мулой (4), можно определить отношение гиперполяризуемостей. В нашем случае было получено $\gamma^{R}_{R6G}/\gamma^{NR}_{EtOH} \sim 10^6$.

Авторы благодарят А.М. Чекалюка за полезные обсуждения результатов работы.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
28 XII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахманов С.А., Коротеев Н.И.* – УФН, 1977, т. 123, с. 405. 2. *Чекалюк А.М., Фадеев В.В.* – ДАН, 1981, т. 261, № 3, с. 604. 3. *Пфайффер М., Лау А., Вернке В.* – Квант.электр., 1977, т. 4, с. 2559. 4. *Prabir K.Dutta, Spiro T.G.* – J.Chem.Phys., 1978, vol. 69, p. 3119. 5. *Druet S.A.J., Attal B., Gustafson T.K., Taran J.P.* – Phys.Rev.A, 1978, vol. 18, p. 1529. 6. *Carreira L.A., Maguire T.C., Malloy T.G.* – J.Chem.Phys., 1978, vol. 66, p. 2621. 7. *Harvey A.B.* – Anal.Chem., 1978, vol. 50, 9, p. 905.

УДК 533.951 **ФИЗИКА**

А.Г. БОЕВ, академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ СИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ОТКРЫТОМ ЦИЛИНДРЕ С ПЛАЗМОЙ

Решена нелинейная задача дифракции сильной электромагнитной волны на цилиндре с узкой щелью и плазмой, свойства которой определяются полем волны. Структура полей и условия резонансного возбуждения цилиндра найдены методом задачи Римана–Гильберта [1].

1. Пусть имеется идеально проводящий круговой цилиндр (с бесконечно тонкими стенками) радиуса a со щелью угловой ширины 2θ вдоль образующей, содержащий плазменный стержень радиуса b. На цилиндр со стороны щели нормально падает сильная плоская электромагнитная волна с вектором электрического поля $\mathbf{E}_0$, параллельным щели (рис. 1*а*). Поведение электрического поля в плазме описывается нелинейным волновым уравнением

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + \epsilon(|E|)E = 0, \quad \rho = kr,$$

где комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы ϵ [2] зависит от амплитуды поля через концентрацию и температуру электронов. Функция $E(\rho, \varphi)$ периодична по φ, и поэтому задача отыскания ее может быть сформулирована как задача нахождения ряда Фурье (здесь и далее поля нормированы на амплитуду падающей волны E_0):

$$(2)\qquad E(\rho, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n(\rho)\exp(in\varphi).$$

Подстановка (2) в (1) и интегрирование по углу сводит уравнение (1) в частных производных к бесконечной системе зацепляющихся обыкновенных уравнений

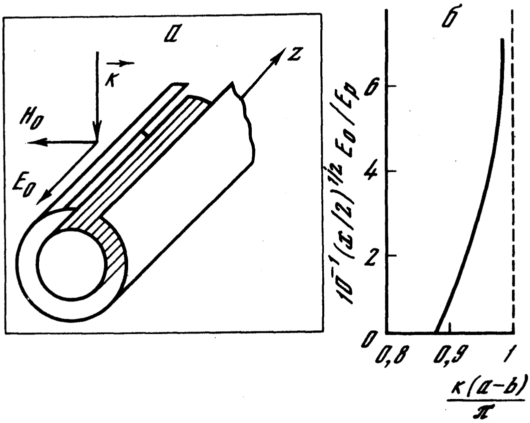

Рис. 1. Схема задачи (*а*) и зависимость амплитуды падающей волны от волнового числа в резонансе, $|\epsilon_0| = 7$, $ka = 2$ (*б*)

для $u_n(\rho)$. Такое представление решения полезно в случаях, когда цепочка уравнений оказывается слабо связанной и может быть решена методом возмущений. К ним относятся:

а) слабонелинейные задачи, когда амплитуда падающей волны такова, что диэлектрическая проницаемость плазмы мало отличается от значения ϵ_0 в отсутствие поля;

б) задачи, в которых условия возбуждения поля в плазме таковы, что угловая структура его близка к функции $u_m \exp(im\varphi)$; при этом поле основной гармоники u_m удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\frac{d^2u_m}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_m}{d\rho} + \left[\epsilon(|u_m|) - \frac{m^2}{\rho^2}\right] u_m = 0, \tag{3}$$

поля остальных гармоник — системе связанных линейных уравнений, распадающейся при любой зависимости $\epsilon(|u|)$, если поле в системе близко к осесимметричному ($m = 0$), либо для плавной зависимости $\epsilon(|u|)$, когда $\partial\epsilon/\partial|u|$ мала в рассматриваемом диапазоне амплитуд;

в) задачи с тонким ($kb\sqrt{|\epsilon|} \ll 1$) плазменным стержнем; поле в нем близко к осесимметричному.

Две последние задачи существенно нелинейные.

Возможность представления поля в виде ряда позволяет решать определенный класс нелинейных задач дифракции по схеме линейных. Для простоты в дальнейшем ϵ будем считать вещественным и зависящим от поля только через концентрацию электронов.

2. Определение структуры дифрагированного поля методом задачи Римана—Гильберта связано с анализом системы парных сумматорных функциональных уравнений

$$\begin{gathered}
\sum_{n\neq 0} X_n \exp(in\varphi) = 0, \qquad \theta < |\varphi| \leqslant \pi; \\
\sum_{n\neq 0} X_n \frac{|n|}{n} \exp(in\varphi) = \frac{i}{\pi} X_0 [J_0(ka)H_0(ka)\gamma_0]^{-1} + \\
+ \sum_{n\neq 0} X_n \frac{|n|}{n} \delta_n \exp(in\varphi) - \frac{i}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{i^n \exp(in\varphi)}{H_n(ka)}, \qquad |\varphi| < \theta, \\
\sum_{n\neq 0} (-1)^n X_n/n = -X_0, \qquad \varphi = \pi,
\end{gathered} \tag{4}$$

$$\delta_n = 1 - \frac{\gamma_n^{-1}}{i\pi|n|J_n(ka)H_n(ka)}, \qquad \gamma_n = 1 - \frac{H_n(ka)[\zeta_n J_n'(kb) - J_n(kb)]}{J_n(ka)[\zeta_n H_n'(kb) - H_n(kb)]},$$

относительно величин X_n, через которые выражаются коэффициенты разложения полей вне плазмы и значения гармоник поля в плазме на границе $v_n \equiv u_n(kb)$. Штрихом обозначено дифференцирование по ρ, J_n и H_n — функции Бесселя и Ханкеля (первая). Свойства плазмы в (4) отражены через величины γ_n поверхностными импедансами $\zeta_n = v_n/v_n'$. В связи с этим система (4) должна решаться одновременно с уравнениями, определяющими поля гармоник в плазме. Для $|n| \gg ka$ $\gamma_n \to 1$ при $|n| \to \infty$ $\forall \zeta_n$, если $b/a < 1$. В этих условиях $\delta_n \sim o(|n|^{-2})$ и система (4) имеет стандартный вид для применения метода задачи Римана–Гильберта [1]. В итоге вместо (4) приходим к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений

$$X_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} X_n + B_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

для решения которой в случае узкой щели может быть использован метод последовательных приближений. Матричные элементы в (5) в этом случае имеют вид $(m, n \neq 0)$

$$A_{00} \simeq \frac{i\theta^2}{4\pi} [J_0(ka) H_0(ka) \gamma_0]^{-1}, \qquad A_{0n} = -\frac{\theta^2}{2} \delta_n, \qquad B_m = c_m \theta^2,$$

$$A_{m0} \simeq \frac{im\theta^2}{8\pi} [J_0(ka) H_0(ka) \gamma_0]^{-1}, \qquad A_{mn} \simeq \theta^2 \frac{\delta_n}{4} (m+n),$$

где c_m приведены в [1].

3. При построении решения системы (5) следует учитывать возможность резонансов, связанных с условием обращения в нуль одной из величин $J_n(ka) \times \gamma_n(a, b)$, входящих в знаменатели матричных элементов A_{mn}. Учитывая рассуждения п. 1, будем рассматривать лишь резонанс при $n = 0$. Условие резонанса приводит к определенному ограничению на импеданс плазмы ζ_0. Так как ζ_0 зависит от амплитуды падающей волны, то рассматриваемая электродинамическая структура является избирательной не только по частоте, но и по амплитуде падающей волны. Это связано с тем, что волна сама определяет свойства плазмы и каждому значению ее амплитуды соответствует свой плазменный стержень. После решения уравнения, определяющего поле в плазме, и нахождения ζ_0 условие резонанса превращается в уравнение, связывающее частоты резонансов, геометрические параметры системы и амплитуду падающей волны. Решение системы (5), проведенное аналогично [1], показывает, что поле резонансной осесимметричной гармоники в цилиндре не зависит от ширины щели и существенно превышает поля всех остальных. Вне резонанса поле в цилиндре является многомодовым, но малым в меру узости щели. Выбором ширины щели можно сделать влияние нелинейности в плазме несущественным. Таким образом, условия возбуждения поля в цилиндре таковы, что поле в плазме может быть описано в рамках приближений а), б) п. 1.

Анализ решения показывает, что цилиндр с узкой щелью при наличии плазмы в нем сильно отражает падающее поле. Исключение составляет тонкий плазменный цилиндр, когда частоты резонансов близки к частотам резонансов полого цилиндра; коэффициент отражения резонансной гармоники при этом близок к нулю. Кроме того, если в поле резонансной осесимметричной гармоники выполнено условие плазменного резонанса $\epsilon(|u_0|) = 0$, то при значениях радиусов цилиндра и плазмы, определяемых уравнениями $J_0(ka) = J_1(kb) = 0$, поле ее может быть введено в цилиндр полностью.

4. Рассмотрим для примера задачу создания плазмы ионизирующей высокочастотной электромагнитной волной в цилиндре с узкой щелью в условиях резонанса на осесимметричной гармонике поля. В случае сильного скинирования, когда поле проникает в плазму на глубину $L \ll b$, нелинейное уравнение, описывающее поле в плазме, может быть решено аналитически. Для закона ионизации

$\epsilon = \epsilon_0 - \kappa |E|^2/E_p^2$, где $\kappa > 0$, получаем (A и S_0 — постоянные интегрирования)

$$u_0 = E_p \left[\frac{|\epsilon_0|}{\kappa} \right]^{1/2} \{ \mathrm{sh}[\sqrt{|\epsilon_0|}(kb - \rho + A)] \}^{-1} \exp(iS_0);$$

$$\zeta_0^{-1} = \sqrt{|\epsilon_0|}\,[1 + \kappa v_0^2/2|\epsilon_0|E_p^2]^{1/2}, \qquad \epsilon_0 < 0.$$

Амплитуда поля на границе плазмы v_0 связана с амплитудой падающей волны E_0 нелинейным алгебраическим уравнением (c_0 — определено в [1])

$$v_0 \left\{ \sqrt{|\epsilon_0|} H_0(kb) \left[1 + \frac{\kappa v_0^2}{2|\epsilon_0|E_p^2} \right]^{1/2} + H_1(kb) \right\} = E_0 \frac{8 c_0 H_0(kb)}{kb}.$$

В слабом поле v_0 зависит от E_0 линейно, в сильном $v_0 \sim E_0^{1/2}$. Условие резонанса на осесимметричной гармонике имеет вид

$$\left(\frac{2}{\kappa} \right)^{1/2} \left\{ \left[\frac{N_0(ka)J_1(kb) - J_0(ka)N_1(kb)}{J_0(ka)N_0(kb) - N_0(ka)J_0(kb)} \right] - |\epsilon_0| \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{4\pi E_0}{E_p} |c_0|\, |J_0(ka)N_0(kb) - J_0(kb)N_0(ka)|.$$

Изменение резонансного значения амплитуды падающей волны в зоне первого резонансного значения волнового числа, определяемое им, для $|\epsilon_0| = 7$ и $ka = 2$ показано на рис. 1*б*.

Условие малости влияния поля на плазму вне резонанса приводит к следующему ограничению на ширину щели (Q — некоторый множитель, определяемый структурой поля в цилиндре):

$$(6) \qquad \theta \ll \theta_c = E_p^{1/2} \left(\frac{|\epsilon_0|}{\kappa Q} \right)^{1/4} E_0^{-1/2}.$$

Видно, что θ_c слабо зависит от характерных параметров, структуры поля в цилиндре и амплитуды падающей волны. При более сильной зависимости ϵ от $|E|$ зависимость θ_c от E_0 будет еще более слабой.

При выполнении условия (6) концентрация электронов в плазме при заданных a, b, k будет резонансным образом зависеть от амплитуды падающей волны. Этот результат — следствие зависимости резонансной частоты от амплитуды волны и малости ширины щели.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
12 XI 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1971. 2. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.