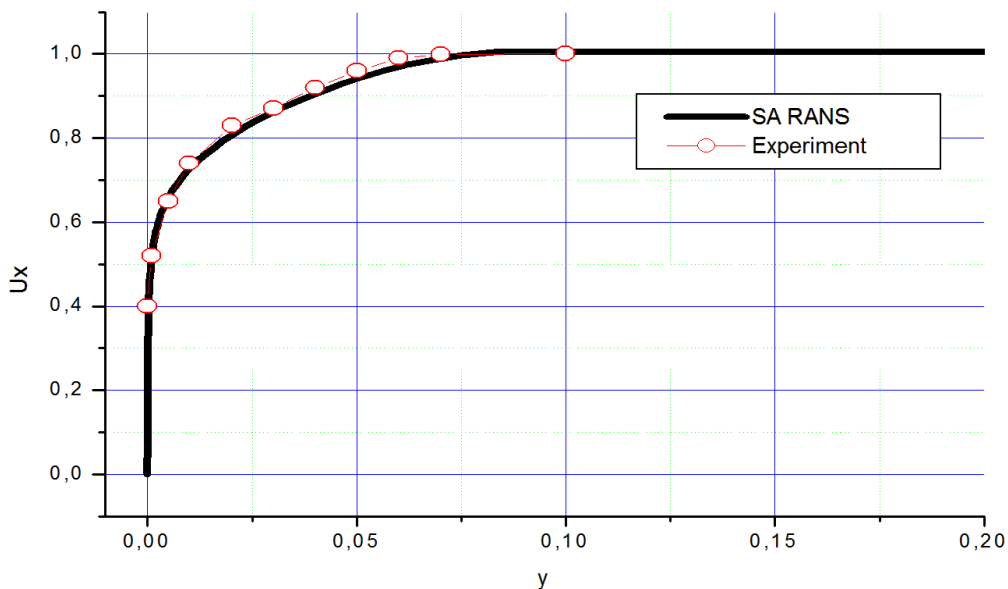


Рис. 3. Расчетный профиль продольной компоненты скорости и экспериментальные данные

Аналогичный профиль брался в качестве входных условий в работе [5] в валидационном расчете обтекания выпуклости с использованием детерминированного генератора. В настоящей работе длина расчетной области перед выпуклостью была сокращена в два раза. Поэтому в качестве входных

условий для скорости использовался профиль из RANS расчета, в точке, смещенной вниз по потоку на величину, равную половине длины области перед выпуклостью.

Расчетная область представляет собой параллелепипед

$$\{-0,991c < x < 0\} \times \{0 < y < c\} \times \{-0,1c < z < 0,1c\},$$

нижняя сторона которого проходит вдоль пластины.

Граничные условия были заданы следующим образом: на пластине ставились условия прилипания и адиабатической стенки. На верхней границе условия скольжения. На выходной границе задавалось постоянное давление и условия экстраполяции для остальных переменных. На входной границе задавались условия первого рода для скорости и условие экстраполяции для давления. В направлении z было задано условие периодичности.

Как и в случае с каналом, вычислительная сетка была построена с учетом требования LES о том, чтобы при заданном числе Рейнольдса разрешались пристеночные турбулентные структуры. Сетка равномерна по x и z $\Delta x = 1 \cdot 10^{-2}c$, $\Delta z = 4 \cdot 10^{-3}c$. Сетка по y сгущалась по направлению к границе по закону геометрической прогрессии и состояла из двух областей. В первой пристеночной области размер минимальной пристеночной ячейки составлял $\Delta y = 1,6 \cdot 10^{-5}c$, что удовлетворяет условию $\Delta y^+ < 1$, а максимальной, соответствующей $y = 0,16c$, составлял $\Delta y = 5 \cdot 10^{-3}c$. Во второй области максимальный размер ячейки не превышал $\Delta y = 2 \cdot 10^{-2}c$. Число узлов сетки по направлениям x , y и z составило $101 \times 131 \times 51$.

Для минимизации негативного эффекта выходной границы справа к расчетной области была добавлена зона, в которой был реализован «разбег» сетки по x в соответствии с законом геометрической прогрессии с коэффициентом $q = 1,15$. Шаги по y и z брались аналогично исходной области. Число узлов сетки в добавленной области по направлениям x , y и z составило $33 \times 131 \times 51$.

На рисунке 4 приведены получившиеся таким образом полная сетка и пристеночный фрагмент сетки без добавленной зоны с разбегом.

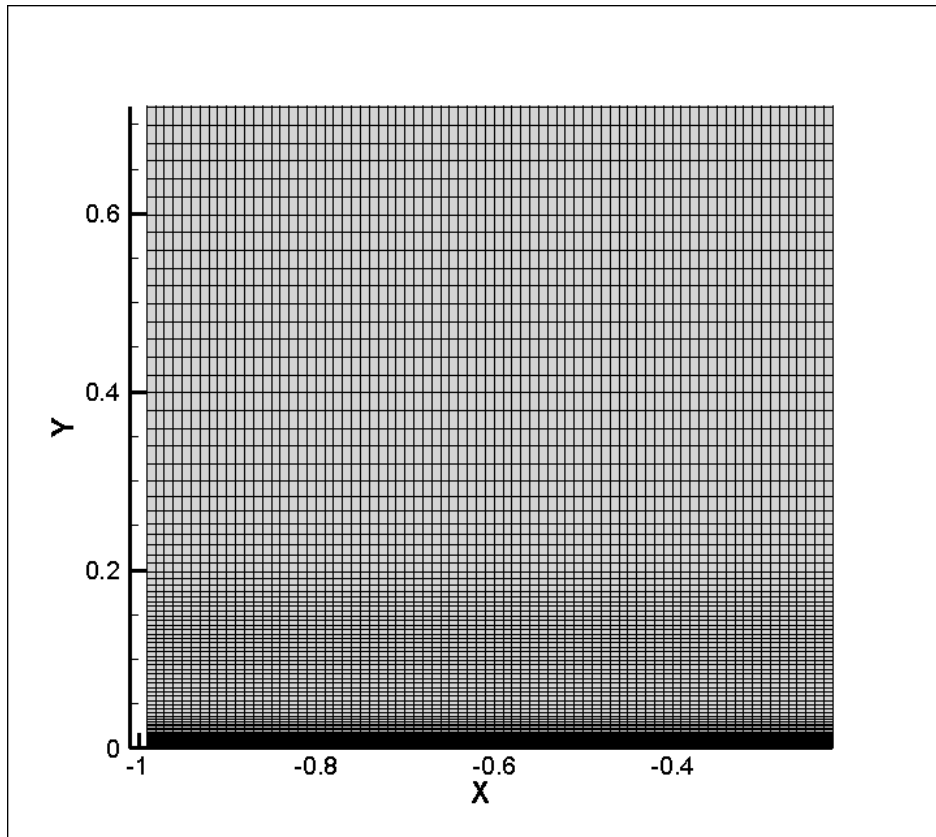


Рис. 4. Сетка в плоскости x - y для расчета течения в пограничном слое на плоской пластине

Для сравнения было выбрано распределение коэффициента трения вдоль пластины. Известно, что для данной задачи коэффициент трения хорошо предсказывается RANS. Поэтому в качестве эталонного для сравнения было выбрано распределение коэффициента трения, полученное в результате RANS расчета с моделью замыкания Спаларта-Аллмараса [14].

На рисунке 5 приведено сравнение зависимости коэффициента трения от продольной координаты для RANS и двух IDDES расчетов, выполненных с использованием турбулентных полей, сгенерированных на основе детерминированного генератора (SM) из [11] и генератора, построенного на основе рандомизированного спектрального метода (RSM).

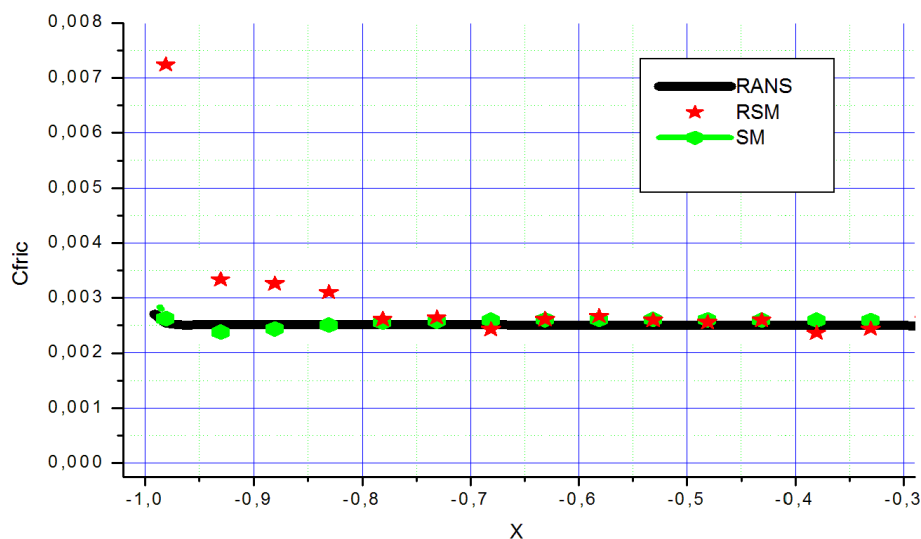


Рис. 5. Зависимость коэффициента трения от продольной координаты

Видно, что значение коэффициента трения восстанавливается к ожидаемому в точке, отстоящей от входной границы на расстояние, примерно в два раза превосходящее ширину пограничного слоя. Это столько же, сколько обычно требуется в расчетах с детерминированным генератором. В то же время в области до этой точки коэффициент трения отклоняется от требуемого значительно больше, чем в расчете с использованием детерминированного генератора. Данный эффект, по всей видимости, объясняется стохастическим характером генератора, поскольку рандомизированный генератор обеспечивает согласованность с задаваемыми характеристиками только в среднем.

Расчет обтекания выпуклости на плоской пластине

Задача обтекания выпуклости на плоской пластине ставилась аналогично условиям эксперимента [10] и близко к постановке, использованной в работе [5] при валидации детерминированного генератора.

Схема обтекания выпуклости и характерные размеры приведены на рисунке 6.

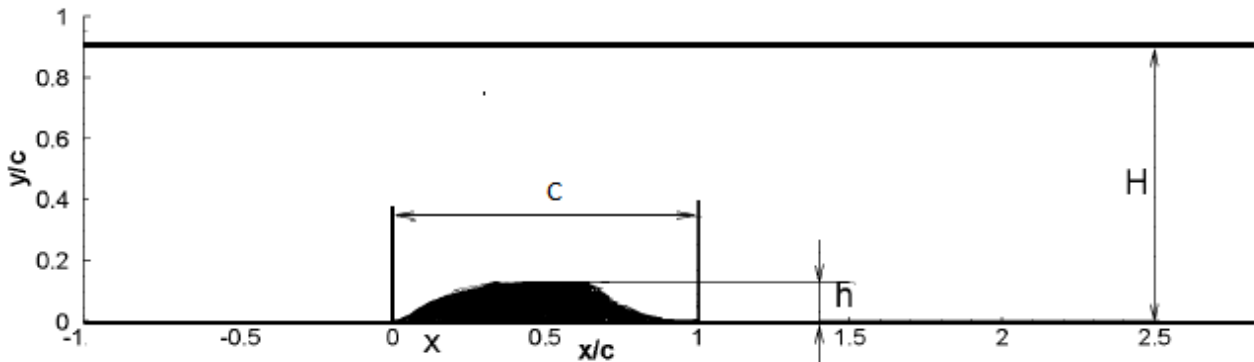


Рис. 6. Обтекание выпуклости на плоской пластине

В качестве линейного масштаба задачи была выбрана длина хорды выпуклости c . Высота выпуклости составляет $h/c=0.128$, высота расчетной области равна $H/c = 0.909$. Число Рейнольдса, построенное по длине хорды и максимальной скорости на входе, равно $Re_c = 936000$.

Расстояние от входной границы до выпуклости было выбрано в два раза меньше, чем в работе [5] при валидации детерминированного генератора. В настоящей работе входная граница располагалась в точке $x/c=-1$. Поперечный размер расчетной области составлял $L_z/c=0.4$.

Верхняя граница расчетной области задавалась в виде твердой стенки, имеющей понижение над выпуклостью. На ней ставились условия скольжения. В эксперименте этой стенки нет, использование верхней стенки, имеющей понижение над выпуклостью, позволяет учесть эффект загромождения потока, имеющий место в эксперименте, без необходимости расчета трехмерного течения с боковыми стенками [5]. На нижней границе области ставились условия прилипания и адиабатической стенки. На выходной границе задавалось постоянное давление и условия экстраполяции для скорости. На входной границе задавались условия первого рода для скорости и условие экстраполяции для давления. В направлении z было задано условие периодичности. Получение профилей скорости для входной границы было описано ранее в разделе, посвященном задаче о течении на плоской пластине.

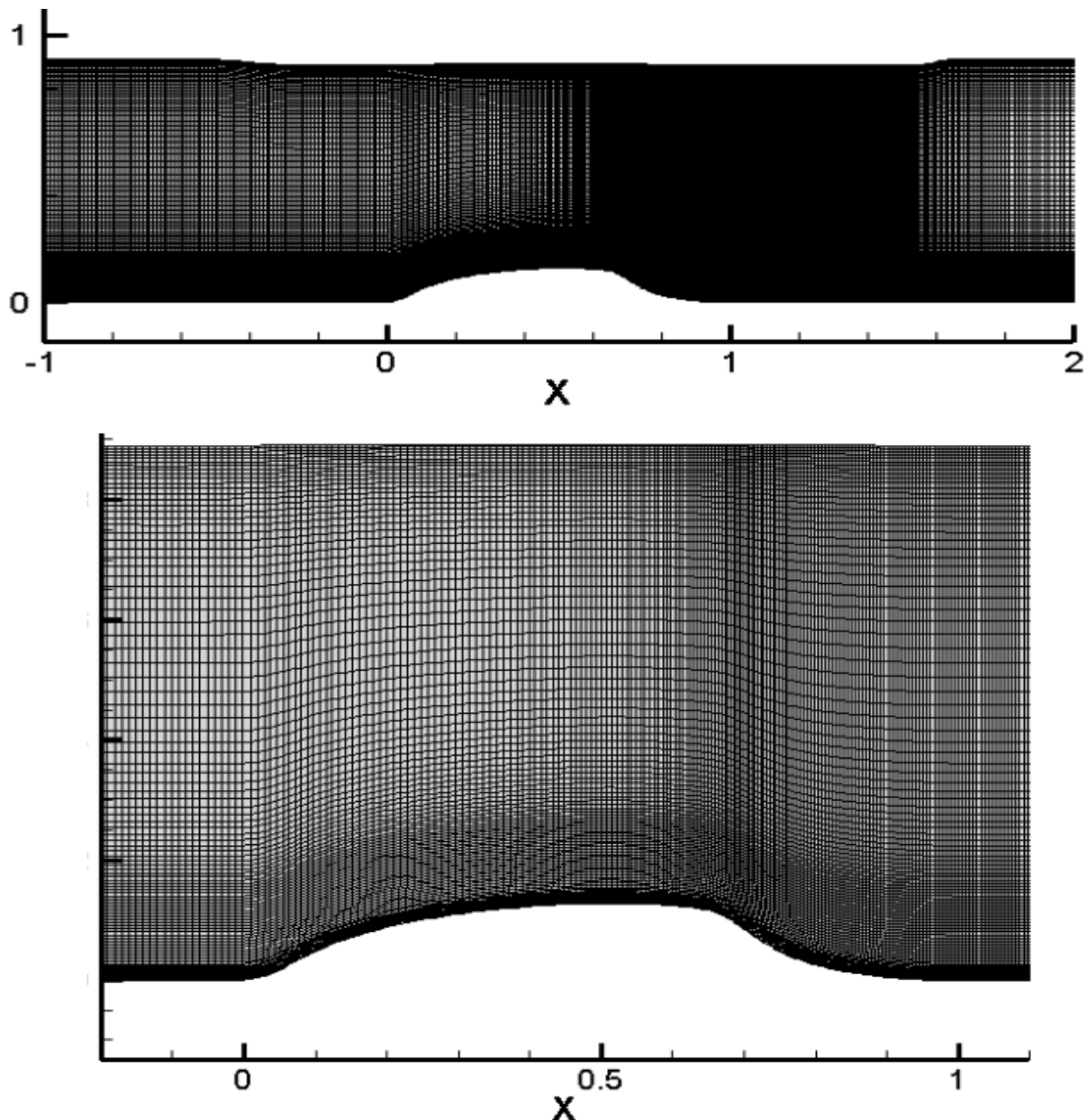


Рис. 7. Вычислительная сетка в плоскости x - y для расчета задачи об обтекании выпуклости на плоской пластине.

Расчетная сетка представлена на рисунке 7. В плоскости $x - y$ сетка имела размер 471×127 . При этом в отрывной зоне, формирующейся на нижней стенке вниз по потоку от выпуклости, величина шага сетки в направлениях x составляет $\Delta x/c = 5 \cdot 10^{-3}$. Шаг сетки в направлении y в первой пристеночной ячейке был равен $\Delta y_{\min}/c = 1.5 \cdot 10^{-5}$ ($\Delta y^+ \leq 0.7$), а в начальной области оторвавшегося от выпуклости пограничного слоя изменялся в диапазоне $\Delta y/c \approx 3 \div 5 \cdot 10^{-3}$. Для расчета вихререзающими методами использовалась трехмерная сетка, имеющая 101 узел в направлении z с шагом $\Delta z/c = 4 \cdot 10^{-3}$, при этом ширина расчетной области в этом направлении составляла $Lz/c = 0.4$. Считается [5], что такой ширины расчетной области достаточно для адекватного воспроизведения крупномасштабных вихревых структур в отрывной зоне.

Для валидации проводилось несколько расчетов. Прежде всего, был выполнен RANS расчет с моделью замыкания Спаларта-Аллмараса [14]. На рисунках 8-11 представлены полученные в результате этого расчета распределения турбулентной вязкости, плотности и продольной скорости в центральном сечении, а также нарисованы линии тока вблизи выпуклости. Видно, что за выпуклостью образуется область рециркуляции.

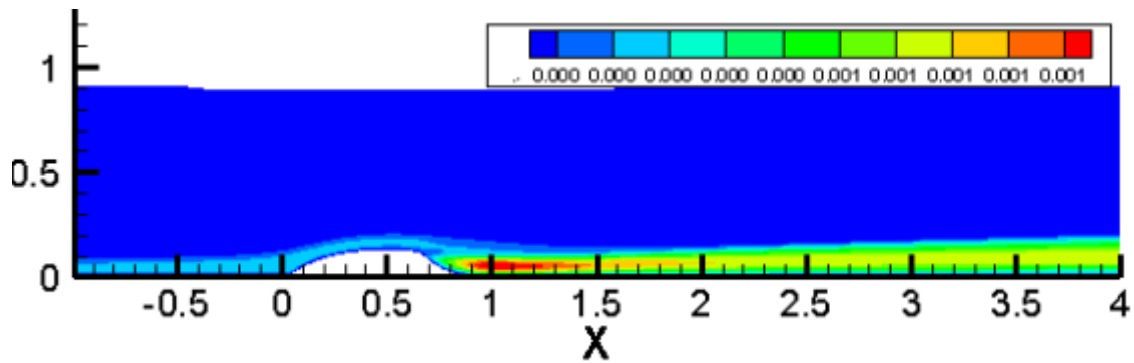


Рис. 8. Распределение турбулентной вязкости

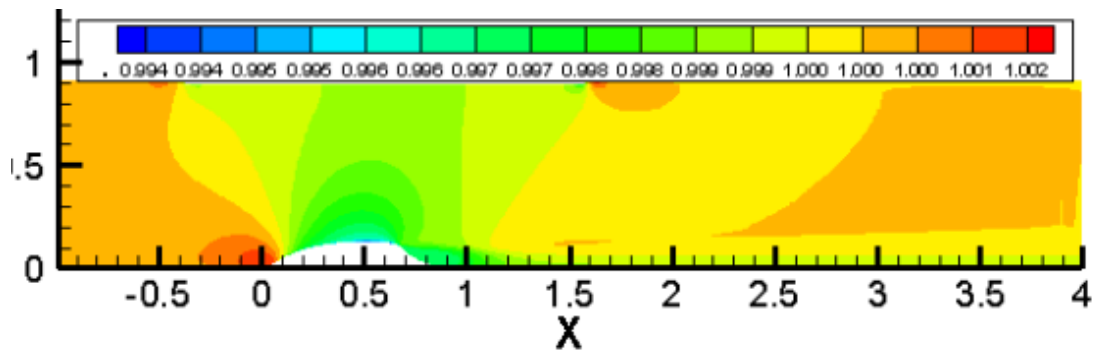


Рис. 9. Распределение плотности

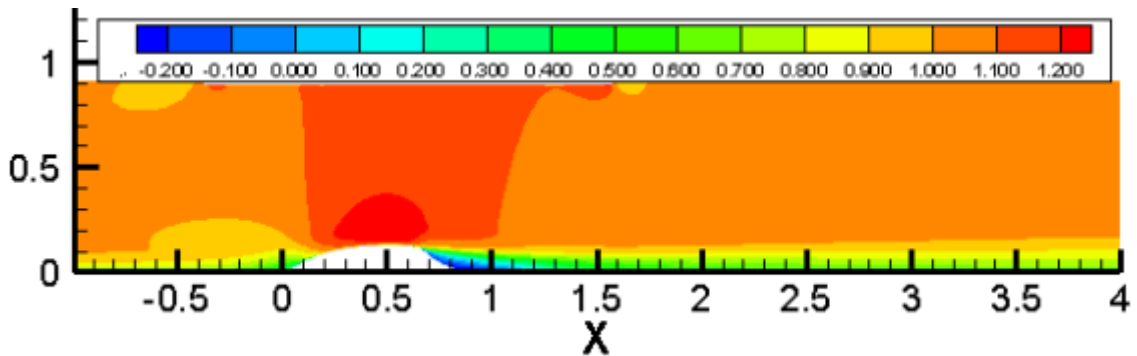


Рис. 10. Распределение продольной компоненты скорости

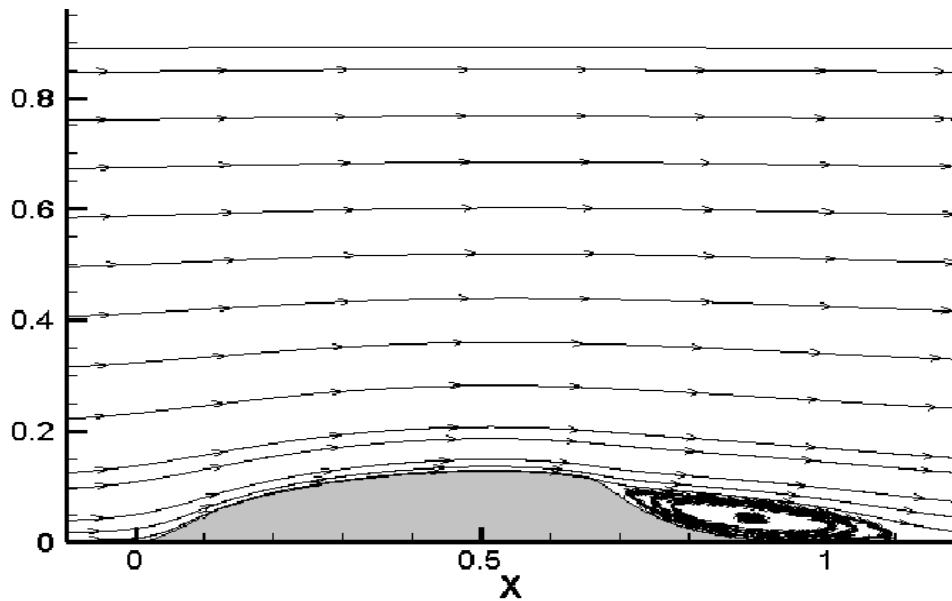


Рис. 11. Линии тока вблизи выпуклости

Известно [5], что RANS расчеты хорошо воспроизводят параметры течения вплоть до точки отрыва пограничного слоя, но при этом приводят к большой ошибке для области рециркуляции, а также вниз по потоку. В то же время IDDES расчеты, использующие генератор синтетической турбулентности для формирования турбулентных вихревых структур вверх по потоку от выпуклости, позволяют воспроизвести правдоподобное турбулентное течение в пограничном слое. В результате структура течения за выпуклостью воспроизводится гораздо точнее.

Аналогично работе [5] для валидации генератора будем сравнивать расчетные значения коэффициента трения в области рециркуляции и далее по потоку.

На рисунке 12 приведены графики зависимости коэффициента трения на стенке от координаты, полученные в RANS расчете и двух вихреразрешающих расчетах в рамках подхода IDDES со стохастическим и детерминированным генераторами, вместе со сравнением с соответствующими экспериментальными данными. Очевидно, что распределения коэффициентов трения, полученные в результате моделирования с использованием генераторов турбулентности, близки друг к другу и гораздо лучше согласуются с экспериментальными данными, нежели соответствующие результаты, полученные с помощью RANS.

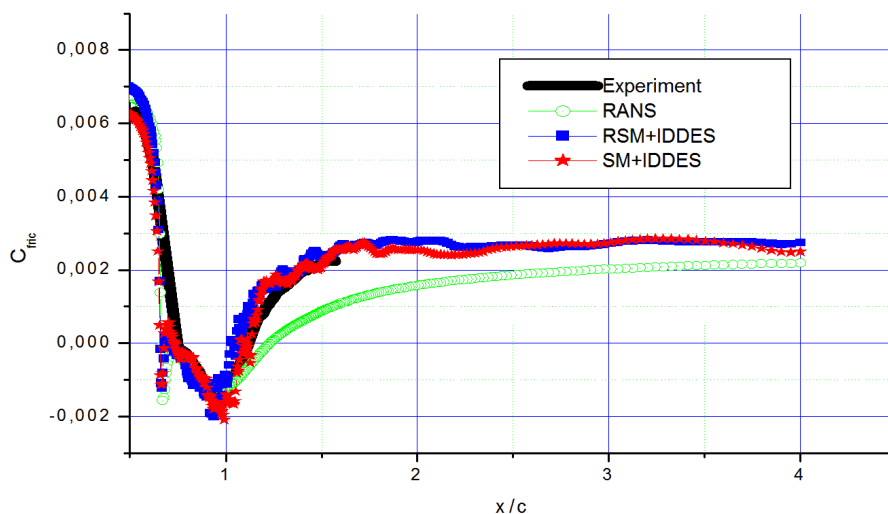


Рис. 12. Зависимости коэффициента трения на стенке от координаты

Заключение

В работе на примере пристеночных турбулентных течений проведена валидация алгоритма генерации турбулентных полей скорости, основанного на рандомизированном спектральном методе.

Показано, что для данного класса задач в целом использование стохастического генератора позволяет получить результаты сопоставимого качества в сравнении с детерминированным спектральным генератором.

В дальнейшем методика будет валидирована на задачах со сложной геометрией, в которых можно ожидать преимуществ данного метода генерации в сравнении с детерминированными спектральными методами.

Список литературы

1. Zhen Shen, Xin Zhang, Direct anisotropic filter method of generating synthetic turbulence applied to turbulence-airfoil interaction noise prediction // *Journal of Sound and Vibration*, 2019, Volume 458, pp. 544-564.
2. Kraichnan R. Diffusion by a random velocity field // *The Physics of Fluids* 13(1), (1970).
3. Smirnov A., Shi S., Celik I. Random Flow Generation Technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // *J. Fluids Eng* 123(2), 359-371 (Feb 16, 2001).
4. Адамьян Д.Ю., Стрелец М.Х., Травин А.К. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS–LES подходов к расчету турбулентных течений // *Мат. моделирование*, 2011, т. 23, № 7, С. 3–19.
5. Адамьян Д.Ю. Метод генерации синтетической турбулентности на входных границах для расчета турбулентных течений в рамках вихреразрешающих подходов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Санкт-Петербург, 2011.
6. Грицкевич М.С., Расчет турбулентных пристенных течений с использованием зонного RANS-LES подхода с объемным источником пульсаций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Санкт-Петербург, 2012.
7. Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П. Генерация трехмерных однородных изотропных турбулентных полей скорости на основе рандомизированного спектрального метода // *Матем. моделирование*, **31**:10 (2019), 49–62.
8. Kurbanmuradov O., Sabelfeld K. Stochastic Spectral and Fourier-Wavelet Methods for Vector Gaussian Random Fields // *Monte Carlo Methods Appl.*, 12:5–6 (2006), 395–445.
9. Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П., Колюхин Д.Р. Генерация неоднородных турбулентных полей скорости на основе модифицированного рандомизированного спектрального метода // *Прикладная математика и информатика* №63, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020, с.22–35. ISBN 978-5-317-06455-6. Англ. перевод: Aleksandrov A.V., Dorodnitsyn L.V., Duben' A.P., Kolyukhin D.R. Generation of nonhomogeneous isotropic turbulent velocity fields by Modified Randomized Spectral Method // *Comput. Math. Model.*, 2020, v.31, No.3, pp.308–319.
10. Greenblatt D., Paschal K., Yao C., Harris J. A Separation Control CFD Validation Test Case Part 2. Zero Efflux Oscillatory Blowing // *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Vol. 485. Reno, Nevada, USA:2005
11. Michael L. Shur, Philippe R. Spalart, Michael K. Strelets, Andrey K. Travin, Synthetic Turbulence Generators for RANS-LES Interfaces in Zonal Simulations of Aerodynamic and Aeroacoustic Problems // *Flow Turbulence Combust*, 2014, DOI 10.1007/s10494-014-9534-8

12. Saad T., Cline D., Stoll R., Sutherland J.C. Scalable tools for generating synthetic isotropic turbulence with arbitrary spectra // *AIAA J.*, 2016, v.55, No.18, p.327–331.
13. Alexandrov A.V., Dorodnicyn L.W., Duben A.P., and Kolyukhin D.R., Generation of a random anisotropic incompressible turbulent velocity field in accordance with the calculated flow statistics. *Journal of Physics: Conference Series* ISSN: 1742-6596 (Web), 1742-6588 (Print)
14. Spalart P.R., Allmaras S.R., A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // *AIAA Paper* 92-0439. 1992.
15. Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.В., Козубская Т.К. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // *Выч. мет. программирование*, 2012, т.13, № 3, с.110–125.
16. Abalakin I.V., Bakhvalov P.A., Gorobets A.V., Duben A.P., Kozubskaya T.K. Parallel research code NOISEtte for large-scale CFD and CAA simulations // *Vychisl. Metody Programm.*, 2012, v.13, No.3, p.110–125
17. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.Kh., Travin A.K., A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities // *Int. J. Heat Fluid Flow*, 2008, v.29, No.6, p.1638–1649.
18. Bakhvalov P.A., Abalakin I.V., Kozubskaya T.K., Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 81(6) (2016) 331–356.
19. Menter F.R., Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // *AIAA Journal*, vol. 32, No. 8, 1994, p. 1598-1605., Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // *AIAA Journal*, vol. 32, No. 8, 1994, p. 1598-1605.
20. Moser R., Kim J., Mansour N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re\tau = 590$ // *Physics of Fluids*, 1999, v.11, No.4, p. 943.