УДК 514.762.27

Н. М. Остиану, Т. Н. Балазюк

МНОГООБРАЗИЯ, ПОГРУЖЕННЫЕ В ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОЙ СТРУКТУРЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Понятие расслоенного многообразия, в связи с исследованием многообразий со связностью, восходит к работам Э. Картана (1922—1925 гг.). Начала теории, получившей дальнейшее развитие в направлении дифференциальной топологии, были заложены в работах Л. С. Понтрягина, Чжэнь Шин-шеня, Уитни, Хопфа, Штифеля (1935—1940 гг.). Результаты этих исследований были подытожены в книге Стинрода «Топология косых произведений».

В 1945—1950 гг. опубликованы работы В. В. Вагнера о геометрии составного многообразия [17]—[19] и Г. Ф. Лаптева о многообразиях геометрических элементов [31], заложившие основы дифференциально-геометрического исследования главных и присоединенных расслоенных многообразий. Дальнейшей разработке этой теории посвящены докторская диссертация Г. Ф. Лаптева [32], а также ряд работ, опубликованных в период 1952—1972 гг. (см. [67]).

Дифференциально-геометрической теории расслоенных пространств в различных ее аспектах и ее приложению к исследованию геометрии погруженных многообразий в пространствах со связностью, пространствах с фундаментальными группами, к изучению дифференциально-геометрических структур посвящены работы многих геометров, продолжающих исследования Г. Ф. Лаптева. К их числу относятся работы Ю. Г. Лумисте, В. И. Близникаса, Н. М. Остиану, В. В. Малаховского, П. И. Швейкина, Л. Е. Евтушика, Э. Д. Алшибая и других геометров, работающих в семинарах перечисленных исследователей.

Исследование расслоенных многообразий составляет и в настоящее время основную тематику дифференциальной геометрии. Теория расслоенных многообразий весьма многоаспектна. Более того, многие проблемы дифференциальной геометрии пространств с фундаментальными группами и их подмногообразий, ставшие уже классическими, получили новое звучание в свете теории расслоенных многообразий, приведшее к обновлению проблематики этого раздела дифференциальной геометрии. Связь, существующая между расслоенными многообразиями и сечениями в них с полями геометрических объектов, открыла широкие возможности для исследования дифференциальной геометрии этих многообразий.

В настоящей статье авторы стремились показать на ряде работ возможность перенесения геометрических теорий, развитых для пространств с фундаментальными группами, в многообразия проективной структуры, а также исследования многообразий в пространствах с фундаментальными группами с позиций изучения геометрии расслоенных многообразий.

Более детально мы остановились на построении геометрии расслоенных многообразий P^0-структуры с оснащенной базой (см. § 5). Этот параграф написан Т. Н. Балазюк.

§ 1. МНОГООБРАЗИЯ ЛИНЕЙНОЙ СТРУКТУРЫ

1. Главное и присоединенное расслоенное многообразие по Г. Ф. Лаптеву

1. Главное расслоенное многообразие аналитически введено Г. Ф. Лаптевым следующим образом [67]. Рассматривается m-мерное дифференцируемое многообразие M_m класса C^∞. Вводится система линейных, линейно независимых форм θ^a $(a=1, \ldots, m)$, образующих вполне интегрируемую систему, первыми интегралами которой являлись координаты x^a точки $x \in (U)$, где (U) — некоторая область многообразия M_m. Из определения форм следует, что

$$\theta^a = x_b{}^a dx^b, \tag{1.1}$$

где $\det \|x_b{}^a\| \neq 0$ и

$$D\theta^a = \theta^b \wedge \theta_b{}^a. \tag{1.2}$$

Многообразие M_m играет в дальнейшем построении роль базы, над которой строится главное расслоенное многообразие.

Система линейных, линейно независимых форм $\theta^1, \ldots, \theta^m$; $\omega^{m+1}, \ldots, \omega^n$, где формы θ^a определены в (1.1), а формы $\omega^\alpha (\alpha = m+1, \ldots, n)$ имеют строение:

$$\omega^\alpha = a^\alpha_a(x)\, dx^a + b^\alpha_\beta(x, y)\, dy^\beta \tag{1.3}$$

и удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\omega^\alpha = \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \theta^a \wedge \omega^\alpha_a, \tag{1.4}$$

называется системой форм главной расслоенной структуры с базисными формами $\theta^1, \ldots, \theta^m$ и слоевыми формами $\omega^{m+1}, \ldots$ $\ldots, \omega^n$ [35].

Первые интегралы x^a, y^α системы форм $\{\theta^a, \omega^\alpha\}$ принимаются за координаты точки n-мерного многообразия, которое и называется главным расслоенным многообразием. При фиксации точки $x = \bar{x}$ базы в главном расслоенном многообразии выделяется $(n-m)$-мерное многообразие — слой $E_{\bar{x}}$. Оно является групповым пространством группы Ли G. Слоевые формы превращаются при этом в инвариантные формы группы Ли G (структурной группы), а первые интегралы

$$\bar{y}^\alpha = y^\alpha |_{x^a = \bar{x}^a}$$

этой системы форм играют роль координат текущей точки слоя $E_{\bar{x}}$.

2. Система форм

$$\theta^a, \quad \Delta X^J \equiv dX^J - \xi^J_\alpha(X)\, \omega^\alpha + \xi^J_a\, \theta^a \tag{1.5}$$

$$(J, \ldots = 1, 2, \ldots, N)$$

называется системой форм присоединенной расслоенной структуры относительно главной расслоенной структуры (1.2), (1.4), если эта система форм вполне интегрируема [35].

Независимые первые интегралы x^a, w^J системы форм (1.5) могут рассматриваться как координаты точки $(m+N)$-мерного расслоенного многообразия E^{m+N} над базой M_m. Это расслоенное многообразие названо присоединенным расслоенным многообразием (см., например, [67]).

При произвольной фиксации точки базы $x^a = \bar{x}^a$ формы $\Delta \bar{X}^J = \Delta X^J |_{\theta^a = 0}$ образуют вполне интегрируемую систему форм — систему структурных форм геометрического объекта X с относительными компонентами X^J. Группа G с инвариантными формами $\bar{\omega}^\alpha$ представлена в пространстве объекта X как группа преобразований. Это пространство называется слоем или локальным пространством $E_{\bar{x}}$ присоединенного расслоенного многообразия, соответствующим точке $\bar{x}$ базы, многообразие M_m — его базой, группа G — фундаментальной (структурной) группой присоединенного расслоенного многообразия, а объект X — *локальным образующим* или *структур-*

ным геометрическим объектом слоя присоединенного расслоенного многообразия.

3. Если система линейных, линейно независимых форм ΔX^J (1.5) имеет следующее строение:

$$\Delta X^{J_s} \equiv dX^{J_s} - \xi^{J_s}_{\alpha} (X^{K_1}, \ldots, X^{K_s}) \omega^{\alpha} + X^{J_s}_{a} \theta^{a}$$
$$(s=1, \ldots, q)$$

и при каждом s система θ^a, ΔX^{J_1} ,..., ΔX^{J_s} вполне интегрируема, то соответствующее присоединенное расслоенное пространство называется присоединенным расслоенным пространством ступенчатой структуры (или обобщенно-флаговой структуры) [62].

4. В настоящее время в дифференциально-геометрических исследованиях рассматриваются весьма разнообразные присоединенные расслоенные многообразия, которые можно истолковать как обобщение, порой далеко продвинутое, или как конкретизацию присоединенных расслоенных многообразий.

Мы не будем здесь останавливаться на их описании. Отметим лишь, что к этому классу расслоенных многообразий относятся касательные расслоения высших порядков (см., например, [71]), упоминавшиеся уже присоединенные расслоенные многообразия ступенчатой структуры как, например, двухъярусные многообразия $\mathcal{H}$-структуры [61], [62], пространства струй порядка p [7], [28], [29], пространства тензорных опорных элементов [30], пространства опорных элементов [7] и др., а также многочисленные расслоенные многообразия, характеризующиеся выбором конкретного локального образующего объекта и конкретной структурной группы G.

2. Многообразие геометрических элементов

1. Геометрическим элементом $EF(GH)$ называется однородное пространство E с фундаментальной группой G, в котором зафиксирован геометрический образ F (опорный образ) со стационарной подгруппой H [32], [33].

2. Понятие геометрического элемента допускает обобщение. Если образующий объект X пространства E имеет ступенчатую структуру с q ступенями [62]: $X \equiv \underset{(q)}{X} \supset \underset{(q-1)}{X} \supset \ldots \supset \underset{(1)}{X}$, то в качестве опорного образа можно принять любой подобъект $\underset{(s)}{X}$ $(s=1, \ldots, q)$. Стационарная подгруппа $\underset{(s)}{H}$ образующего объекта X элемента E при $s<q$ будет подгруппой опорной группы H. Такой геометрический элемент назван обобщенным геометрическим элементом [62]. Если опорный образ совпадает с образующим объектом, то обобщенный геометрический элемент называется центрированным геометрическим элементом (а опорный образ — его центром). Очевидно, что центрированный обобщенный геометрический элемент, у которого

$q=1$, и является геометрическим элементом, введенным Г. Ф. Лаптевым.

3. Многообразием геометрических элементов Г. Ф. Лаптев называет «гомеоморфное m-мерной области евклидова пространства топологическое пространство, точками которого являются одинаковые геометрические элементы» [32], [33]. Геометрические элементы многообразия называются его локальными пространствами.

Накладывается следующее требование. Все локальные пространства многообразия геометрических элементов снабжены такими (начальными) координатными системами, что начальное соответствие пространств локальных геометрических элементов, устанавливаемое по принципу равенства координат соответствующих точек отождествляет эти элементы [33].

Таким образом, если выбрать в одном локальном пространстве начальный репер, то начальное соответствие определит соответствующие начальные реперы во всех локальных пространствах [33].

Из сказанного выше следует, что многообразие геометрических элементов представляет собой присоединенное расслоенное многообразие E^{m+N}. Стационарная подгруппа опорного образа (опорная группа) H является его структурной группой. Определена проекция $p: E^{m+N} \to M_m$, прообразы $p^{-1}(x)$ (слои E_x) для каждого $x \in M_m$ диффеоморфны одному и тому же N-мерному пространству — пространству геометрического объекта X.

В этом расслоенном многообразии E^{m+N} возникает сечение (секущая поверхность), т. е. отображение, сопоставляющее каждому $x \in M_m$ опорный образ слоя $E_x = p^{-1}(x)$.

3. Расслоенные многообразия линейной структуры

1. Главное расслоенное многообразие с m-мерной базой M_m, структурной группой которого является полная линейная группа преобразований $\mathrm{GL}(N+1, R)$ или группа неособенных матриц $(N+1)$-го порядка, называется **главным расслоенным многообразием линейной структуры**.

Структурные уравнения этого пространства имеют вид:

$$D\theta^a = \theta^b \wedge \theta^a_b,$$

$$D\omega^{\bar J}_{\bar K} = \omega^{\bar L}_{\bar K} \wedge \omega^{\bar J}_{\bar L} + \theta^a \wedge \omega^{\bar J}_{\bar K a} \qquad (1.7)$$

$$(a = 1, \ldots, m;\ \bar J, \bar K, \ldots = 0, 1, \ldots, N),$$

где θ^a — базовые формы, $\omega^{\bar J}_{\bar K}$ — слоевые, а

$$\bar\omega^{\bar J}_{\bar K} = \omega^{\bar J}_{\bar K}\Big|_{\theta^a = 0}$$

— инвариантные формы группы $\mathrm{GL}(N+1, R)$.

Присоединенное расслоенное многообразие с той же базой M_m, слоями которого являются пространства представления группы $\mathrm{GL}(N+1, R)$, в частности, $(N+1)$-мерные векторные пространства, называется **присоединенным** расслоенным многообразием **линейной структуры** L [61]. Объект, определяющий текущую точку этого пространства представления, называется **образующим** объектом.

Многообразия L — это класс присоединенных расслоенных многообразий, наиболее часто встречающихся в дифференциально-геометрических исследованиях. Достаточно сказать, что касательное расслоение $T(M_m)$ включается в этот класс. Более того, при исследовании многих погруженных многообразий, в пространствах с фундаментальными группами естественным образом возникают расслоенные многообразия линейной структуры.

2. Если на базе M_m задано поле $\mathrm{GL}(N+1, R)$-объекта W, определяемое системой

$$\Delta W^{\Xi} \equiv dW^{\Xi} - \eta^{\Xi \overline{K}}_{\overline{J}}(W)\,\omega^{\overline{J}}_{\overline{K}} - W^{\Xi}_{a}\,\theta^{a} = 0 \tag{1.8}$$

(ограничимся лишь случаем, когда группа $\mathrm{GL}(N+1, R)$ действует в пространстве объекта W транзитивно), то можно исходить из двух точек зрения [61]. Многообразие L можно рассматривать как присоединенное расслоенное многообразие линейной структуры с оснащенной базой. Специфику его геометрии будут составлять те геометрические факты, которые обусловлены наличием этого поля, однако изучать геометрию можно, сохраняя в слоях систему реперов с исходной фундаментальной группой $\mathrm{GL}(N+1, R)$, т. е. структурной группой будем считать фундаментальную группу.

В то же время можно редуцировать фундаментальную группу до стационарной подгруппы G объекта W и изучать расслоенное многообразие линейной структуры L как присоединенное расслоенное многообразие, структурной группой которого является эта стационарная подгруппа G, а слоями — пространства представления этой группы. Образующий объект редуцируется до G-объекта.

Объект W^{Ξ} называется **оснащающим** объектом многообразия линейной структуры, определяющим G-структуру.

3. Если оснащающий объект W является однокомпонентным $\mathrm{GL}(N+1, R)$-объектом, поле которого определяется уравнением

$$\Delta W \equiv dW + W\omega^{\overline{J}}_{\overline{J}} - W_{a}\theta^{a} = 0, \tag{1.9}$$

то редукция фундаментальной группы $\mathrm{GL}(N+1, R)$ до стационарной подгруппы объекта W приводит к $[(N+1)^2-1]$-параметрической группе, изоморфной проективной группе. В слоях присоединенного расслоенного многообразия линейной структуры L, в которых введен векторный репер, состоящий из $N+1$ векторов $\overline{M}_J$, относительный инвариант W можно интерпретировать как внешнее произведение «вершин» этого репера: $W=[M_0M_1 \ldots M_N]$. Равенство его единице накладывает ограничение на выбор нормировки «вершин» репера. При $W=1$ из уравнения поля (1.9) в произвольно фиксированной точке $x \in M_m$ получаем

$$\Delta \overline{W} = \omega_J^J = 0. \tag{1.10}$$

Присоединенное расслоенное многообразие линейной структуры, база которого оснащена полем относительного инварианта (1.9), называется многообразием **проективной структуры** или, кратко, многообразием **P-структуры**.

4. Если база присоединенного расслоенного многообразия линейной структуры оснащена полем образующего объекта слоя, т. е. полем $\mathrm{GL}(N+1, R)$-объекта, то фундаментальную группу $\mathrm{GL}(N+1, R)$ можно редуцировать до стационарной подгруппы образующего объекта слоя. В этом случае слоями являются геометрические элементы Г. Ф. Лаптева (см. п. 2.1), а зафиксированный в каждом слое образующий объект является опорным образом. Стационарная подгруппа G опорного образа становится структурной группой возникающего расслоенного многообразия. Уравнения заданного поля образующего объекта определяют сечение в этом расслоенном многообразии.

5. Оснащающий объект может иметь ступенчатую структуру или, в частности, состоять из объединения нескольких $\mathrm{GL}(N+1, R)$-объектов или G-объектов. Возможна классификация многообразий линейной структуры по типу оснащающего объекта. Некоторые классы многообразий линейной структуры, и в частности, многообразий геометрических элементов, такие, как: многообразия аффинной структуры, евклидовой структуры, симплектической и аффинно-симплектической структуры и др. описаны в работе [61]. Отдельные классы будут отмечены при дальнейшем изложении.

6. Многообразия обобщенных геометрических элементов, фундаментальной группой которых является проективная группа, можно рассматривать как обобщение многообразия проективной структуры с оснащенной базой.

§ 2. ГЕОМЕТРИЯ ОСНАЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПРОЕКТИВНОЙ СТРУКТУРЫ

1. Оснащающие поля

1. Полем внутреннего геометрического объекта, или H-полем, в многообразии проективной структуры называется заданное на базе поле геометрического объекта, присоединенного к струк-

турной группе (т. е. к стационарной подгруппе H опорного образа) [31].

Локальный объект, присоединенный к фундаментальной группе (проективной группе), может быть редуцирован (сокращен) до внутреннего геометрического объекта, по отношению к которому он называется расширенным внутренним объектом того же типа [65].

2. Значительное место в исследовании расслоенных многообразий проективной структуры занимают многообразия проективной структуры, база которых оснащена полем образующего объекта. Как уже было указано (см. § 1, п. 2), слоями таких многообразий являются геометрические элементы. Фундаментальная группа G — проективная группа — может быть редуцирована до стационарной подгруппы H опорного образа (структурная группа).

Типовым слоем может быть реализация представления проективной группы в пространстве любого геометрического объекта W (с тем лишь ограничением, что представление является транзитивным).

Если при этом структурный объект X базы является G-объектом, подобным опорному образу [33], то уравнения поля имеют вид:

$$\Delta W^{\mathfrak{B}} = W^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{W}} \Delta X^{\mathfrak{W}}, \tag{2.1}$$

где $\Delta W^{\mathfrak{B}}$ и $\Delta X^{\mathfrak{W}}$ — структурные формы этих объектов [38] и $\det \|W^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{W}}\| \neq 0$. При этом многообразие опорных образов может быть отождествлено с базой. Такое многообразие проективной структуры назовем **многообразием** P^0-**структуры**.

Отметим, что дифференциальная геометрия пространств представления проективной группы и их подмногообразий допускает непосредственное обобщение на многообразия P^0-структуры. Более того, геометрия пространств представления проективной группы может трактоваться с точки зрения расслоенных многообразий как геометрия многообразий P^0-структуры и полей геометрических объектов в таких многообразиях.

Замечание. Многообразие P^0-структуры может быть определено как расслоенное пространство $\mathcal{H}_P$-структуры [61], [64] с нульмерной основной базой.

3. Тип любого поля геометрического объекта, как известно [33], определяется типом определяющих поле функций (основных и дополнительных), а также группой, к которой присоединен объект.

Многообразие проективной структуры называется оснащенным, если на его базе задано поле некоторого (оснащающего) геометрического объекта, присоединенного к фундаментальной или структурной группе (G-оснащенное или, соответственно,

H-оснащенное многообразие проективной структуры), либо к любой их подгруппе или факторгруппе по некоторой подгруппе.

Тип оснащающего объекта может быть использован для классификации проблематики дифференциально-геометрического исследования оснащенных многообразий проективной структуры.

4. Структурными уравнениями многообразия проективной структуры являются уравнения (1.7), к которым следует добавить уравнения (1.9) или (1.10).

Если на базе задать поле объекта $\Gamma^{\overline{J}}_{\overline{K}a}$:

$$\nabla\Gamma^{\overline{J}}_{\overline{K}a}-\Gamma^{\overline{J}}_{\overline{K}b}\Gamma^{\overline{I}}_{\overline{J}a}\theta^b+\omega^{\overline{J}}_{\overline{K}a}=\Gamma^{\overline{J}}_{\overline{K}ab}\theta^b,$$

то вторая группа уравнений (1.7) примет вид:

$$D\hat{\omega}^{\overline{J}}_{\overline{K}}=\hat{\omega}^{\overline{L}}_{\overline{K}}\wedge\hat{\omega}^{\overline{J}}_{\overline{L}}+\Omega^{\overline{J}}_{\overline{K}}, \tag{2.2}$$

где

$$\Omega^{\overline{J}}_{\overline{K}}=R^{\overline{J}}_{\overline{K}ab}\theta^a\wedge\theta^b.$$

При этом формы $\hat{\omega}^{\overline{J}}_{\overline{K}}$ будут удовлетворять условиям теоремы Картана — Лаптева [67] и, следовательно, будут формами, определяющими проективную связность в многообразии проективной структуры.

Замечание 1. Если в дифференциальных уравнениях поля

$$dY^A-\eta^A_s(Y)\,\omega^s=Y^A_a\theta^a,$$

заданного на базе многообразия проективной структуры со связностью Γ, где ω^s — формы связности, функции $Y_a{}^A\equiv0$, то поле называется инвариантным относительно определяющего связность отображения.

Замечание 2. Проективное пространство можно всегда интерпретировать как многообразие проективной связности с плоской связностью, т. е. с такой связностью, для которой $\Omega^J_{\overline{K}}\equiv0$, и, следовательно, как многообразие проективной структуры, в котором определена плоская связность. В этом случае слои можно отождествить. Определяющее связность отображение сводится к преобразованию слоя в себя.

2. Подмногообразия в пространствах геометрических объектов

1. Известно (см., например, [36]), что S-мерное представление группы Ли $\mathfrak{G}_r$ определяется системой дифференциальных уравнений вида:

$$\overline{\Theta}^{\mathfrak{B}}\equiv\overline{d}X^{\mathfrak{B}}-\xi^{\mathfrak{B}}_A(X)\,\overline{\omega}^A=0\quad(\mathfrak{B}=1,\ldots,S;\ A=1,\ldots,r), \tag{2.3}$$

где $\overline{\omega}^A$ — инвариантные формы группы $\mathfrak{G}_r$, формы $\Theta^{\mathfrak{B}}$ образуют систему S линейно независимых форм и функции $\xi_A^{\mathfrak{B}}$ удовлетворяют структурным уравнениям Ли.

Систему (2.3) можно истолковывать как систему уравнений неподвижности образующего объекта (точки) пространства представления с относительными компонентами (или координатами) $X^{\mathfrak{B}}$.

Формы $\overline{\Theta}^{\mathfrak{B}}$ называются структурными формами представления группы Ли $\mathfrak{G}_r$ или структурными формами объекта $\{X^{\mathfrak{B}}\}$ [38].

В. С. Малаховским введено понятие фигуры F как подмножества однородного пространства E_n, допускающего включение в систему $R(F)$ подмножеств пространства E_n, которое, по определению, изоморфно некоторому конечному пространству представления. Каждой фигуре F соответствует класс подобных геометрических объектов (см. [45]).

2. m-мерным подмногообразием в пространстве геометрического объекта X со структурными формами $\overline{\Theta}^{\mathfrak{B}}$, присоединенного к группе $\mathfrak{G}_r$ с инвариантными формами ω^A, называется отображение, определенное системой

$$\Theta^{\mathfrak{B}}=\Lambda_a^{\mathfrak{B}}\theta^a, \tag{2.4}$$

где $\Theta^{\mathfrak{B}}$ — линейные, линейно независимые формы расслоенной структуры по отношению к формам θ^a, удовлетворяющие следующим структурным уравнениям:

$$D\Theta^{\mathfrak{B}}=\Theta^{\mathfrak{W}}\wedge\Theta_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{B}}+\theta^a\wedge\Theta_a^{\mathfrak{B}}$$

и

$$\overline{\Theta}^{\mathfrak{B}}=\Theta^{\mathfrak{B}}\big|_{\theta^a=0},$$

а θ^a — параметрические формы.

Это определение сохраняется и для случая, когда X определяет конкретный геометрический образ (фигуру) в n-мерном проективном пространстве, а группа $\mathfrak{G}_r$ является проективной или центропроективной группой. Уравнения (2.4) можно интерпретировать как уравнения оснащающего поля геометрического объекта X, заданного на базе $\{\theta^a\}$ многообразия проективной структуры. Таким образом, исследование дифференциальной геометрии многообразий фигур и пар фигур проективного пространства в параметрической форме полностью вписывается в изучение геометрии оснащенного многообразия проективной структуры с базой $\{\theta^a\}$.

3. Работам по дифференциальной геометрии многообразий фигур посвящены обзоры В. С. Малаховского [45], [46], [48].

В работе В. С. Малаховского и В. В. Махоркина [49] изучается дифференциальная геометрия m-мерного многообразия гиперквадрик n-мерного проективного пространства. Многообразие определяется системой параметрических уравнений

$$\theta_{\alpha\beta}=\Lambda_{\alpha\beta i}\tau^i, \tag{2.5}$$

где

$$\theta_{\alpha\beta}\equiv da_{\alpha\beta}-a_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta-a_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha$$
$$(i,\ldots=1,2,\ldots,m;\ \alpha,\ldots=1,2,\ldots,n+1)$$

и

$$D\tau^i=\tau^k\wedge\tau^i_k.$$

Такое многообразие называется многообразием $K(m, n)$.

Геометрию многообразия $K(m,n)$ можно интерпретировать как геометрию многообразия проективной структуры с m-мерной базой $\{\tau^i\}$, n-мерными слоями, оснащенного полем (2.5) геометрического объекта $\{a_{\alpha\beta}\}$.

Рассмотрены классы $m=n-1$, $m=n$ и ряд их подклассов. Исследование многообразий $K(m,n)$ продолжено вторым автором в работах [50], [52], а кубических гиперповерхностей n-мерного проективного пространства — в [51].

4. К геометрии оснащенных многообразий проективной структуры относятся работы по исследованию геометрии семейств плоскостей, рассматриваемых как поле на дифференцируемом многообразии [42], [43] и др. Общая теория оснащения подмногообразия $\mathrm{Gr}(m,n,r)$ грассманова многообразия $\mathrm{Gr}(m,n)$ с точки зрения изучения расслоения, базой которого является r-мерное дифференцируемое многообразие, типовым слоем — m-мерное проективное пространство, а структурной группой — группа проективных преобразований m-мерного проективного пространства, построена Ю. Г. Лумисте [42]—[44]. Дальнейшее развитие эта теория, при аналогичной постановке задачи, нашла в последующих работах ее автора, а также в работах, выполненных под его руководством.

5. Отправляясь от работ Ю. Г. Лумисте, А. К. Парринг изучает a-мерное дифференцируемое многообразие $B_a(2m,2n)$ симплектических $2m$-мерных плоскостей Sp_{2m} в $2n$-мерном аффинно-симплектическом пространстве Sp_{2n} с позиций исследования возникающего расслоения. Слоями являются симплектические $2m$-плоскости Sp_{2n}, рассматриваемые как точечные пространства, а базой — само a-мерное многообразие $B_a(2m,2n)$. В слоях естественно возникает связность, индуцированная симплектической метрикой: симплектически ортогональные дополнения плоскостей семейства порождают горизонтальное распределение, определяющее эту связность. Метрический тензор g_{JK} (J, $K=1,\ldots,2n$) индуцирует поле $dg_{ij}-g_{ik}\omega_j{}^k-g_{kj}\omega_i{}^k=0$, инвариантное относительно определяющего связность отображения. При такой постановке задачи многообразие B_a может трак-

товаться как расслоенное многообразие линейной структуры с оснащенной базой.

Структурной группой является группа $T_{2m} * \mathrm{Sp}$, где T_{2m} — группа сдвигов, а Sp — симплектическая группа. Для исследования сохраняется аффинное семейство реперов.

§ 3. ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ПОГРУЖЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ В P_n С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В МНОГООБРАЗИЯХ P^0-СТРУКТУРЫ

1. Геометрия многомерной поверхности в P_n

1. Задав подмногообразие M_m на базе M_n многообразия P^0-структуры (см. § 2, п. 1) с точечным опорным образом, можно ввести в рассмотрение сужение на подобласть M_m (или ограничение на M_m) исходного многообразия P^0-структуры. Результирующее расслоенное многообразие является многообразием проективной структуры. Обозначим его $\mathfrak{T}(M_m)$. Многообразие касательных элементов к многообразию M_m определяет подрасслоение в многообразии $\mathfrak{T}(M_m)$ — касательное подрасслоение $T(M_m)$, представляющее собой многообразие P^0-структуры. Слои $\mathfrak{T}_x(M_m)$ могут быть определены как центропроективные пространства, натянутые на m-мерный касательный элемент $T_x(M_m)$ поверхности M_m в P_n и оснащающую по Картану $(n-m-1)$-мерную плоскость $k_x(M_m)$.

Благодаря этому обстоятельству, при изучении геометрии m-мерной поверхности в P_n могут быть, во-первых, использованы методы исследования, характерные для расслоенных многообразий, а во-вторых, проблематика исследования может быть расширена за счет привлечения вопросов, специфических для расслоенных многообразий: подрасслоения, связности и другие дифференциально-геометрические структуры, а также их лифты в касательные расслоения, возникающие на этих подрасслоениях как на базе.

2. Поле геометрического объекта, заданное на поверхности M_m, истолковывается как поле на базе M_m многообразия P-структуры, а само расслоение $\mathfrak{T}(M_m)$ становится оснащенным.

Поле оснащающего объекта, присоединенного к группе, индуцированной в плоскости касательного элемента $T_x(M_m)$ стационарной подгруппой этого элемента, который определяет в $T_x(M_m)$ линейное подпространство, содержащее опорный образ слоя $T_x(M_m)$, называется *касательно оснащающим полем* (термин введен В. С. Малаховским для подмногообразий в однородных пространствах представлений групп Ли [47]).

Элементы оснащающего по Картану поля $k_x(M_m)$ индуцируют в $\mathfrak{T}(M_m)$ подрасслоение $N(M_m)$ — нормальное расслоение. Слой $N_x(M_m)$ этого расслоения определяется соответствующим элементом $k_x(M_m)$ оснащающего поля и опорным образом слоя $\mathfrak{T}_x(M_m)$.

Поля геометрических объектов, охваченных фундаментальными объектами поверхности M_m, определяют в расслоении $\mathfrak{T}(M_m)$ естественно возникающие оснащающие поля. Геометрия таких полей является в то же время геометрией расслоения $\mathfrak{T}(M_m)$.

2. Геометрия касательно оснащающего поля.

1. Касательно оснащающее поле в расслоенном многообразии $\mathfrak{T}(M_m)$ изучается в работах Р. Ф. Домбровского [21]—[26]. Оснащающее поле объекта H_a^ξ $(a=1,\ldots,r;\ \xi=r+1,\ldots,m)$, заданное на базе M_m, определяет подрасслоение $H(M_m)$ касательного расслоения $T(M_m)$. Естественным образом с ним ассоциируется в $T(M_m)$ подрасслоение $h(M_m)$, определенное полем объекта h_ξ^a.

Таким образом, в $T(M_m)$ естественно возникает неголономная композиция А. П. Нордена $Hh(M_m)$ (см. обзорную статью А. П. Нордена [54] и работу [26]). Доказано, что фундаментальные поля расслоений $H(M_m)$ и $T(M_m)$ порождают семейства объектов типа, аналогичного h_ξ^a, и, следовательно, определяют в $T(M_m)$ семейства подрасслоений. Все сказанное для подрасслоения $h(M_m)$ справедливо для любого подрасслоения этого семейства. Естественно возникает в $\mathfrak{T}(M_m)$ нормальное подрасслоение $N(M_m)$, порождающее вместе с $T(M_m)$ неголономную композицию $TN(M_m)$.

То обстоятельство, что $T(M_m)$ само по себе является подрасслоением в $\mathfrak{T}(M_m)$, вносит определенную специфику в геометрию подрасслоений $H(M_m)$ и $h(M_m)$.

2. Между слоями $N_x(M_m)$ и $T_x(M_m)$, а также между слоями $H_x(M_m)$ и $h_x(M_m)$ возникает соответствие, основанное на обобщенном проективитете Бомпьяни — Пантази [40]. При помощи этого соответствия, используя композицию $Hh(M_m)$, Р. Ф. Домбровский определяет [26] в слоях $T_x(M_m)$ $(m-1)$-мерные плоскости, не проходящие через соответствующий опорный образ и определяющие на M_m поле (j). Структурный объект этого поля является проективным аналогом объекта, введенного А. П. Норденом и Г. Н. Тимофеевым [55]. В связи с этим поле (j) названо полем плоскостей Нордена — Тимофеева неголономной (в частности, полуголономной или голономной) композиции. Эти построения существенно связаны с нормализацией по А. П. Нордену, индуцирующей связность в слоях расслоения $T(M_m)$. Такая связность в слоях касательного расслоения $T(M_m)$ определяется Р. Ф. Домбровским нормализацией по А. П. Нордену полями объектов N_α^i и b_i, аналогичных построенным Н. М. Остиану для распределений [59]. Далее эта связность деформируется при помощи различных тензоров типа (1, 2), которые определены оснащающими полями H и h, их продолжениями и

фундаментальными полями, возникающими при продолжении локального структурного объекта касательного расслоения $T(M_m)$, а также нормализующими полями N и b. По этому пути получается аналог π-связности, относительно которой аффинор композиции $Hh(M_m)$ ковариантно постоянен (тензор деформации в данном случае является обобщением тензора Видаля), а также ряд других связностей, обладающих определенными замечательными свойствами. Изучаются также связности, возникающие в слоях расслоения $H(M_m)$ как индуцированные связностью в $T(M_m)$ и различными оснащающими M_m полями, которые определяют виртуальную нормализацию расслоения $H(M_m)$ как подрасслоения $T(M_m)$.

3. Вводится дважды расслоенное многообразие $T(H(M_m))$ — многообразие касательных пространств расслоения $H(M_m)$. γ-лифты (в смысле В. И. Близникаса [7]) проектирующих тензоров аффинора неголономной композиции $Hh(M_m)$ в расслоение $T(H(M_m))$ индуцируют в нем f-структуру и π-структуру.

3. Геометрия нормальных расслоений

На погруженном многообразии M_m в P_n поля геометрических объектов, определяющих различные подпространства в $\mathfrak{T}_x(M_m)$, оказываются «неравноправными». Слои расслоения $T(M_m)$ порождают на M_m инволютивное распределение, в то время как для нормального расслоения $N(M_m)$ это не верно. При переходе к исследованию распределений m-мерных линейных элементов в P_n эта «неравноправность», в общем случае, исчезает, а композиция $TN(M_m)$ становится неголономной. (Об этих расслоениях речь будет идти в § 5).

В связи с этим естественно говорить о горизонтальном и вертикальном расслоениях [54], порождающих композицию.

Этот факт сказался на том, что геометрия нормального подрасслоения $N(M_m)$ значительно меньше исследовалась, по сравнению с геометрией касательного расслоения $T(M_m)$.

Обзор работ, посвященных исследованию нормальных подрасслоений и связностей в них, приведен в статье А. В. Чакмазяна, публикуемой в этом же сборнике [77].

4. Связности, реализуемые на поверхностях оснащенных парой полей плоскостных элементов

В отличие от постановки задачи, описанной в п. 1—3 настоящего параграфа, А. К. Рыбников изучает [72] связности на многомерной поверхности в P_n, которая служит общей базой двух подрасслоений расслоения $\mathfrak{T}(M_m)$: базового подрасслоения $B(M_m)$ и опорного подрасслоения $V(M_m)$, порождающих неголономную композицию $BV(M_m)$. Соответствующие слои $B_x(M_m)$ и $V_x(M_m)$ имеют лишь одну общую точку — опорный образ слоя $\mathfrak{T}(M_m)$, $\dim B_x(M_m)=m$, $\dim V_x(M_m)=n-m$. Если в слоях этих подрасслоений задать оснащающие плоскости размерности $(m-1)$ и $(n-m-1)$, соответственно, то в слоях касательного расслоения $T(M_m)$ возникает аффинная связность. В частности, рассматривается случай, когда слои базового подрасслоения совмещены с касательными пространствами многообразия M_m.

5. Оснащающие поля квадратичных элементов

1. Задание на поверхности полей геометрических объектов, определяющих подпространства касательных или нормальных пространств, оправдано, на наш взгляд, либо в тех случаях, когда поверхность общего типа не несет таких полей, либо когда они возникают естественно, но на достаточно высокой дифференциальной окрестности, что осложняет исследование. В других случаях задание таких оснащающих полей менее оправдано. Мы не будем здесь останавливаться на работах этого, последнего, направления.

2. Геометрия подмногообразий M_m, оснащенных полями квадратичных элементов, весьма содержательна при условии, что стационарная подгруппа оснащающего образа не оказывается слишком узкой. Она примыкает к геометрии многообразий коник и квадратик. В § 2, п. 2 мы отметили некоторые обзорные и оригинальные работы в связи с тем, что определенная постановка задачи позволяет включить задачу в исследование геометрии многообразий проективной структуры с оснащенной базой.

В исследование геометрии полей квадратичных элементов на погруженных многообразиях, допускающее трактовку с точки зрения геометрии многообразий P^0-структуры, включается задача, рассматривавшаяся Т. Н. Балазюк. Результаты были доложены на VI Всесоюзной геометрической конференции в Вильнюсе, 1975 г., а для пространства проективной связности приведены в [2].

В слое $T_x(M_m)$ касательного расслоения $T(M_m)$ задается $(m-1)$-мерный невырожденный конус g_x второго порядка, вершина которого совпадает с опорным образом слоя $T_x(M_m)$. Результаты были обобщены на случай распределений m-мерных линейных элементов (см. § 5), поэтому мы не будем здесь их касаться.

Сюда же могут быть отнесены более ранние исследования $(n-1)$-мерных многообразий конусов коразмерности 2 в P_n, проведенные Н. Г. Тугановым, Георгиевым, Попой и др., а также инвариантное построение дифференциальной геометрии многообразий квадратичных элементов, осуществленное В. С. Малаховским (см. [46]).

3. Истолкование с точки зрения многообразий P^0-структуры допускают задачи, связанные с изучением многообразия полу-

квадратичных пар фигур (см. [46], [48]), в которых одна из фигур пары — точка. В более общей постановке геометрия полуквадратичных пар может быть истолкована как геометрия оснащенного многообразия проективной структуры.

Биективное соответствие между поверхностью M_m и многообразием $(m, m, n)^2$ квадратичных элементов n-мерного проективного пространства, изучавшееся В. М. Овчинниковым (см. [46]), также допускает истолкование с точки зрения геометрии многообразий P^0-структуры.

6. Геометрия точечных соответствий между поверхностями.

Теория точечных соответствий между поверхностями составляет один из разделов геометрии многообразий P^0-структуры. Исследования, проводившиеся по этой теме до 1971 года, освещены в обзорах В. В. Рыжкова [73], [75].

Отправляясь от работы В. В. Рыжкова [74], в которой впервые ставится задача об изучении точечных отображений проективных пространств разной размерности, В. С. Болодурин, используя результаты, полученные им ранее в теории точечных соответствий между гиперповерхностями в P_n [11], изучает [13] геометрию точечных отображений между многомерными поверхностями и затем рассматривает приложения этой теории к геометрии точечных отображений $P_m \to P_n$ $(m<n)$ [12]. Задача может быть интерпретирована как изучение геометрии поля точек n-мерного проективного пространства, заданного на его m-мерном подмногообразии. К этой же теме относится работа М. В. Драгнева [27].

§ 4. ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В МНОГООБРАЗИЯХ P^0-СТРУКТУРЫ

1. Оснащение полем образующего объекта

Характерным для многообразия P^0-структуры является то, что структурный объект базы и образующий объект слоя — два подобных объекта. Это позволяет отождествить базу с многообразием опорных образов.

Остановимся на нескольких работах, в которых предметом исследования служит многообразие P^0-структуры, оснащенное полем образующего объекта.

1. Теория точечных соответствий в P_n, с точки зрения расслоенных многообразий проективной структуры, является теорией многообразия P^0-структуры с точечным опорным образом (а следовательно, и образующим объектом), оснащенного полем образующего объекта.

Структурной группой является центропроективная группа. Результаты исследований по теории таких соответствий до 1971 года освещены в обзорах В. В. Рыжкова [73], [75].

2. Г. С. Польща [68]—[70] изучает дифференциальную геометрию распределений точек в проективном пространстве. Опорным образом является точка $X \in P_n$. На многообразии опорных образов задается поле образующего объекта, т. е. поле точек Y. Вначале уравнения задачи записываются в проективном репере и объект Y рассматривается как объект, присоединенный к фундаментальной группе. Затем фундаментальная группа редуцируется до опорной группы и далее до стационарной подгруппы оснащающего объекта Y. Уравнения поля принимают вид $\omega_n{}^\alpha = a_A{}^\alpha \omega_0{}^A$ ($A=1, \ldots, n$; $\alpha=0, 1, \ldots, n-1$). Последовательными продолжениями этих уравнений находятся дифференциальные уравнения фундаментальных объектов первых трех порядков. Строятся и изучаются объекты, охваченные этими фундаментальными объектами. Устанавливается полнота (см. [33], [67]) фундаментального объекта третьего порядка.

3. М. В. Бразевич [14]—[16] изучает многообразие Грассмана $\mathrm{Gr}(1, 3)$, оснащенное полем образующего объекта. Образующим объектом является прямая трехмерного проективного пространства, многообразием опорных образов — четырехмерное грассманово многообразие, а структурной группой H — стационарная подгруппа прямой. Это многообразие P^0-структуры оснащается полем H-объекта, который является редуцированным образующим объектом. Такое поле задается уравнениями:

$$\nabla h^p_\alpha + \omega^p_\alpha = h^{pq}_{\alpha\beta}\omega^\beta_q \quad (p, q=1, 2;\ \alpha, \beta=3, 4).$$

С точки зрения неголономной линейчатой геометрии, многообразие Грассмана, оснащенное полем образующего объекта, является неголономным комплексом коррелятивных элементов в смысле К. И. Гринцевичюса и В. И. Близникаса (см. [10], [20], [8]). В более частной постановке эта задача восходит к геометрии пар прямых в P_3. Принятая М. В. Бразевичем постановка задачи позволила автору с новых позиций подойти к исследованию неголономного и голономного комплекса коррелятивных элементов, а также к теории пар голономных линейчатых многообразий.

Теория m-пар в $2m$-мерном проективном пространстве также является теорией многообразия P^0-структуры, оснащенного полем образующего объекта.

2. Поля касательных элементов и подобъектов касательного объекта

1. Теория распределений касательных элементов в однородных пространствах и пространствах с фундаментально-групповой связностью в последнее десятилетие стала вновь привлекать исследователей. Истоки ее лежат в геометрии так называемых «неголономных многообразий», которая разрабатывалась Д. М. Синцовым, В. В. Вагнером, С. С. Бюшгенсом, Врэнчану, Бомпьяни и др.

Применение к построению теории более современных методов дифференциально-геометрических исследований привело к необходимости переосмыслить основные положения теории. Прямое перенесение некоторых утверждений, справедливых при условии, что используемый репер зависит лишь от главных параметров, т. е. фактически задано распределение реперов, на случай, когда в пространстве задан «свободный» репер или, в крайнем случае, репер, адаптированный опорному образу, оказалось недопустимым. Стремление придать теории обобщенный характер (без жесткого ограничения свободы репера) привело к замене распределения реперов распределением «касательных элементов», что позволяло проводить исследования, сохраняя репер, присоединенный к фундаментальной группе или опорной группе.

Исходные понятия теории «неголономных многообразий» в инвариантной аналитической форме сформулированы Г. Ф. Лаптевым [38]. Автор указывает, что эта «статья примыкает к докладу В. И. Близникаса и К. И. Гринцевичюса [10] и является развитием одного из тезисов докладов автора на IV Всесоюзной конференции в Тбилиси (1969 г.) и на Международном конгресс математиков в Ницце (1970 г.)». (Позже эти материалы были опубликованы и в настоящем издании [39]).

2. С точки зрения многообразий P^0-структуры, распределение касательных элементов трактуется как поле геометрического объекта, названного касательным элементом, заданное на базе (или на многообразии опорных образов). Этот объект присоединен к структурной группе H — стационарной подгруппе опорного образа.

За последние 10 лет появилось большое число работ, в которых изучаются эти поля, в том числе и при дополнительном оснащении базы другими полями геометрических объектов, используемыми, в частности, для редукции структурной группы.

Обзор этих работ в рамках данной статьи был бы невозможным. Впрочем, это не отвечает и цели, поставленной авторами статьи. Отметим лишь, что четко выделяются два направления изучения полей касательных элементов в многообразиях P^0-структуры, обусловленные типом опорного образа: а) опорным образом является точка; б) опорным образом является прямая (линейчатая неголономная геометрия). Частичный обзор результатов по второму направлению дан в [8], [9].

Второе направление обогащается тем, что структурный объект касательного элемента, в зависимости от типа ассоциированной поверхности (по терминологии Г. Ф. Лаптева [38]), может обладать подобъектами. Это приводит к возможности рассматривать поля таких подобъектов на многообразии опорных образов. Возникает геометрия «полунеголономных многообразий».

Исследованию линейчатой неголономной геометрии посвящены преимущественно работы, выполненные в Вильнюсском геометрическом семинаре под руководством К. И. Гринцевичюса и затем В. И. Близникаса.

3. Исходные понятия теории сетей на многообразиях в терминах векторных полей и распределений на многообразиях сформулированы В. П. Базылевым в работе [1]. Такой подход к заданию сети в n-мерном проективном пространстве позволяет рассматривать сеть как многообразие интегральных кривых n распределений 1-мерных линейных элементов в многообразии P^0-структуры. С этих позиций рассматривается вторым автором настоящей статьи сеть, введенная в многообразии P^0-структуры, оснащенном полем $\Lambda(g)$ (см. § 5).

§ 5. ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ P^0-СТРУКТУРЫ С ОСНАЩЕННОЙ БАЗОЙ

Рассмотрим расслоенное пространство проективной структуры, в котором образующий объект базы подобный образующему объекту слоя. Если на базе задано поле образующего объекта и тем самым в каждом слое зафиксирован образующий объект — опорный образ, то слоями являются геометрические элементы в смысле Г. Ф. Лаптева. Возникает многообразие опорных образов, которое мы отождествляем с базой (отождествление происходит на основе возникающего точечного соответствия, устанавливаемого полем опорных образов). Это расслоенное многообразие проективной структуры названо (см. § 2) расслоенным многообразием P^0-структуры. Фундаментальная группа слоя редуцируется до стационарной подгруппы опорного образа.

Образующим объектом слоя будем считать точку n-мерного проективного пространства P_n. Следовательно, опорным образом также будет точка, а структурной группой в этом случае будет центропроективная группа. Это расслоенное многообразие P^0-структуры с n-мерной базой M_n будем обозначать $P_n{}^0$.

Пусть на базе задано поле геометрического объекта $\{\Lambda^{\alpha}_{i}\}$ присоединенного к центропроективной группе и определяющего поле m-мерных линейных элементов или поле центрированных m-мерных плоскостей. Считается, что центр элемента совпадает с опорным образом соответствующего слоя. Это поле выделяет в многообразии P^0_n подрасслоение, слоями которого являются m-мерные геометрические элементы с тем же опорным образом (Λ-подрасслоение). Исследование проводится в предположении, что репер в слое центропроективный. Структурная группа индуцирует в слоях Λ-подрасслоения структурную группу — подгруппу полной линейной группы $\mathrm{Gl}(m+1, R)$ — с инвариантными формами $\overline{\theta}^i_j=\overline{\omega}^i_j+\Lambda^{\alpha}_j\overline{\omega}^i_{\alpha}$, $\overline{\theta}^0_j=\overline{\omega}^0_j+\Lambda^{\beta}_j\overline{\omega}^0_{\beta}$, $\overline{\theta}^0_0=\overline{\omega}^0_0$, изоморфную центропроективной группе m-мерного (точечного) проективного пространства. Слои Λ_x одновременно можно рассматривать как пространства направлений Λ^*_x (по терминологии А. В. Чакмазяна [77]), в которых действует подгруппа $\mathrm{Gl}(m, R)$ группы $\mathrm{Gl}(m+1, R)$. Соответствующее подрасслоение будем называть Λ^*-подрасслоением. Инвариантными формами подгруппы $\mathrm{Gl}(m, R)$ являются формы $\overline{\theta}^i_j$. В слоях Λ-подрасслоения вводится репер $\{M_0, T_i\}$, где $T_i = M_i + \Lambda^\alpha_i M_\alpha$, причем его вершины T_i включаются в новый репер $\{M_0, T_i, M_\alpha\}$ в текущем слое P_n многообразия P^0-структуры. При дальнейшем изложении используется этот репер $\{M_0, T_i, M_\alpha\}$, вершины которого задаются своими разложениями по вершинам подвижного центропроективного репера $\{M_{\overline{I}}\}$, а также различные специализированные реперы.

Поле геометрического объекта $\{\Lambda^\alpha_i\}$:

$$d\Lambda^\alpha_i - \Lambda^\alpha_j \theta^j_i + \Lambda^\beta_i \omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{iK}\omega^K_0 \tag{5.1}$$

порождает распределение линейных элементов на базе, поэтому здесь может быть использована терминология, которая применяется при изучении полей геометрических объектов и распределений.

Пусть на базе задано поле дважды ковариантного симметрического объекта g_{ij} [3]

$$\overset{(\theta)}{\nabla} g_{ij} = g_{ijK}\omega^K_0, \tag{5.2}$$

присоединенного к группе $\mathrm{Gl}(m, R)$. Поле этого объекта определяет в слоях Λ-подрасслоения невырожденный $(m-1)$-мерный конус g второго порядка, вершина которого совпадает с опорным образом слоя. Такое многообразие $P_n{}^0$, в котором задано Λ-подрасслоение с заданным в каждом слое конусом g (т. е. $\Lambda(g)$-подрасслоение), назовем расслоенным многообразием $P_n{}^0(\Lambda(g))$-структуры, или, кратко, многообразием $P^0(\Lambda(g))$.

Исследуется дифференциальная геометрия $\Lambda(g)$-подрасслоения в многообразии $P^0(\Lambda(g))$.

На протяжении изложения данного параграфа индексы принимают следующие значения:

$$\overline{I}, \overline{K}, \overline{L}, \ldots = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad I, K, L, \ldots = 1, 2, \ldots, n;$$
$$i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, m; \quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n;$$
$$u, v, w, \ldots = m+1, \ldots, n-1; \quad a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1;$$
$$\rho, \tau, \sigma, \ldots = 1, 2, \ldots, n-m-1; \; a_\rho, b_\rho, \ldots = \rho+1, \ldots, n-1;$$
$$i_\rho, j_\rho, \ldots = \rho+1, \ldots, m \text{ (при } n-m<m).$$

1. Структуры, индуцированные в многобразии $P^0(\Lambda(g))$ оснащающим полем $\Lambda(g)$

1. Задание на базе M_n поля геометрического объекта $\{H_a{}^n\}$, присоединенного к центропроективной группе, выделяет в многообразии $P^0(\Lambda(g))$ подрасслоение, слоями которого яв-

ляются гиперплоскости H n-мерного проективного пространства P_n, со структурным объектом $H_a{}^n$. Если центр элемента H_x совмещен с центром элемента Λ_x и $\Lambda_x \subset H_x$, то H-подрасслоение порождает гиперполосное распределение $H(\Lambda(g))$ [3] или поле гиперплоскостных элементов, оснащенных базисным полем $\Lambda(g)$. При этом подрасслоение $\Lambda(g)$ называется базисным подрасслоением $H(\Lambda(g))$-подрасслоения.

Установлено [3], что величины $H^n_u = -\frac{g_{ij}\mathcal{W}^{ij}_u}{g_{kl}V^{kl}_n}$, $H^n_i = \Lambda^n_i - \Lambda^u_i H^n_u$ образуют структурный объект распределения $H(\Lambda(g))$ и, следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема. С подрасслоением $\Lambda(g)$ на первой дифференциальной окрестности естественно ассоциируется $H(\Lambda(g))$-подрасслоение, для которого подрасслоение $\Lambda(g)$ является базисным.

Подрасслоение $H(\Lambda(g))$ будем называть регулярным, если гиперполосное распределение $H(\Lambda(g))$ регулярно.

В дальнейшем предполагается, что $H(\Lambda(g))$-подрасслоение регулярно.

Для таких $H(\Lambda(g))$-подрасслоений тензор

$$W_{ij}{}^n = \Lambda_{ij}{}^n + \Lambda_{iv}{}^n \Lambda_j{}^v \tag{5.3}$$

является невырожденным [3].

2. В этом пункте остановимся на фокальных образах, которые ассоциируются с $\Lambda(g)$-подрасслоением. В слоях $H(\Lambda(g))$-подрасслоения вводится репер, определяемый точками

$$T_0 = M_0,\ T_i = M_i + \Lambda_i{}^u M_u,\ T_u = M_u. \tag{5.4}$$

Его вершины включаются в репер $R_T(H) = \{T_{\bar{J}}\}$ $(T_n = M_n)$ текущего слоя P_n, который адаптирован слоями $H(\Lambda(g))$-подрасслоения без требования, что вершины M_i помещены в базисный слой.

Одним из фокальных образов, ассоциированных с $\Lambda(g)$-подрасслоением, является характеристика K_x слоя H_x подрасслоения $H(\Lambda(g))$ при смещении центра T_0 по кривым, принадлежащим $\Lambda(g)$-подрасслоению. Характеристика K_x в репере $R_T(H)$ определяется геометрическим объектом $\tilde{K}^i_u$ [3]:

$$\tilde{K}^i_u \overset{\text{def}}{=} -W^n_{uj} W^{ji}_n, \quad \overset{(\theta)}{\nabla} \tilde{K}^i_u + \theta^i_u = \tilde{K}^i_{uL}\omega^L_0. \tag{5.5}$$

Замечание 1. Знак «$\sim$» означает, что эти величины найдены в репере $R_T(H)$.

Замечание 2. Все геометрические образы, которые ассоциируются с $\Lambda(g)$-подрасслоением, рассматриваемым как базисное подрасслоение $H(\Lambda(g))$-подрасслоения, будем называть H-виртуальными геометрическими образами.

Характеристику K_x можно интерпретировать как H-виртуальную нормаль первого рода плоскости Λ_x (т. е. как нормаль второго рода плоскости Λ_x внутри гиперплоскости H_x).

Следовательно, поле объекта $\{\tilde{K}^i_u\}$ выделяет в многообразии $P^0(\Lambda(g))$ K-подрасслоение или поле H-виртуальных нормалей первого рода распределения $\Lambda(g)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. $H(\Lambda(g))$-подрасслоение является регулярным тогда и только тогда, когда слои K-подрасслоения и Λ-подрасслоения имеют одну общую точку — центр T_0.

В текущем слое K-подрасслоения строится фокальное многообразие размерности $(n-m-2)$, соответствующее слою $\Lambda(g)$-подрасслоения и ассоциированное с одномерной нормалью ν_x [3], — фокальное многообразие $\Phi_{n-m-2}(\Lambda)$. Это фокальное многообразие в репере $R_T(H)$ определяется системой уравнений:

$$\begin{gathered}\det\|y^0\delta^i_j + y^u[\hat{K}^i_{uj} - W^v_{ij}\tilde{K}^i_v\tilde{K}^i_u - \\ -(W^n_{uj} + W^n_{ij}\tilde{K}^i_u)(\tilde{\nu}^i_n - \tilde{\nu}^v_n\tilde{K}^i_v)]\| = 0, \\ y^i - \tilde{K}^i_u y^u = 0, \quad y^n = 0.\end{gathered} \tag{5.6}$$

Аналогично можно построить в текущем слое $\Lambda(g)$-подрасслоения фокальное многообразие $\varphi_{m-1}(K)$, размерности $(m-1)$, соответствующее H-виртуальной нормали первого рода K и ассоциированное с одномерной нормалью ν. В репере $R_T(H)$ фокальное многообразие $\varphi_{m-1}(K)$ определяется системой уравнений [3]:

$$\det\|y^0\delta^u_v + y^i[\Lambda^u_{iv} + W^u_{ij}\tilde{K}^j_v - (\Lambda^n_{iv} + W^n_{ij}\tilde{K}^j_v)\tilde{\nu}^u_n]\| = 0, \quad y^\alpha = 0. \tag{5.7}$$

Линейная поляра центра T_0 относительно фокального многообразия $\Phi_{n-m-2}(\Lambda)$ определяется геометрическим объектом $\{\tilde{k}_u, \tilde{K}^i_u\}$, где

$$\tilde{k}_u \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{m}[\hat{K}^i_{ui} - W^v_{ii}\tilde{K}^i_v\tilde{K}^i_u - (W^n_{ui} + W^n_{ii}\tilde{K}^i_u)(\tilde{\nu}^i_n - \tilde{K}^i_v\tilde{\nu}^v_n)], \tag{5.8}$$

который определяет в плоскости K_x $(n-m-2)$-мерную плоскость k_x, не проходящую через центр.

Следовательно, поле объекта $\{\tilde{k}_u, \tilde{K}^i_u\}$ определяет в многообразии $P^0(\Lambda(g))$ поле H-виртуальных оснащающих по Картану плоскостей k распределения $\Lambda(g)$.

Линейная поляра центра относительно фокального многообразия $\varphi_{m-1}(K)$ определяется геометрическим объектом $\{\tilde{b}_i\}$, где

$$\tilde{b}_i \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1}[\Lambda^u_{iu} + W^u_{ij}\tilde{K}^j_u - (\Lambda^n_{iu} + W^n_{ij}\tilde{K}^j_u)\tilde{\nu}^u_n]. \tag{5.9}$$

Этот объект определяет в слое Λ_x $\Lambda(g)$-подрасслоения $(m-1)$-мерную плоскость b_x, не проходящую через центр. Следовательно, поле объекта $\{\tilde{b}_i\}$ выделяет в слоях $\Lambda(g)$-подрасслоения $(m-1)$-мерные подпространства, т. е. является полем нормалей второго рода распределения $\Lambda(g)$, соответствующих в обобщенном проективитете Бомпьяни — Пантази, ассоциированном с одномерной нормалью ν, H-виртуальной нормали первого рода K.

Найденные поля плоскостей b и k определяют в слоях $H(\Lambda(g))$-подрасслоения $(n-2)$-мерные подпространства j_x [3], не проходящие через центр, со структурным геометрическим объектом $\{\tilde{j}_a\}$:

$$\tilde{j}_i=\tilde{b}_i, \quad \tilde{j}_u=\tilde{k}_u-\tilde{b}_i\tilde{K}^i_u, \quad \overset{(\theta)}{\nabla}\tilde{j}_a+\theta^0_a=\tilde{j}_{aK}\omega^K_0. \tag{5.10}$$

Поле объекта $\{\tilde{j}_a\}$ определяет поле плоскостей Нордена — Тимофеева j [3] гиперполосного распределения $H(\Lambda(g))$.

К числу фокальных образов, ассоциированных с $\Lambda(g)$-подрасслоением, относятся:

а) Асимптотические направления $\Lambda(g)$-подрасслоения, которые в репере $R_T(H)$ определяются системой уравнений

$$\mathcal{W}^\alpha_{ij}\mu^i\mu^j=0 \quad (\mu^\alpha=0), \tag{5.11}$$

где

$$\mathcal{W}^\alpha_{ij}=\frac{1}{2}(W^\alpha_{ij}+W^\alpha_{ji}), \quad W^\alpha_{ij}=\Lambda^\alpha_{ij}+\Lambda^\alpha_{i\beta}\Lambda^\beta_j.$$

б) Асимптотические направления $H(\Lambda(g))$-подрасслоения, определяемые в репере $R_T(H)$ системой уравнений:

$$H^n_{(ab)}\mu^a\mu^b=0 \quad (\mu^n=0),$$

$$H^n_{(ab)}=\frac{1}{2}(H^n_{ab}+H^n_{ba}), \quad \nabla H^n_{ab}=H^n_{abK}\omega^K_0. \tag{5.12}$$

в) Так называемые «слабо»-асимптотические направления $H(\Lambda(g))$-подрасслоения, определяемые в репере $R_T(H)$ системой уравнений

$$W^n_{(i}{}^j{}_{)}\mu^i\mu^j=0 \qquad (\mu^\alpha=0), \tag{5.13}$$

которые характеризуются тем, что точка $M_0+dM_0+\frac{1}{2}d^2M_0$ принадлежит слою $H(\Lambda(g))$-подрасслоения при смещении центра по кривым, принадлежащим базисному подрасслоению.

3. Задание на базе поля объекта $\{\nu_\alpha{}^i\}$ выделяет в многообразии $P^0(\Lambda(g))$-подрасслоение, слоями которого являются $(n-m)$-мерные плоскости, имеющие со слоями $\Lambda(g)$-подрасслоения только одну общую точку T_0. ν-подрасслоение будем называть нормальным расслоением $\Lambda(g)$-подрасслоения.

Пусть $\tilde{J}^a_n$, $\tilde{M}^a_n$ [4] — структурные объекты полей одномерных линейных элементов, определяющих одномерные нормальные расслоения $H(\Lambda(g))$-подрасслоения (т. е. поля нормалей M и J первого рода гиперполосного распределения $H(\Lambda(g))$).

Справедливы следующие утверждения.

1) Поля объектов $\tilde{M}^a_n$ и $\tilde{J}^a_n$ определяют однопараметрическое семейство (M, J) одномерных нормальных расслоений $H(\Lambda(g))$-расслоения.

Инвариантным подпространствам b в слоях $\Lambda(g)$-подрасслоения соответствует поле H-виртуальных нормалей первого рода B распределения $\Lambda(g)$, определяемое геометрическим объектом $\{\tilde{B}^i_u\}$.

2) С $\Lambda(g)$-подрасслоением ассоциируется однопараметрическое семейство (K, B) H-виртуальных нормалей первого рода.

Однопараметрические семейства (K, B) и (M, J) порождают двухпараметрическое семейство нормалей первого рода распределения $\Lambda(g)$.

3) С $\Lambda(g)$-подрасслоением ассоциируется двупараметрическое семейство нормальных расслоений.

Наличие H-виртуальной нормали первого рода K $\Lambda(g)$-распределения и пучка (M, J) одномерных нормалей $H(\Lambda(g))$-распределения порождает естественно возникающее семейство двойственных нормализаций [77] распределения $\Lambda(g)$.

4) С $\Lambda(g)$-подрасслоением естественно ассоциируется однопараметрическое семейство двойственных нормальных расслоений с общим «центром» — плоскостью K_x.

4. Подрасслоение $\Lambda(g)$ будем называть оснащенным по Картану, если к нему присоединено заданное на базе M_n поле геометрического объекта $\{\nu_\alpha, \nu_\alpha{}^i\}$, определяющего в текущем слое многообразия $P^0(\Lambda(g))$ $(n-m-1)$-мерное подпространство, не имеющее общих точек с соответствующим слоем Λ_x.

Задание поля объекта $\{\tilde{L}^i_\alpha\}$ $(\tilde{L}^i_u=\tilde{K}^i_u,\quad \tilde{L}^i_n=\tilde{J}^i_n-K^i_u\tilde{J}^n_u)$ выделяет в многообразии $P_0(\Lambda(g))$ нормальное расслоение L (ассоциированное с полем инвариантной нормали J) $\Lambda(g)$-подрасслоения. Поле объекта $\{\tilde{l}_\alpha, \tilde{L}^i_\alpha\}$ [4] выделяет в слоях нормального расслоения L инвариантные $(n-m-1)$-мерные подпространства l (оснащающие подпространства — обобщенная плоскость Кенигса [40]). Аналогично поле объекта $\{\tilde{S}_\alpha, \tilde{L}^i_a\}$ [4] выделяет в слоях нормального расслоения L инвариантное оснащающее подпространство S $\Lambda(g)$-подрасслоения, проходящее через H-виртуальное оснащающее подпространство k $\Lambda(g)$-подрасслоения и точку Кенигса P нормали J. Справедливо следующее утверждение.

С $\Lambda(g)$-подрасслоением естественно ассоциируется однопараметрическое семейство оснащающих подпространств в нормальном L-расслоении («связка» $(n-m-1)$-мерных подпространств с общим центром — H-виртуальной оснащающей плоскостью k распределения $\Lambda(g)$ — и базисными подпространствами l и S).

Замечание. Аналогичная конструкция может быть ассоциирована с полем любой инвариантной одномерной нормали пучка (M, J).

5. Определение. Распределение $\Lambda(g)$, заданное в многообразии $P^0(\Lambda(g))$, назовем дополнительно реперированным, если к распределению $\Lambda(g)$ присоединены $(n-m)$ полей прямых, определяющих в текущем слое $(n-m)$-мерную плоскость, пересекающую плоскость соответствующего элемента распределения $\Lambda(g)$ лишь в центре элемента.

В основу построения дополнительно реперированного $\Lambda(g)$-подрасслоения положена [4] нормаль Михэйлеску M гиперполосного распределения $H(\Lambda(g))$.

Заданием на базе полей объектов

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\tilde{C}^1_{a_1}-\tilde{C}^1_{a_1}\tilde{C}^1_{b_1}\theta^{b_1}_1+\theta^1_{a_1}=\tilde{C}^1_{a_1K}\omega^K_0$$

$$\left(\tilde{C}_a\overset{\text{def}}{=}\tilde{j}_a-\tilde{m}_a,\ \tilde{C}^1_{a_1}\overset{\text{def}}{=}-\frac{\tilde{C}_{a_1}}{\tilde{C}_1},\ \tilde{C}_1\neq 0\right), \tag{5.14}$$

$$\tilde{T}^a_n\overset{\text{def}}{=}\tilde{J}^a_n-\tilde{M}^a_n,\quad \overset{(\theta)}{\nabla}\tilde{T}^a_n=\tilde{T}^a_{nK}\omega^K_0 \tag{5.15}$$

выделяются в слоях $H(\Lambda(g))$-подрасслоения соответственно $(n-2)$-мерное подпространство C_x и одномерное подпространство $\varkappa_x$, проходящие через соответствующий опорный образ T_0, которые натягивают слой H_x данного подрасслоения. Прямую $\varkappa_x$ можно интерпретировать как H-виртуальную нормаль первого рода C-распределения.

Наряду с подпространством C_x в слоях $H(\Lambda(g))$-подрасслоения естественно возникает $(n-3)$-мерное подпространство r_x, принадлежащее подпространству C_x, которое определяется заданием на базе поля объекта $\{\tilde{r}_{a_1}\}$, определенного в репере $R_T(H, C)$ уравнениями:

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\tilde{r}_{a_1}+\theta^0_{a_1}=\tilde{r}_{a_1K}\omega^K_0,\quad \tilde{r}_{a_1}=\tilde{m}_{a_1}. \tag{5.16}$$

Подпространство r_x можно интерпретировать как H-виртуальную нормаль второго рода C-распределения.

Поле объекта $\tilde{\Pi}^1_n$ (в репере $R_T(H, C)$):

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\tilde{\Pi}^1_n+\theta^1_n=\tilde{\Pi}^1_{nK}\omega^K_0,\quad \tilde{\Pi}^1_n\overset{\text{def}}{=}\tilde{J}^1_n \tag{5.17}$$

определяет П-подрасслоение, слоями которого являются гиперплоскости П, натянутые на плоскость C и одномерную нормаль J. Справедливо утверждение.

Существует однопараметрическое семейство расслоений одномерных элементов $R(\sigma)$ в слоях многообразия $P^0(\Lambda(g))$ таких, что характеристика p слоя П-подрасслоения при смещении центра по кривым, принадлежащим любому R-расслоению семейства, проходит через плоскость r_x.

Слой H_x сечет соответствующую двумерную плоскость семейства одномерных нормалей $R(\sigma)$ по прямой R_0, не принадлежащей слою $\Lambda(g)$-подрасслоения, которая характеризуется тем, что

$$\underset{0}{\widetilde{R}}{}_1^{a_1} = -W_1^{a_1 c_1}(\widetilde{r}_{c_1} + Q_{c_1 1}^1), \quad \overset{(\theta)}{\nabla} \underset{0}{\widetilde{R}}{}_1^{a_1} + \theta_1^{a_1} = \underset{0}{\widetilde{R}}{}_{1K}^{a_1} \underset{0}{\omega}{}^K, \tag{5.18}$$

где

$$W_{a_1 b_1}^1 \overset{\mathrm{def}}{=} \hat{C}_{a_1 b_1}^1 - \widetilde{\Pi}_n^1 \hat{A}_{a_1 b_1}^n, \quad Q_{a_1 1}^1 \overset{\mathrm{def}}{=} \hat{C}_{a_1 1}^1 - \widetilde{\Pi}_n^1 \hat{A}_{a_1 1}^n,$$

$$\{\hat{A}_{a_1 K}^n\} = \{\widetilde{A}_{a_1 j}^n + \widetilde{A}_{a_1 v}^n \Lambda_j^v, \ \widetilde{A}_{i\alpha}^n\}, \quad \{\widetilde{A}_{aK}^n\} = \{\Lambda_{iK}^n, \ H_{uK}^n\},$$

$$\overset{(\theta)}{\nabla} W_{a_1 b_1}^1 = W_{a_1 b_1 K}^1 \omega_0^K, \quad \overset{(\theta)}{\nabla} Q_{a_1 1}^1 - W_{a_1 b_1}^1 \theta_1^{b_1} - \theta_{a_1}^0 = Q_{a_1 1K}^1 \omega_0^K.$$

Замечание. Прямую R_0 (5.18) можно интерпретировать как H-виртуальную нормаль первого рода C-распределения, соответствующую в обобщенном проективитете Бомпьяни — Пантази, ассоциированном с одномерной нормалью J, H-виртуальной нормали второго рода r C-распределения.

Характеристика β_x слоя П-подрасслоения при смещении центра по кривым, принадлежащим $\varkappa$-распределению, пересекает плоскость r по $(n—4)$-мерной плоскости r_1, которая вместе с центром T_0 определяет внутри плоскости C $(n—3)$-мерную плоскость C_1. Поля объектов (заданные в репере $R_T(H, C, C_1)$ [5]):

$$\theta_{a_2}^2 = \underset{1}{\widetilde{C}}{}_{a_2 K}^2 \omega_0^K \tag{5.19}$$

и

$$\overset{(\theta)}{\nabla} \underset{1}{\widetilde{r}}{}_{a_2} + \theta_{a_2}^0 = \widetilde{r}_{a_2 K} \omega_0^K \tag{5.20}$$

определяют, соответственно, распределение плоскостей C_1 и r_1.

Замечание. Плоскость r_1 можно интерпретировать как C-виртуальную нормаль второго рода плоскости C_1. Найдем C-виртуальную одномерную нормаль первого рода R_1 плоскости C_1, соответствующую в обобщенном проективитете Бомпьяни — Пантази, ассоциированном с одномерными нормалями J и $\varkappa$, C-виртуальной нормали r_1. Для этого выделим в многообразии $P^0(\Lambda(g))$ Π_1-подрасслоение, слоями которого являются гиперплоскости Π_1, натянутые на плоскость C_1 и прямые J и $\varkappa$. Π_1-подрасслоение будет выделяться заданием на базе поля, определяемого (в репере $R_T(H, C, C_1)$) уравнениями:

$$\overset{(\theta)}{\nabla} \widetilde{\Pi}_1^2 + \theta_1^2 = \widetilde{\Pi}_{1K}^2 \omega_0^K, \quad \widetilde{\Pi}_1^2 \overset{\mathrm{def}}{=} \underset{0}{\widetilde{\varkappa}}{}_1^2, \tag{5.21}$$

$$\overset{(\theta)}{\nabla} \widetilde{\Pi}_n^2 - \widetilde{\Pi}_1^2 \theta_n^1 + \theta_n^2 = \widetilde{\Pi}_{nK}^2 \omega_0^K, \quad \widetilde{\Pi}_n^2 \overset{\mathrm{def}}{=} \widetilde{J}_n^2 - \widetilde{\Pi}_1^2 \widetilde{J}_n^1. \tag{5.22}$$

Как и в предыдущем случае, потребуем, чтобы характеристика p_1 слоя Π_1-подрасслоения при смещении центра по кривым

$$\theta_0^{a_2} = \underset{1}{\widetilde{R}}{}_2^{a_2} \theta_0^2, \ \theta_0^1 = 0, \ \theta_0^n = 0, \ \theta_0^2 = \rho^2 \theta \qquad (\theta \neq 0, \ D\theta = \theta \wedge \theta_1) \tag{5.23}$$

проходила через плоскость r_1. Это требование и определит искомую C-виртуальную нормаль первого рода R_1 плоскости C_1:

$$\underset{1}{\tilde{R}}{}_2^{a_2}=-W_2^{a_2c_2}(\underset{1}{\tilde{r}}{}_{c_2}+Q^2_{c_22}),\quad \overset{(\theta)}{\nabla}\underset{1}{\tilde{R}}{}_2^{a_2}+\theta_2^{a_2}=\underset{1}{\tilde{R}}{}^{a_2}_{2K}\omega_0^K, \tag{5.24}$$

где

$$W^2_{a_2b_2}\overset{\text{def}}{=}\hat{C}^2_{a_2b_2}-\tilde{\Pi}^2_1\hat{C}^2_{a_2b_2}-\tilde{\Pi}^2_n\hat{A}^n_{a_2b_2},$$
$$Q^2_{a_22}\overset{\text{def}}{=}\hat{C}^2_{a_22}-\tilde{\Pi}^2_1\hat{C}^2_{a_22}-\tilde{\Pi}^2_n\hat{A}^n_{a_22}. \tag{5.25}$$

Найденная прямая R_1 также не принадлежит слою $\Lambda(g)$-подрасслоения.

Продолжая этот процесс дальше, мы получим последовательность вложенных друг в друга геометрических объектов

$$\underset{0}{\tilde{R}}{}_1^{a_1}=-W_1^{a_1c_1}(\tilde{r}_{c_1}+Q^1_{c_11}),$$
$$\underset{1}{\tilde{R}}{}_2^{a_2}=-W_2^{a_2c_2}(\tilde{r}_{c_2}+Q^2_{c_22}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\underset{(\tau-1)}{\tilde{R}}{}_\tau^{a_\tau}=-W_\tau^{a_\tau c_\tau}(\tilde{r}_{c_\tau}+Q^\tau_{c_\tau\tau}), \tag{5.26}$$

определяющих внутри слоя H_x $H(\Lambda(g))$-подрасслоения последовательность линейно независимых одномерных подпространств $R_0, R_1, \ldots, R_{\tau-1}$, не принадлежащих слоям Λ_x базисного распределения. Одномерные подпространства $R_0, R_1, \ldots, R_{n-m-2}$ вместе с одномерной нормалью J натягивают слой нормального расслоения $\Lambda(g)$-подрасслоения. Справедлива следующая теорема.

Теорема. В дифференциальной окрестности порядка $(n-m+2)$ может быть построена последовательность вложенных друг в друга $(n-m-1)$ полей геометрических объектов, определяющих вместе с полем инвариантных нормалей J дополнительное реперирование $\Lambda(g)$-подрасслоения.

Замечание. Алгоритм может быть использован для построения аналогичных систем, определяющих дополнительное реперирование $\Lambda(g)$-расслоения, ассоциированное с различными нормальными расслоениями $H(\Lambda(g))$-подрасслоения.

6. Текущий слой C C-подрасслоения пересекает соответствующий слой $\Lambda(g)$-подрасслоения по $(m-1)$-мерной плоскости Λ_1. Слой C_1 C_1-подрасслоения сечет плоскость Λ_1 по $(m-2)$-мерной плоскости Λ_2 и т. д. Таким образом, при построении подрасслоений одномерных элементов $R_0, R_1, \ldots, R_{\tau-1}$ плоскости $C_0, C_1, \ldots, C_{\tau-1}$, возникающие в слое H_x подрасслоения $H(\Lambda(g))$, высекают из слоя $\Lambda_x\equiv\Lambda_0$ $\Lambda(g)$-подрасслоения последовательность вложенных друг в друга плоскостей $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_\tau$, размерность которых на каждом шаге на единицу убывает. Справедлива следующая теорема.

Теорема. На дифференциальной окрестности порядка не выше $(n-m+2)$ в слоях $\Lambda(g)$-подрасслоения при $n-m-1 \geqslant m$ определяется флаговая структура, а при $n-m-1 < m$ — обобщенно флаговая (ступенчатая) структура [62].

В случае, когда в слоях $\Lambda(g)$-подрасслоения определяется флаговая структура, в слое Λ_x можно построить m линейно независимых инвариантных одномерных направлений, определяющих m полей прямых. В качестве таких направлений можно выбрать направления $l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}$, сопряженные, соответственно, многомерным направлениям $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{m-1}$ относительно конуса g, дополнив их направлением $\Lambda_{m-1}=l_m$, которые индуцируют сеть линий [1] в слоях $\Lambda(g)$-подрасслоения. Поля одномерных нормалей $J, R_0, \ldots, R_{n-m-2}$, определяющих дополнительное реперирование $\Lambda(g)$-подрасслоения вместе с полями прямых $l_1, l_2, \ldots, l_m$, индуцируют в слоях многообразия $P^0(\Lambda(g))$ сеть линий, внутренне связанную с $\Lambda(g)$-подрасслоением. Справедлива следующая теорема.

Теорема. На дифференциальной окрестности порядка не выше $(n-m+2)$ при $n-m-1 \geqslant m$ $\Lambda(g)$-подрасслоение индуцирует в слоях многообразия $P^0(\Lambda(g))$ сеть линий.

Одномерные направления $R_0, R_1, \ldots, R_{n-m-2}$ определяют H-виртуальную нормаль N_x первого рода слоя Λ_x. H-виртуальные нормали K_x и N_x определяют однопараметрическое семейство H-виртуальных нормалей (K, N) первого рода слоя Λ_x. В слое Λ_x семейству (K, N) соответствует $(n-m-1)$-мерная плоскость A_x. Таким образом в слое Λ_x имеем две площадки A и Λ_{n-m-1} дополнительных размерностей, которые определяются, соответственно, объектами $\{\tilde{A}^{l\tau}_{\tau}\}$ и $\{\tilde{C}^{\tau}_{l_\tau}\}$. Поля объектов $\{\tilde{A}^{l\tau}_{\tau}\}$ и $\{\tilde{C}^{\tau}_{l_\tau}\}$ определяют в слоях $\Lambda(g)$-подрасслоения π-структуру.

Справедливы следующие утверждения.

1. На дифференциальной окрестности порядка не выше $(n-m+2)$ в слоях $\Lambda(g)$-подрасслоения естественно определяется π-структура.

2. Поля объектов $\{\tilde{K}^{l}_{u}\}$ и $\{\tilde{\Lambda}^{u}_{l}\}$ в слоях $H(\Lambda(g))$-подрасслоения определяют π-структуру на второй дифференциальной окрестности.

2. Связности в многообразии $P_0(\Lambda(g))$-структуры

1. Формы $\omega^{\bar{I}}_{\bar{K}}$ в слоях многообразия $P^0(\Lambda(g))$ тогда и только тогда будут определять проективную связность, когда они будут удовлетворять структурным уравнениям Картана—Лаптева [33], [67]:

$$D\omega^{\bar{I}}_{\bar{K}}=\omega^{\bar{L}}_{\bar{K}}\wedge\omega^{\bar{I}}_{\bar{L}}+R^{\bar{I}}_{\bar{K}LM}\omega^{L}_{0}\wedge\omega^{M}_{0}. \tag{5.27}$$

Будем считать, что реперы адаптированы $\Lambda(g)$-подрасслоению (репер $\underline{R}(\Lambda)$).

Формы $\omega_{\bar{j}}^{\bar{i}}$ таким уравнениям не удовлетворяют, однако если ввести преобразованные формы

$$\hat{\omega}_{\bar{j}}^{\bar{i}}=\omega_{\bar{j}}^{\bar{i}}-\gamma_{\bar{j}K}^{\bar{i}}\omega_0^K \qquad (5.28)$$

и потребовать, чтобы функции $\gamma_{\bar{j}K}^{\bar{i}}$ удовлетворяли уравнениям:

$$\nabla\gamma_{\bar{j}K}^{\bar{i}}+\Lambda_{\bar{j}K}^{\alpha}\omega_{\alpha}^{\bar{i}}=\gamma_{\bar{j}KL}^{\bar{i}}\omega_0^L, \qquad (5.29)$$

где $\Lambda_{\bar{j}K}^{\alpha}$ — компоненты фундаментального объекта распределения $\Lambda(g)$, т. е. задать поле объекта $\gamma=\{\gamma_{\bar{j}K}^{\bar{i}}, \Lambda_{\bar{j}K}^{\alpha}\}$, то введенные формы (5.28) будут удовлетворять уравнениям вида (5.27) и, следовательно, будут определять в слоях $\Lambda(g)$-подрасслоения проективную связность γ.

Замечания. 1. Компоненты $\{\gamma_{\bar{j}K}^{i}, \gamma_{0K}^{0}, \Lambda_{jK}^{\alpha}\}$ образуют подобъект объекта γ, которым можно охватить объект $\bar{\gamma}$, индуцирующий в $\Lambda(g)$-подрасслоении аффинную связность.

Формы связности $\hat{\omega}_0^i$, $\hat{\omega}_j^i$ получаются преобразованием вида (5.28) форм $\tilde{\omega}_{\bar{j}}^{\bar{i}}=\omega_{\bar{j}}^{\bar{i}}-\delta_{\bar{j}}^{\bar{i}}\omega_0^0$.

2. Компоненты $\{\gamma_{\bar{j}K}^{i}, \Lambda_{jK}^{\alpha}\}$ образуют подобъект объекта γ, которым можно охватить объект $\overset{0}{\gamma}$, индуцирующий линейную связность в Λ^*-расслоении. Эту связность $\overset{0}{\gamma}$ назовем подчиненной линейной связностью. Формы связности получаются преобразованием вида (5.28) форм $\tilde{\omega}_j^i$.

Связность будет внутренне определена $\Lambda(g)$-подрасслоением, если все компоненты объекта γ будут функциями компонент фундаментального объекта некоторого порядка.

Формулы охвата компонент $\gamma_{\bar{j}K}^{\bar{i}}$, аналогичного построенному в работе Г. Ф. Лаптева и Н. М. Остиану [40], имеют вид:

$$\overset{1}{\gamma}{}_{0j}^{i}=0, \quad \overset{1}{\gamma}{}_{0\alpha}^{i}=H_{\alpha}^{i}, \quad \overset{1}{\gamma}{}_{0j}^{0}=0, \quad \overset{1}{\gamma}{}_{0\alpha}^{0}=H_{\alpha},$$

$$\overset{1}{\gamma}{}_{jk}^{i}=H_{\alpha}^{i}\Lambda_{jk}^{\alpha}, \quad \overset{1}{\gamma}{}_{j\alpha}^{i}=H_{\beta}^{i}\Lambda_{j\alpha}^{\beta}, \quad \overset{1}{\gamma}{}_{jk}^{0}=H_{\beta}\Lambda_{jk}^{\beta}, \quad \overset{1}{\gamma}{}_{j\alpha}^{0}=H_{\beta}\Lambda_{j\alpha}^{\beta}. \qquad (5.30)$$

Формулы (5.30) определяют связность, полученную проектированием при помощи оснащающей плоскости, определенной объектом $\{H_{\alpha}, H_{\alpha}^{i}\}$ [40].

Можно привести более общие формулы охвата, используя объект $\{H_{\alpha}, H_{\alpha}^{i}\}$ и тензор M_j^i [40]:

$$\overset{2}{\gamma}{}_{0j}^{i}=M_j^i, \quad \overset{2}{\gamma}{}_{0\alpha}^{i}=H_{\alpha}^{i}-M_k^iH_{\alpha}^{k}, \quad \overset{2}{\gamma}{}_{0k}^{0}=M_k^ib_i,$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{2}{\gamma}{}^{0}_{0\alpha}=H_{\alpha}-\overset{2}{\gamma}{}^{0}_{0k}H^{k}_{\alpha}, \quad \overset{2}{\gamma}{}^{i}_{jk}=\Lambda^{\alpha}_{jk}H^{i}_{\alpha}-M^{i}_{k}b_{j},\\
&\overset{2}{\gamma}{}^{0}_{ik}=\Lambda^{\alpha}_{ik}\left(H_{\alpha}-H^{j}_{\alpha}b_{j}\right)+\overset{2}{\gamma}{}^{j}_{ik}b_{j},\\
&\overset{2}{\gamma}{}^{j}_{i\beta}=\Lambda^{\alpha}_{i\beta}H^{j}_{\alpha}+\left(\Lambda^{\alpha}_{ik}H^{j}_{\alpha}-\overset{2}{\gamma}{}^{j}_{ik}\right)H^{k}_{\beta},\\
&\overset{2}{\gamma}{}^{0}_{i\beta}=\Lambda^{\alpha}_{i\beta}\left(H_{\alpha}-H^{j}_{\alpha}b_{j}\right)+\overset{2}{\gamma}{}^{j}_{i\beta}b_{j},\\
&b_{i}=-\frac{1}{n-m}\left(\Lambda^{\alpha}_{i\alpha}+\Lambda^{\alpha}_{il}H^{l}_{\alpha}\right).
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Исследование объекта проективной (аффинной, линейной) связности приводит к следующим утверждениям.

Предложение 1. Не все компоненты объекта связности, индуцирующего проективную (аффинную, линейную) связности в $\Lambda(g)$-подрасслоении, являются линейно независимыми и, следовательно, существенными для определения поля объекта связности.

Предложение 2. Для того чтобы в $\Lambda(g)$-подрасслоении ввести проективную (аффинную) связность, необходимо и достаточно оснастить его базу полем тензора T^{i}_{j} и полем объекта $\{\nu_{\alpha}, \nu^{i}_{\alpha}\}$, определяющего оснащение по Картану $\Lambda(g)$-распределения.

Замечание. Для того, чтобы ввести подчиненную линейную связность, достаточно задать поле тензора T^{i}_{j} и поле нормалей первого или второго рода $\Lambda(g)$-распределения.

Учитывая, что фундаментальным объектом первого порядка $\Lambda(g)$-подрасслоения можно охватить тензор T^{i}_{j} и объект нормали первого (второго) рода $\Lambda(g)$-распределения, а фундаментальным объектом второго порядка — объект, определяющий оснащение по Картану, приходим к следующему утверждению.

Предложение 3. Объект проективной (аффинной) связности, внутренне присоединенный к $\Lambda(g)$-подрасслоению, можно охватить фундаментальным объектом $\Lambda(g)$-распределения не ниже второго порядка.

Предложение 4. Объект подчиненной линейной связности, внутренне присоединенный к $\Lambda(g)$-подрасслоению, может быть охвачен фундаментальным объектом первого порядка $\Lambda(g)$-распределения.

2. Связность в $\Lambda(g)$-подрасслоении можно вводить, рассматривая $\Lambda(g)$-подрасслоение как базисное подрасслоение $H(\Lambda(g))$-подрасслоения. $\Lambda(g)$-подрасслоение характеризуется тем, что всякое его нормальное расслоение несет нормальное подрасслоение. Действительно, пусть нормальное расслоение $\Lambda(g)$-подрасслоения определяется заданием на базе поля объекта H^{i}_{α}, которое в репере $R(H, \Lambda)$ определяется уравнениями:

$$
\nabla H^{i}_{\alpha}+\omega^{i}_{\alpha}=H^{i}_{\alpha K}\omega^{K}_{0}
\tag{5.32}
$$

Слой $H(\Lambda(g))$-подрасслоения сечет соответствующий слой нормального расслоения по H-виртуальной нормали первого рода n, которая определяется объектом $\{n^{\,i}_{u}=H^{i}_{u}\}$. Следовательно, задание поля объекта

$$\nabla n^{i}_{u}+\omega^{i}_{u}=n^{i}_{uK}\omega^{K}_{0} \tag{5.33}$$

выделяет в нормальном расслоении нормальное подрасслоение со слоями n. Объект $\{n_u, n^{i}_{u}\}$, где $\tilde{n}_u=H_u$, определяет H-виртуальную оснащающую по Картану плоскость n соответствующего слоя $\Lambda(g)$-подрасслоения, которая возникает на второй дифференциальной окрестности.

Геометрический объект $\{R_n, M^{a}_{n}\}$, где $R_n=G_n+l_iM^{i}_{n}+G_uM^{u}_{n}$, определяет точку R пересечения нормали Михэйлеску M с оснащающей гиперплоскостью G, построенной в работе [40]. Справедливо утверждение.

Для того чтобы в слоях базисного подрасслоения задать проективную (аффинную) связность, необходимо и достаточно задать тензор T^{i}_{j} и точку вне плоскости H. В качестве такой точки можно взять точку R.

Приведем формулы охвата компонент γ^{i}_{jK} объекта $\overset{3}{\gamma}$, определяющего индуцированную проективную связность $\overset{3}{\gamma}$ в $\Lambda(g)$-подрасслоении, полученную проектированием при помощи оснащающей по Картану плоскости, натянутой на точку R и H-виртуальную оснащающую плоскость $\tilde{n}$.

$$\begin{gathered}
T^{i}_{j}=\overset{3}{\gamma}{}^{i}_{0k}=0, \quad \overset{3}{\gamma}{}^{0}_{0k}=0, \quad \overset{3}{\gamma}{}^{j}_{0n}=M^{j}_{n}-n^{i}_{u}M^{u}_{n},\\
\overset{3}{\gamma}{}^{j}_{0u}=n^{j}_{u}, \quad \overset{3}{\gamma}{}^{j}_{iK}=\Lambda^{u}_{iK}n^{i}_{u}+\Lambda^{n}_{iK}\left(M^{j}_{n}-n^{j}_{u}M^{u}_{n}\right),\\
\overset{3}{\gamma}{}^{0}_{0u}=n_u, \quad \overset{3}{\gamma}{}^{0}_{0n}=R_n-M^{u}_{n}n_u,\\
\gamma^{0}_{iK}=\Lambda^{u}_{iK}n_u+\left(R_n-M^{u}_{n}n_u\right)\Lambda^{n}_{iK}.
\end{gathered} \tag{5.34}$$

Точка R определяется на третьей дифференциальной окрестности, поэтому справедливо утверждение.

Объект связности типа $\overset{3}{\gamma}$, определяющий проективную (аффинную) связность в базисном $\Lambda(g)$-подрасслоении, охватывается фундаментальным объектом не ниже третьего порядка.

3. Пусть формы $\hat{\omega}^{\bar{b}}_{\bar{a}}=\omega^{\bar{b}}_{\bar{a}}-\Gamma^{\bar{b}}_{\bar{a}K}\omega^{K}_{0}$ определяют проективную связность Γ в слоях $H(\Lambda(g))$-подрасслоения. Это значит, что на базе задано поле геометрического объекта $\Gamma=\left\{\Gamma^{\bar{b}}_{\bar{a}K}, H^{n}_{\bar{a}K}\right\}$, которое (в репере $R(H)$) определятся уравнениями:

$$\begin{gathered}
\nabla H^{n}_{aK}-\delta^{n}_{K}\omega^{0}_{a}=H_{aKL}\omega^{L},\\
\nabla\Gamma^{\bar{a}}_{\bar{b}K}+H^{n}_{\bar{b}K}\omega^{\bar{a}}_{n}=\Gamma^{\bar{a}}_{\bar{b}KL}\omega^{L}_{0},
\end{gathered} \tag{5.35}$$

где $H^{n}_{0K}=\delta^{n}_{K}$.

Одним из возможных охватов компонент $\Gamma^{\bar{a}}_{\bar{b}K}$ объекта Γ, определяющего проективную связность в слоях H_x, является охват по формулам Г. Ф. Лаптева [40]:

$$\begin{gathered}\Gamma^{b}_{0c}=0,\quad \Gamma^{0}_{0c}=0,\quad \Gamma^{0}_{0n}=R_n,\quad \Gamma^{b}_{0n}=M^{b}_{n},\\ \Gamma^{b}_{ac}=M^{b}_{n}H^{n}_{ac},\quad \Gamma^{b}_{an}=M^{b}_{n}H^{n}_{ab},\\ \Gamma^{0}_{ac}=R_nH^{n}_{ac},\quad \Gamma^{0}_{an}=R_nH^{n}_{an},\end{gathered}\tag{5.36}$$

Связность, определяемая формулами (5.36), есть связность, полученная путем проектирования из инвариантной точки R.

Между компонентами объектов Γ (5.36) и $\overset{3}{\gamma}$ (5.34) существует связь:

$$\begin{gathered}\overset{3}{\gamma}{}^{i}_{0k}=\Gamma^{i}_{0k},\quad \overset{3}{\gamma}{}^{0}_{0k}=\Gamma^{0}_{0k},\quad \overset{3}{\gamma}{}^{j}_{0n}=\Gamma^{j}_{0n}-n^{j}_{u}\Gamma^{u}_{0n},\\ \overset{3}{\gamma}{}^{j}_{0u}=\Gamma^{j}_{0u}+n^{j}_{u},\quad \overset{3}{\gamma}{}^{i}_{jK}=\Gamma^{i}_{jK}+(\Lambda^{u}_{jK}-\Lambda^{n}_{jK}M^{u}_{n})\,n^{i}_{u},\\ \overset{3}{\gamma}{}^{0}_{0v}=\Gamma^{0}_{0v}+n_v,\quad \overset{3}{\gamma}{}^{0}_{0n}=\Gamma^{0}_{0n}-M^{u}_{n}n_u,\\ \overset{3}{\gamma}{}^{0}_{iK}=\Gamma^{0}_{iK}-n_u(\Lambda^{u}_{iK}-\Lambda^{n}_{iK}M^{u}_{n}).\end{gathered}\tag{5.37}$$

4. В слоях $\Lambda(g)$-подрасслоения можно ввести проективную связность, рассматривая $\Lambda(g)$-подрасслоение как базисное подрасслоение $H(\Lambda(g))$-подрасслоения, в слоях которого определена проективная связность Γ (5.36). Компоненты объекта связности Γ мы можем привести к нулю, положив $R_n=0$ и $M^{a}_{n}=0$. При этом формы $\omega^{\bar{a}}_{\bar{b}}$ становятся формами связности.

Преобразованные формы

$$\overset{4}{\omega}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}}=\omega^{\bar{i}}_{\bar{j}}-\overset{4}{\gamma}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}K}\omega^{K}_{0},\tag{5.38}$$

где

$$\nabla\overset{4}{\gamma}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}K}+\Lambda^{u}_{\bar{j}K}\omega^{\bar{i}}_{u}=\overset{4}{\gamma}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}KL}\omega^{L}_{0},\quad \Lambda^{u}_{0K}=\delta^{u}_{K},\tag{5.39}$$

определяют проективную связность $\overset{4}{\gamma}$ в слоях $\Lambda(g)$-подрасслоения. Связность $\overset{4}{\gamma}$ будем называть H-виртуальной проективной связностью. Приведем один из возможных охватов объекта связности $\overset{4}{\gamma}$:

$$\begin{gathered}\overset{4}{\gamma}{}^{i}_{0k}=0,\quad \overset{4}{\gamma}{}^{i}_{0n}=0,\quad \overset{4}{\gamma}{}^{0}_{0k}=0,\quad \overset{4}{\gamma}{}^{0}_{0n}=0,\\ \overset{4}{\gamma}{}^{j}_{0u}=n^{j}_{u},\quad \overset{4}{\gamma}{}^{j}_{iK}=\Lambda^{u}_{iK}n^{j}_{u},\\ \overset{4}{\gamma}{}^{0}_{0u}=n_u,\quad \overset{4}{\gamma}{}^{0}_{iK}=\Lambda^{u}_{iK}n_u.\end{gathered}\tag{5.40}$$

Справедлива теорема.

Теорема. Для того чтобы в слоях $\Lambda(g)$-подрасслоения индуцировалась H-виртуальная связность $\overset{4}{\gamma}$, необходимо и достаточно задать тензор T^i_j и H-виртуальную оснащающую по Картану плоскость $\tilde{n}$.

Из сравнения (5.34) и (5.40) видно, что связности $\overset{3}{\gamma}$ и $\overset{4}{\gamma}$ совпадают.

5. Подобъект $\{\overline{\gamma}^i_{jK}, \Lambda^{\alpha}_{iK}\}$ объекта $\overline{\gamma}$ аффинной связности (см. п. 1) определяет в $\Lambda(g)$-подрасслоении линейную связность с формами связности

$$\hat{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^i_j - \overline{\gamma}^i_{jK}\omega^K_0.$$

Если формы связности $\hat{\omega}^i_j$ преобразовать при помощи некоторого тензора деформации $\overset{*}{T}{}^i_{jK}$:

$$\overset{*}{\omega}{}^i_j = \tilde{\omega}^i_j - \overset{*}{T}{}^i_{jK}\omega^K_0, \tag{5.41}$$

то, как известно [53], преобразованные формы также будут формами некоторой связности. Полученная связность будет внутренне присоединена к $\Lambda(g)$-подрасслоению, если объекты, использованные при указанных здесь преобразованиях исходных форм ω^i_j, будут внутренне связаны с распределением. В частности, если для построения компонент $\gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{K}}$ объекта проективной связности γ использовать один из приведенных здесь охватов и объект аффинной связности $\overline{\gamma}$ ввести как подобъект такого объекта, то, построив компоненты тензора $\overset{*}{T}{}^i_{jK}$ по формулам:

$$\overset{*}{T}{}^i_{jk} = -\frac{1}{2}(g_{jlk} + g_{lkj} + g_{kjl})g^{li},$$

$$\overset{*}{T}{}^i_{j\alpha} = -\frac{1}{2}g_{jl\alpha}g^{il}, \tag{5.42}$$

мы получим новую связность, внутренне присоединенную к $\Lambda(g)$-подрасслоению. Относительно этой связности тензор g_{ij}, поле которого определено в (5.2), ковариантно постоянен. Будем называть эту связность римановой связностью в $\Lambda(g)$-подрасслоении.

6. Пусть задана $(n-2)$-мерная плоскость ρ_x, не проходящая через центр и принадлежащая слою H_x $H(\Lambda(g))$-подрасслоения, которая в репере $R(H)$ определяется уравнениями:

$$x^0 - \rho_a x^a = 0, \qquad x^n = 0. \tag{5.43}$$

Рассмотрим произвольную точку $Q_x = y^0 M_0 + y^a M_a + M_n$, не принадлежащую слою H_x. Уравнения поля точек Q_x в репере $R(H)$ имеют вид:

$$dy^{\bar{a}} + y^{\bar{J}}\omega^{\bar{a}}_{\bar{J}} - y^{\bar{a}}\omega^n_n = y^{\bar{a}}_K\omega^K_0. \tag{5.44}$$

(Индекс x при координатах для простоты записи опущен). Найдем геометрическое место точек Q_x, которые характеризуются тем, что точка dQ_x при смещении центра по кривым, принадлежащим распределению $\Lambda(g)$, смещается в гиперплоскости G_x, натянутой на точку Q_x и плоскость ρ_x:

$$x^0-\rho_a x^a-(y^0-\rho_a y^a)x^n=0. \tag{5.45}$$

В силу (5.44), dQ можно записать в виде:

$$dQ=(y^0_K\omega^K_0+y^0\omega^n_n)M_0+(y^a_K\omega^K_0+y^a\omega^n_n)M_a+ \\ +y^0\omega^n_0+y^a\omega^n_a+\omega^n_n)M_n. \tag{5.46}$$

Точка dQ_x будет принадлежать плоскости G_x при смещении центра M_0 по кривым, принадлежащим распределению $H(\Lambda(g))$, если координаты точки Q_x удовлетворяют уравнениям:

$$\rho_c y^c y^a-y^0y^a+(y^0_b-\rho_c y^c_b)H^{ba}_n=0. \tag{5.47}$$

Пусть теперь задана точка $Q_x=y^0M_0+y^aM_a+M_n$. Найдем для точки Q_x нормаль второго рода ρ_x гиперплоскости H_x такую, чтобы точка dQ_x принадлежала плоскости G_x (5.45). Устанавливаем, что искомая плоскость ρ_x в репере $R(H)$ определяется геометрическим объектом

$$\rho_a=(y^0y^c-y^0_bH^{bc}_n)\overset{*}{Q}_{ca}, \tag{5.48}$$

где

$$Q^{cd}\overset{\mathrm{def}}{=}y^cy^a-y^c_bH^{bd}_n,\quad \det\|Q^{cd}\|\neq 0,$$

$$Q^{cd}\overset{*}{Q}_{da}=\delta^c_a,\quad Q^{cd}\overset{*}{Q}_{ac}=\delta^d_a.$$

Справедливы следующие утверждения:

1) Если задана нормаль второго рода гиперплоскости H, то точки Q, для которых точка dQ принадлежит плоскости G (5.45), лежат на пространственной кривой второго порядка (5.47).

2) Каждой оснащающей точке Q можно однозначно сопоставить нормаль второго рода ρ такую, что точка dQ принадлежит плоскости G.

Определение [77]. Точка $F=M_n+F_nM_0$, не принадлежащая плоскости элемента H_x, переносится параллельно в нормальной связности $\overline{\Gamma}$, если дифференциал точки при смещении точки M_0 по кривым, принадлежащим распределению $H(\Lambda(g))$, лежит в плоскости G, натянутой на точку F и на нормаль второго рода, которая вместе с нормалью первого рода M_0F определяет связность $\overline{\Gamma}$.

Формы

$$\overline{\omega}_n^n=\omega_n^n,$$
$$\overline{\omega}_0^0=\omega_0^0-\rho_c\omega_0^c,$$
$$\overline{\omega}_n^0=\omega_n^0-\nu_{nc}^a\rho_a\omega_0^c-\nu_{nn}^a\rho_a\omega_0^n, \tag{5.49}$$

где ν_{nK}^a — величины, возникающие при продолжении объекта $\{\nu_n^a\}$ нормали M_0F, определяют в нормальном расслоении центропроективную связность $\overline{\Gamma}$, индуцированную полем точек F и полем нормалей второго рода ρ. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Необходимые и достаточные условия параллельного перенесения точки F в нормальной связности $\overline{\Gamma}$ при смещении центра по кривым, принадлежащим распределению $H(\Lambda(g))$, имеют вид:

$$F_{nc}-\rho_a\nu_{nc}^a-F_n\rho_c=0. \tag{5.50}$$

Если координаты точки F связаны с координатами плоскости ρ условиями (5.48), то условия (5.50) тождественно выполняются.

В частности, если ρ_c привести к нулю, то получим условия параллельного перенесения точки в нормальной связности, найденные А. В. Чакмазяном [77].

7. Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим формы

$$\overline{\overline{\omega}}_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\beta,$$
$$\overline{\overline{\omega}}_\alpha^0=\omega_\alpha^0-\nu_{\alpha K}^i l_i\omega_0^K,$$
$$\overline{\overline{\omega}}_0^\alpha=\omega_0^\alpha,$$
$$\overline{\overline{\omega}}_0^0=\omega_0^0-\delta_K^i l_i\omega_0^K, \tag{5.51}$$

где геометрические объекты $\{l_i\}$ и $\{\nu_\alpha^i\}$ определяют, соответственно, нормали второго и первого рода $\Lambda(g)$-распределения. При этом мы считаем, что репер адаптирован слоям возникающей композиции (Λ,ν) (в этом случае $\Lambda_i^\alpha=\nu_\alpha^i=0$). Формы (5.51) определяют проективную связность $\overline{\overline{\Gamma}}$ в нормальном расслоении ν, индуцированную полями l и ν.

Будем говорить, что оснащающая плоскость T_x распределения $\Lambda(g)$, принадлежащая ν_x и не проходящая через центр, переносится параллельно в нормальной связности $\overline{\overline{\Gamma}}$, если бесконечно близкая ей плоскость принадлежит подпространству, натянутому на исходную плоскость T и нормаль второго рода l.

Зададим в нормальном пространстве $(r-1)$-мерную плоскость T, определив ее r точками:

$$T_{\alpha_1}=M_{\alpha_1}+t_{\alpha_1}^{\alpha_2}M_{\alpha_2}+t_{\alpha_1}^0M_0$$
$$(\alpha_1=m+1,\ldots,m+r;\ \alpha_2=m+r+1,\ldots,n). \tag{5.52}$$

Поле таких плоскостей T в репере $R(\Lambda, \nu)$ определяется системой уравнений:

$$\nabla t^0_{\alpha_1} + \omega^0_{\alpha_1} + t^{\alpha_2}_{\alpha_1}\omega^0_{\alpha_2} - t^{\alpha_2}_{\alpha_1} t^0_{\beta_1}\omega^{\beta_1}_{\alpha_2} = t^0_{\alpha_1 K}\omega^K_0,$$
$$\nabla t^{\alpha_2}_{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2}_{\alpha_1} - t^{\alpha_2}_{\beta_1} t^{\beta_1}_{\alpha_1}\omega^{\beta_1}_{\beta_2} = t^{\alpha_2}_{\alpha_1 K}\omega^K_0. \qquad (5.53)$$

Точки T_{α_1} вместе с центром определяют в нормальном пространстве ν r-мерную плоскость L. Поместим r вершин репера $R(\Lambda, \nu)$ в плоскость L (т. е. величины $t^{\alpha_2}_{\alpha_1}$ приводим к нулю), такой репер обозначим $R(\Lambda, \nu, L)$. Поле плоскостей L в репере $R(\Lambda, \nu, L)$ определяется системой уравнений:

$$\omega^i_\alpha = \nu^i_{\alpha K}\omega^K_0,$$
$$\omega^{\alpha_2}_{\alpha_1} = L^{\alpha_2}_{\alpha_1 K}\omega^K_0. \qquad (5.54)$$

Пусть плоскость a, натянутая на плоскость T и нормаль второго рода l в репере $R(\Lambda, \nu, L)$, определяется системой уравнений:

$$x^0 - l_i x^i - t^0_{\alpha_1} x^{\alpha_1} = 0, \quad x^{\beta_2} = 0. \qquad (5.55)$$

Плоскость, бесконечно близкая плоскости T, полученная при смещении центра по кривым, принадлежащим распределению $\Lambda(g)$, будет принадлежать плоскости a (5.55), если выполняются условия:

$$t^0_{\alpha_1 j} - 2l_j t^0_{\alpha_1} - 2l_i \nu^i_{\alpha_1 j} = 0,$$
$$L^{\alpha_2}_{\alpha_1 j} = 0. \qquad (5.56)$$

Следовательно, справедлива теорема.

Необходимые и достаточные условия параллельного перенесения оснащающей плоскости T в нормальной связности $\overset{=}{\Gamma}$ при смещении центра по кривым, принадлежащим распределению $\Lambda(g)$, имеют вид (5.56).

Следуя А. В. Чакмазяну [77], будем говорить, что плоскость L, определенная оснащающей плоскостью T и центром M_0, переносится параллельно в связности $\overset{=}{\Gamma}$ по кривым, принадлежащим $\Lambda(g)$-распределению, если плоскость, бесконечно близкая плоскости L, полученная при смещении центра по этим кривым, принадлежит плоскости, натянутой на L и Λ.

Замечание. Вторая группа уравнений системы (5.56) определяет условия параллельного перенесения в нормальной связности $\overset{=}{\Gamma}$ r-мерного направления, определенного L.

8. Введем в $H(\Lambda(g))$-подрасслоении проективную связность $\overset{1}{\Gamma}$ такую, что компоненты $\overset{1}{\Gamma}{}^{\bar a}_{\bar b K}$ объекта связности будут определены формулами:

$$\overset{1}{\Gamma}{}^i_{0j} = \delta^i_j, \quad \overset{1}{\Gamma}{}^i_{0v} = 0, \quad \overset{1}{\Gamma}{}^u_{0i} = 0, \quad \overset{1}{\Gamma}{}^u_{0v} = \delta^u_v,$$
$$\overset{1}{\Gamma}{}^a_{0n} = 0, \quad \overset{1}{\Gamma}{}^0_{0a} = j_a, \quad \overset{1}{\Gamma}{}^0_{0n} = J_n - \overset{1}{\Gamma}{}^0_{0c} J^c_n,$$

$$
\begin{gathered}
\overset{1}{\Gamma}{}^i_{jK} = H^n_{jK} J^i_n - \delta^i_K l_j, \quad \overset{1}{\Gamma}{}^v_{ji} = H^n_{ji} J^v_n, \\
\overset{1}{\Gamma}{}^v_{jw} = \Lambda^v_{jw}, \quad \overset{1}{\Gamma}{}^v_{jn} = H^n_{kn} J^v_n + \left(\Lambda^n_{ku} J^v_n - \Lambda^v_{ku}\right) J^u_n, \qquad (5.57) \\
\overset{1}{\Gamma}{}^v_{wK} = H^n_{wK} J^v_n - \delta^u_K k_w, \quad \overset{1}{\Gamma}{}^i_{wj} = K^i_{wj}, \\
\overset{1}{\Gamma}{}^i_{wu} = H^n_{wu} J^i_n, \quad \overset{1}{\Gamma}{}^i_{wn} = H^n_{wn} J^i_n - K^i_{wj} J^i_n, \\
\overset{1}{\Gamma}{}^0_{kj} = H^n_{ki} J_n - l_k l_j, \quad \overset{1}{\Gamma}{}^0_{wu} = H^n_{uw} J_n - k_u k_w, \\
\overset{1}{\Gamma}{}^0_{ku} = H^n_{ku} J^u_n + \left(\Lambda^v_{ku} - \Lambda^n_{ku} J^v_n\right) k_v, \\
\overset{1}{\Gamma}{}^0_{wj} = K^i_{wj} l_i, \quad \overset{1}{\Gamma}_{an} = H^n_{an} \overset{1}{\Gamma}{}^0_{0n} + \overset{1}{\Gamma}{}^i_{an} b_i + \overset{1}{\Gamma}{}^u_{an} k_u.
\end{gathered}
$$

Связность $\overset{1}{\Gamma}$ характеризуется тем, что в этой связности плоскости K_x и Λ_x (каждая при смещении по кривым, принадлежащим распределению, определенному второй) переносятся параллельно. Такую связность будем называть π-связностью композиции ($K\Lambda$) (см. [54]). Эта связность индуцирована полем объекта, определяющего плоскость Нордена—Тимофеева j композиции и точкой Кёнигса [3], [4] на нормали J, соответствующей плоскости j в проективитете Бомпьяни—Пантази.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Базылев В. Т.*, Сети на многообразиях. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 189—205 (РЖМат, 1975, 3А726)
2. *Балазюк Т. Н.*, О геометрии многомерной поверхности пространства проективной связности, оснащенной полем конусов. Всес. науч. конференция по неевклид. геом. «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, Тезисы докл. М., 1976, 20 (РЖМат, 1976, 11А739К)
3. —, Дифференциальная геометрия m-мерных линейных элементов, оснащенных конусом. I. ВИНИТИ АН СССР. М., 1978, 35 с., библиогр. 13 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 янв. 1978 г., № 267—78 Деп.) (РЖМат, 1978, 2А643Деп.)
4. —, Дифференциальная геометрия m-мерных линейных элементов, оснащенных конусом. II. ВИНИТИ АН СССР. М., 1978. 23 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 янв. 1978 г., № 268—78 Деп.) (РЖМат, 1978, 2А644 Деп.)
5. —, Дифференциальная геометрия m-мерных линейных элементов, оснащенных конусом. III. ВИНИТИ АН СССР. М., 1978, 30 с., библиогр. 8 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 9 февр. 1978 г., № 465—78 Деп.) (РЖМат, 1978, 4А562 Деп.)
6. —, О некоторых дифференциально-геометрических структурах, ассоциированных с оснащенным распределением линейных элементов проективного пространства. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 8. Калининград, 1978
7. *Близникас В. И.*, О геометрии некоторых классов оснащенных расслоенных пространств. Докт. дисс. Вильнюс, пед. ин-т, 1970
8. —, Некоторые вопросы теории неголономных комплексов. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *5*, 69—96 (РЖМат, 1975, 1А766)

9. —, *Вашкас П. И., Лупейкис З. Ю., Шинкунас Ю. И.*, Обзор научных работ К. И. Гринцевичюса. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *5*, 7—53 (РЖМат, 1975, 1А714)
10. —, *Гринцевичюс К. И.*, О неголономной линейчатой геометрии. Третья Прибалтийская геометрическая конференция. Тезисы докл. 7—12 июня 1968 г. (Вильнюсск. гос. пед. ин-т, Вильнюсск. ун-т). Паланга, 1968, 21—25 (РЖМат, 1969, 5А494К)
11. *Болодурин В. С.*, О точечных соответствиях между гиперповерхностями проективных пространств. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1969, *2*, 55—79 (РЖМат, 1970, 4А620)
12. —, О геометрии точечных отображений P_m в P_n ($m<n$). Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 207—222 (РЖМат, 1975, 3А718)
13. —, О точечных соответствиях между многомерными поверхностями проективных пространств. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1975, № 3, 11—22 (РЖМат, 1975, 11А722)
14. *Бразевич М. В.*, Некоторые вопросы геометрии нормализованного многообразия Грассмана. ВИНИТИ АН СССР. М., 1975. 28 с., библиогр. 14 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 9 февр. 1976 г., № 355—76 Деп.) (РЖМат, 1976, 4А716 Деп.)
15. —, О подмногообразиях нормализованного многообразия Грассмана. ВИНИТИ АН СССР. М., 1975. 24 с., библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 9 февр. 1976 г., № 354—76 Деп.) (РЖМат, 1976, 4А712 Деп.)
16. —, К дифференциальной геометрии нормализованного многообразия Грассмана Gr(1.3). В сб. «Шестая Всес. геометр. конференция по современным проблемам геометрии». Тезисы докл. Вильнюс, 1975, 40—43 (РЖМат, 1975, 12А583К)
17. *Вагнер В. В.*, Обобщенные тождества Риччи и Бианки для связности в составном многообразии. Докл. АН СССР, 1945, *46*, № 8, 335—338
18. —, Постоянные поля локальных геометрических объектов в составном многообразии с линейной связностью. Докл. АН СССР, 1946, *53*, № 3, 187—190
19. —, Теория составного многообразия. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1950, вып. VIII, 11—72
20. *Гринцевичюс К. И.*, О неголономном комплексе. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, *9*, № 1, 85—99 (РЖМат, 1969, 12А779)
21. *Домбровский Р. Ф.*, К геометрии касательно оснащенных поверхностей в P_n. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 171—188 (РЖМат, 1975, 3А714)
22. —, Инвариантные оснащающие поля объектов на $M_{m,r}$. В сб. «Шестая Всес. геометр. конференция по современным проблемам геометрии». Вильнюс, 1975, 81—85 (РЖМат, 1975, 12А583К)
23. —, Поля геометрических объектов на многомерных касательно оснащенных поверхностях в P_n. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 7. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 153—171 (РЖМат, 1976, 9А610)
24. —, Касательно оснащающие (m—1)-мерные поверхности второго порядка на $M_{m,r}$. ВИНИТИ АН СССР. М., 1975. 18 с., библиогр. 8 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 февр. 1976 г., № 586—76 Деп.) (РЖМат, 1976, 5А654 Деп.)
25. —, Инвариантные структуры почти произведения на касательно r-оснащенной поверхности $M_{m,r}$. ВИНИТИ АН СССР. М., 1976. 24 с., библиогр. 13 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 февр. 1976 г., № 587—76 Деп.) (РЖМат, 1976, 5А655 Деп.)
26. —, О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,r}$ в P_n. Всес. науч. конференция по неевклид. геом. «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, Тезисы докл. М., 1976, 69 (РЖМат, 1976, 11А739К)
27. *Драгнев М. В.*, Об одном классе точечных отображений P_3 в P_2. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 223—242 (РЖМат, 1975, 3А719)

28. *Евтушик Л. Е.*, Нелинейные связности высших порядков. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1969, № 2, 32—44 (РЖМат, 1969, 7А529)
29. —, *Третьяков В. Б.*, О структурах, определяемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 243—255 (РЖМат, 1975, 3А735)
30. *Лаптев Б. Л.*, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов. Уч. зап. Казанского ун-та, 1958, *118*, кн. 4, 75—147 (РЖМат, 1962, 1А422)
31. *Лаптев Г. Ф.*, О многообразиях геометрических элементов с дифференциальной связностью. Докл. АН СССР, 1950, *73*, № 1, 17—20
32. —, О многообразиях геометрических элементов. Диссертация, МГУ, 1950
33. —, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
34. —, Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности. Докл. АН СССР, 1959, *126*, № 3, 490—493 (РЖМат, 1960, 4526)
35. —, Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. 4-го Всес. мат. съезда, 1961, т. 2. Л., «Наука», 1964, 226—233 (РЖМат, 1964, 12А391)
36. —, Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. В сб. «Геометрия. 1963. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1965, 5—64 (РЖМат, 1966, 11А341)
37. —, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1966, *1*, 139—189 (РЖМат, 1967, 6А382)
38. —, Распределения касательных элементов. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1971, *3*, 29—48 (РЖМат, 1972, 6А685)
39. —, К инвариантной аналитической теории дифференцируемых отображений. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 37—42 (РЖМат, 1975, 3А720)
40. —, *Остиану Н. М.*, Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1971, *3*, 49—94 (РЖМат, 1972, 6А680)
41. *Либер А. Е.*, К теории поверхностей в аффинных и центрально-аффинных n-мерных пространствах. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геометрии, механ. и физ. Моск. ун-т, 1966, вып. 13, 407—446 (РЖМат, 1967, 5А505)
42. *Лумисте Ю. Г.*, Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях. Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, вып. 177, 6—42 (РЖМат, 1967, 12А575)
43. —, К теории многообразий плоскостей евклидова пространства. Tartu Ülikooli toimetised, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, вып. 192, 12—46 (РЖМат, 1968, 5А571)
44. —, Канонические расслоения над пространствами орбит и внутренние связности. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1973, *4*, 285—307 (РЖМат, 1974, 5А756)
45. *Малаховский В. С.*, Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1969, *2*, 179—206 (РЖМат, 1970, 4А670)
46. —, Дифференциальная геометрия семейств линий и поверхностей. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 10. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1972, 113—157 (РЖМат, 1973, 5А659)
47. —, К геометрии касательно оснащенных подмногообразий. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1972, № 9, 54—65 (РЖМат, 1973, 5А719)
48. —, Некоторые проблемы дифференциальной геометрии многообразий фигур. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 5. Калининград, 1974, 64—84 (РЖМат, 1975, 4А796)

49. —, *Махоркин В. В.*, Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 113—134 (РЖМат, 1975, 3А716)
50. *Махоркин В. В.*, Некоторые типы многообразий гиперквадрик. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 3. Калининград, 1973, 50—59 (РЖМат, 1974, 2А608)
51. —, Многообразия кубических гиперповерхностей n-мерного проективного пространства. I. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 5. Калининград, 1974, 86—96 (РЖМат, 1975, 4А743)
52. —, Многообразия квадратичных гиперповерхностей со специальным свойством ассоциированных многообразий. В сб. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Вып. 6. Калининград, 1975, 90—93 (РЖМат, 1976, 9А591)
53. *Норден А. П.*, Пространства аффинной связности. М., «Наука», 1976
54. —, Теория композиций. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 10. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1978, 117—145
55. —, *Тимофеев Г. Н.*, Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1972, № 8 (123), 81—89 (РЖМат, 1973, 1А674)
56. *Остиану Н. М.*, О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Rev. math. pures et appl. (RPR), 1962, 7, № 2, 231—240 (РЖМат, 1963, 7А306)
57. —, О геометрии многомерной поверхности проективного пространства. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1966, *1*, 239—264 (РЖМат, 1967, 6А349)
58. —, Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1969, *2*, 247—262 (РЖМат, 1970, 4А615)
59. —, Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1971, *3*, 95—114 (РЖМат, 1972, 6А681)
60. —, Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1973, *4*, 71—120 (РЖМат, 1974, 5А695)
61. —, Дифференциально-геометрические структуры на расслоенных пространствах. ВИНИТИ АН СССР. М., 1973. 32 с., библиогр. 8 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 23 апр. 1973 г., № 5813—73 Деп.) (РЖМат, 1973, 6А743 Деп.)
62. —, Ступенчато-расслоенные пространства. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *5*, 259—309 (РЖМат, 1975, 1А772)
63. —, Многомерные поверхности в расслоенных пространствах $\mathscr{H}_P$-структуры. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1974, № 5, 163—168 (РЖМат, 1975, 1А773)
64. —, Распределения пар линейных элементов в оснащенном расслоенном пространстве $\mathscr{H}_P$-структуры. Тр. Семинара Кафедры геометрии. Казан. ун-т, 1975, вып. 8, 72—84 (РЖМат, 1976, 3А806)
65. —, Многообразия, погруженные в расслоенные пространства $\mathscr{H}_P$-структуры. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 257—266 (РЖМат, 1975, 3А725)
66. —, Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 8. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 89—111 (РЖМат, 1978, 1А632)
67. —, *Рыжков В. В., Швейкин П. И.*, Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1973, *4*, 7—70 (РЖМат, 1974, 3А451)
68. *Польща Г. С.*, Геометрические конструкции, ассоциированные с распределением точек в четырехмерном проективном пространстве. ВИНИТИ

АН СССР. М., 1974. 22 с., библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 6 июня 1974 г., № 1509—74 Деп.) (РЖМат, 1974, 8А532 Деп.)

69. —, Геометрическое построение частных классов распределений точек в многомерном проективном пространстве. В сб. «Шестая геометр. конференция по современным проблемам геометрии». Тезисы докл. Вильнюс, 1975, 191 (РЖМат, 1975, 12А583К)
70. —, К дифференциальной геометрии распределений точек в многомерном проективном пространстве. Всес. науч. конференция по неевклид. геом. «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, Тезисы докл. М., 1976, 167 (РЖМат, 1976, 11А739К)
71. *Рахула М. О.*, Инфинитезимальная связность в расслоении. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 8. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, 163—182 (РЖМат, 1978, 1А630)
72. *Рыбников А. К.*, Аффинные связности, индуцируемые на многомерных поверхностях аффинного пространства. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *6*, 135—156 (РЖМат, 1975, 3А745)
73. *Рыжков В. В.*, Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. В сб. «Геометрия. 1963. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1965, 65—107 (РЖМат, 1966, 11А354)
74. —, Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1971, *3*, 235—242 (РЖМат, 1972, 6А650)
75. —, Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1970. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1971, 153—174 (РЖМат, 1972, 3А649)
76. *Столяров А. В.*, Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 7. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 117—151 (РЖМат, 1976, 9А613)
77. *Чакмазян А. В.*, Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 10. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1978, 55—74
78. *Швейкин П. И.*, Нормальные геометрические объекты поверхности в аффинном пространстве. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1966, *1*, 331—424 (РЖМат, 1967, 6А346)