ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том VI 1961 Выпуск 3

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ С ГРАНИЦАМИ

А. В. СКОРОХОД

Стохастические уравнения для марковских процессов в разной форме рассматривались в работах С. Н. Бернштейна [1], И. И. Гихмана [2], [3], К. Ито [4], Маруямы [5], Дж. Дуба [6].

В работах [1]—[6] рассматривался случай процесса во всем пространстве, а в [6] рассмотрен диффузионный процесс с поглощающим экраном. В. Феллер аналитическими методами нашел все марковские диффузионные процессы (однородные по времени) на отрезке (т. е. в случае наличия границ), имеющие непрерывные траектории, а также указал на некоторые процессы, имеющие разрывы только на границе отрезка (см., напр., [7], [8]). Всевозможные диффузионные процессы, имеющие разрывы только на границе отрезка, были описаны А. Вентцелем в [9] (также аналитическим методом Феллера).

Цель настоящей работы — построить траектории для диффузионных процессов с границами, аналогичных процессам, рассмотренных Феллером, но не обязательно однородных. Аппаратом для такого построения будут служить стохастические уравнения, которые будут употребляться в форме интегральных уравнений Ито. Для решений этих уравнений используется отчасти метод конечных разностей, широко использовавшийся в работах [2], [3], [5]. Ввиду разрывности коэффициентов, определяющих процесс, этот метод иногда не применим, и тогда используется аппроксимация уравнения с разрывными коэффициентами уравнением с гладкими коэффициентами. Результаты этой статьи были доложены на конференции по теории вероятностей и математической статистике, состоявшейся в 1958 году в г. Ереване.

Введение

Мы будем рассматривать только одномерные диффузионные процессы. Такие процессы определяются в случае отсутствия границ двумя коэффициентами: коэффициентом диффузии $\sigma^2(t, x)$ и коэффициентом переноса $a(t, x)$. Стохастическое уравнение для процесса можно записать в форме

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\,dt + \sigma(t, \xi(t))\,dw(t), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — искомый диффузионный процесс, а $w(t)$ — процесс броуновского движения. Уравнение (1) имеет более определенный смысл в проинтегрированной форме Ито:

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s) ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s)) dw(s). \tag{2}$$

В том случае, когда процесс происходит на конечном отрезке, уравнение (1) определяет поведение диффундирующей частицы только внутри отрезка, на границе поведение частицы должно быть доопределено. Из этого уже ясно, что в уравнении должны появиться члены, отличные от нуля лишь на границе, т. е. имеющие разрывной характер. Наша цель — нахождение этих членов и доказательство существования и единственности решений, получаемых при этом стохастических уравнений.

Из результатов Феллера ([7], [8]) следует, что в случае непрерывных траекторий процесса возможны следующие типы поведения процесса на границе:

а) *поглощение*, в этом случае частица, достигнув границы, останавливается (иногда удобнее считать, что частица исчезает),

б) *мгновенное отражение*, при котором частица, дойдя до границы частицы, возвращается внутрь непрерывным образом, причем мера множества моментов времени, проведенных частицей на границе, с вероятностью 1 равна нулю.

в) *замедленное отражение*, при котором движение происходит так, как и в предыдущем случае, только время, проведенное частицей на границе при условии, что она туда попадает, с вероятностью 1 положительно.

г) *частичное отражение* на границе, при котором частица при попадании на границу может и отразиться, как и в случае б), а может и остановиться, как в случае а).

Отметим, что мы будем рассматривать процессы при наличии одной граничной точки, т. е. на полупрямой, — переход к случаю двух граничных точек не вызывает никаких затруднений, и из проводимых далее результатов легко извлечь теоремы существования и единственности решений стохастических при всевозможных комбинациях граничных условий. Процессы которые мы будем рассматривать, будут происходить на полупрямой $x \geqslant 0$ и единственной точкой границы будет точка $x = 0$. Относительно диффузионных коэффициентов $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ будет предполагаться, что они определены при $x > 0$ и $t \in [t_0, T]$ непрерывны по совокупности переменных в этой области и удовлетворяют условиям Липшица по x, т. е. существует такое K, что

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leqslant K|x - y|, \ |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leqslant K|x - y|. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь кратко каждый из упомянутых выше типов процессов. *Процесс с поглощающей границей* был построен Дж. Дубом в [6], поэтому мы не будем на нем останавливаться, укажем лишь, что построение Дуба можно осуществить, если искать этот процесс как решение уравнения [2], в котором $a(t, x) = \sigma(t, x) = 0$ при $x = 0$. В случае процессов с отражающей границей, частица, попадая в точку $x = 0$, должна получить в этой точке положительную скорость, для того чтобы вернуться на полупрямую $x > 0$. Если эта скорость конечна, то для того, чтобы выйти из граничной точки, нужно положительное время, т. е. в этом случае получится процесс с замедленным отражением. Конечную положительную скорость мы получим в точке нуль, если положим $\sigma(t, 0)=0$ и $a(t, 0)>0$. Нам удобнее считать, что $\sigma(t, 0)=a(t, 0)=0$, и ввести дополнительный член, отличный от нуля только на границе. Пусть $\psi_0(x)=0$ при $x>0$ и $\psi_0(x)=1$ при $x=0$, а $c(t)$ — скорость ухода с границы, если мы попадаем туда в момент t. Процесс с замедленным отражением, обладающий перечисленными свойствами, естественно искать в виде решения уравнения

$$\xi(t)=\xi(t_0)+\int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds+\int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s)+\int_{t_0}^{t} c(s)\, \psi_0(\text{о}(s))\, ds. \tag{4}$$

Изучению уравнений вида (4) посвящен второй раздел этой работы, который будет опубликован позднее.

Из вышесказанного вытекает, что в случае процесса с мгновенным отражением, скорость ухода с границы должна быть бесконечной. Поэтому для такого процесса уравнение нужно искать в форме, существенно отличной от (4). Пусть $\xi(t)$ — некоторый процесс, назовем $\zeta(t)$ «функцией отражения» для $\xi(t)$, если $\zeta(t)$ с вероятностью 1 — непрерывная монотонная функция, точками роста которой могут служить лишь нули $\xi(t)$. Естественно искать процесс с мгновенным отражением как решение уравнения

$$\xi(t)=\xi(t_0)+\int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds+\int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s)+\zeta(t), \tag{5}$$

где $\zeta(t)$ — «функция отражения» для $\xi(t)$, $\zeta(t_0)=0$, а $\xi(t)\geqslant 0$ для всех значений t. Поскольку множество моментов времени, при которых $\xi(t)=0$, имеет меру Лебега, равную нулю, то неважно, как доопределять $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ при $x=0$.

Неудобство уравнения (5) в том, что там две неизвестные функции: $\xi(t)$ и $\zeta(t)$. Однако несмотря на это решение, уравнение (5) единственно. Пояснением этого факта может служить доказательство единственности для простейшего случая: $a(t, x)=0$, $\sigma(t, x)=1$. Это доказательство настолько просто, что может быть приведено в этом кратком введении.

Итак, пусть $\xi_i(t)=\xi(t_0)+w(t)-w(t_0)+\zeta_i(t)$, $i=1, 2$, два решения (5). Тогда $\xi_2(t)-\xi_1(t)=\zeta_2(t)-\zeta_1(t)$. Пока $\xi_2(t)-\xi_1(t)>0$, $\zeta_2(t)$ не возрастает, так как $\xi_2(t)>\xi_1(t)\geqslant 0$. Значит и $\xi_2(t)-\xi_1(t)$ не возрастает пока является положительным. Аналогично устанавливается, что $\xi_2(t)-\xi_1(t)$ не убывает, пока является отрицательным. Кроме того, эта разность непрерывна и равна нулю при $t=t_0$. Из этих свойств разности немедленно вытекает, что она тождественно равна нулю и значит $\xi_1(t)=\xi_2(t)$ и $\zeta_1(t)=\zeta_2(t)$. Таким образом, (5) имеет единственное решение при единственно возможной функции $\zeta(t)$. Оказывается, что эта функция $\zeta(t)$ обладает следующим замечательным свойством: почти для всех точек

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{\zeta(t+\Delta t)-\zeta(t)}{\sqrt{\Delta t}}=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\sigma(t, +0)\,\psi_0(\xi(t)), \tag{6}$$

где $\psi_0(x)$ — точно такая же функция, как и в (4). Переписывая (6) в интегральной форме, которой в дальнейшем будет придан строгий смысл, получим:

$$\zeta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{t_0}^{t} \sigma(s, +0)\, \psi_0(\xi(s)) \sqrt{ds},$$

откуда следует возможность рассматривать уравнение для процесса с мгновенным отражением в форме:

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s) + \\ + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{t_0}^{t} \sigma(s, +0)\, \psi_0(\xi(s)) \sqrt{ds} \tag{7}$$

Процесс с мгновенной отражающей границей будет рассмотрен в первом разделе настоящей работы.

Процесс с частично отражающей границей легко построить, если уже построен процесс с мгновенным отражением. Поскольку в дальнейшем на этом типе процесса мы не будем останавливаться, то наметим это построение здесь более детально. Нам удобнее считать, что точка 0 расщеплена на две: 0^+ и 0^-, причем частица с полупрямой $x > 0$ попадает сначала в точку 0^+ и отражается от нее так, как в процессе с мгновенным отражением, из точки же 0^+ мы в некоторый случайный момент переходим в точку 0^-, попав в которую, мы там навсегда и остаемся. Для построения такого процесса, если уже задан процесс с мгновенным отражением, нужно построить только случайную величину τ — время перехода из точки 0^+ в 0^-. Построить такую величину можно следующим образом. Пусть $\nu(t)$ — пуассоновский процесс с независимыми приращениями, $\mathbf{M}\nu(t) = t$, не зависящий ни от $\xi(t_0)$, ни от $w(t)$. Пусть далее $\rho(t)$ — некоторая непрерывная функция. Рассмотрим теперь процесс $\eta(t) = \nu\left(\int_{t_0}^{t} \rho(t)\, d\zeta(t)\right)$, где $\zeta(t)$ — то же, что и в (5). Обозначим через τ момент времени, для которого $\eta(\tau + 0) = 1$, а $\eta(\tau - 0) = 0$. Легко видеть, что в момент времени τ $\xi(\tau) = 0$, так что переход в 0^- будет происходить только из 0^+. Кроме того, можно убедиться, что каковы бы ни были $t_1 < t_2$, $\mathbf{P}\{\tau > \tau_2 \mid \xi(s),\ s \leqslant t_1\} = \mathbf{P}\{\tau > t_2 \mid \xi(t_1)\}$, откуда вытекает, что полученный процесс будет марковским. Чтобы получить уравнение для этого процесса, положим $\sigma(t, 0^-) = 0$, $a(t, 0^-) = 0$. Тогда

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s) + \\ + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{t_0}^{t} \sigma(s, +0)\, \psi_0(\xi(s)) \sqrt{ds} + \varepsilon\eta(t), \tag{8}$$

где ε — условное обозначение для «числа», которое нужно прибавить к 0^+, чтобы получить 0^-. Теоремы о существовании и единственности решения уравнения (8) немедленно вытекают из соответствующих теорем для процесса с мгновенно отражающей границей.

Методом, аналогичным только что описанному, можно построить процессы с разрывным уходом с границы, если число соскоков с границы за каждый конечный промежуток времени конечно с вероятностью 1 (процессы, рассмотренные В. Феллером в [8]). Пусть $\chi(t)$ с вероятностью 1—монотонно не убывающий чисто разрывной однородный процесс с независимыми приращениями, имеющий конечное число скачков на каждом конечном промежутке времени. Если мы уже можем строить решения уравнений (4) и (7), то сможем построить и процессы, у которых частица отражается некоторое время как в процессах с отражающим экраном, а затем в некоторый случайный момент соскакивает с границы с распределением, совпадающим с распределением скачка процесса $\chi(t)$. Такие процессы будут решениями следующих уравнений: в случае мгновенного отражения —

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s) +$$
$$+ \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{t_0}^{t} \sigma(s, +0)\, \psi_0(\xi(s)) \sqrt{ds} + \chi\left(\int_{t_0}^{t} \rho(s)\, \psi_0(\xi(s)) \sqrt{ds}\right), \tag{9}$$

в случае замедленного отражения —

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \psi_0(\xi(s))\, c(s)\, ds + \chi\left(\int_{t_0}^{t} \rho(s)\, \psi_0(\xi(s))\, ds\right). \tag{10}$$

Функция $\rho(t)$ — произвольная неотрицательная функция, характеризующая интенсивность числа соскоков. Существование и единственность решений этих уравнений вытекает из соответствуюших теорем для процессов с отражающими границами. Случай, когда за конечное время возможно бесконечное число соскоков с границы (рассмотренный А. Д. Вентцелем в [9]), уже не может быть так просто изучен полностью, как только что рассмотренный. В настоящей статье мы не будем касаться этого случая. Заметим еще, что результаты, относящиеся к процессам с мгновенным отражением, могут быть перенесены и на случай многомерных процессов, однако таким образом удается построить только весьма узкий класс многомерных процессов с границей. Для построения полной теории стохастических уравнений для многомерных процессов диффузии при наличии границ (хотя бы только в случае непрерывных траекторий) методов настоящей статьи будет, по-видимому, недостаточно.

Последнее замечание. В этой статье широко используются интегралы вида: $\int_{t_0}^{t} f(s)\, dw(s)$, где $f(s)$ — некоторый случайный процесс, а $w(s)$ — процесс брауновского движения. Определение таких интегралов принадлежит К. Ито и содержится, например, в его работе [4], имеется оно также и в [10], гл. 6, § 3. Нам понадобятся следующие факты из теории таких интегралов:

а) они определены для всякого процесса $f(t)$, для которого при всяком

$t_1 > t_0$, процесс $w(t) - w(t_1)$, $t > t_1$, не зависит от совокупности процессов $w(s)$ и $f(s)$, $s \leqslant t_1$, и, кроме того, $\int_{t_0}^{t} \mathbf{M} f^2(s)\,ds < \infty$,

б) $$\mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\,dw(s)\right) = 0, \quad \mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\,dw(s)\right)^2 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{M} f^2(s)\,ds,$$

в) $\int_{t_0}^{t} f(s)\,dw(s)$, как функция t, является с вероятностью единица непрерывным мартингалом,

г) если функция $f(s)$ ограничена, т. е. существует постоянная L такая что $|f(s)| \leqslant L$ с вероятностью 1, то

$$\mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\,dw(s)\right)^4 = 6\int_{t_0}^{t} \mathbf{M}\left[f(s)\int_{t_0}^{t} f(u)\,dw(u)\right]^2 ds.$$

1. Процесс с мгновенно отражающей границей

В этом разделе мы будем считать, что диффузионные коэффициенты $\sigma^2(t, x)$ и $a(t, x)$ определены при $x \geqslant 0$ и $t \in [t_0, T]$, непрерывны по совокупности переменных в этой же области и удовлетворяют условию Липшица по x, т. е. существует такая постоянная K, что выполняется формула (3) для всех $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, $t \in [t_0, T]$. Как уже отмечалось во введении, мы будем искать процесс с мгновенным отражением на границе в виде решения уравнения (5), где $\zeta(t)$ с вероятностью 1 — непрерывный неубывающий процесс, имеющий точками роста только нули процесса $\xi(t)$ Цель настоящего раздела — доказательство существования и единственности решений уравнения (5), а также нахождение процесса $\zeta(t)$, при котором (5) имеет решение.

Единственность

Пусть имеются два решения уравнения (5):

$$\xi_i(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi_i(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s\ \xi_i(s))\,dw(s) + \zeta_i(t), \quad i = 1, 2;$$

причем $\xi_i(t)$ с вероятностью 1 — непрерывные неотрицательные процессы, а $\zeta_i(t)$ с вероятностью 1 — непрерывные неубывающие процессы, имеющие точками роста только нули $\xi_i(t)$. Тогда $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ и $\zeta_1(t) = \zeta_2(t)$ с вероятностью 1.

Доказательство. Введем случайные процессы:

$$\Delta^+(t) = \begin{cases} \xi_1(t) - \xi_2(t), & \text{если } \xi_1(t) - \xi_2(t) > 0; \\ 0 & \text{если } \xi_1(t) - \xi_2(t) \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\Delta^-(t) = \begin{cases} \xi_2(t) - \xi_1(t), & \text{если } \xi_2(t) - \xi_1(t) > 0; \\ 0 & \text{если } \xi_2(t) - \xi_1(t) \leqslant 0. \end{cases}$$

Очевидно, $\Delta^+(t)$ и $\Delta^-(t)$ являются с вероятностью 1 непрерывными процессами. Пусть τ самый правый нуль $\Delta^+(s)$ на отрезке $[t_0, t]$. Тогда при $\tau < t$ будем иметь для всех $s \in [\tau, t]$ неравенство $\Delta^+(s) > 0$ и, значит, $\xi_1(s) > 0$, так как $\xi_1(s) > \xi_2(s) \geqslant 0$. Поэтому $\zeta_1(\tau) = \zeta_1(t)$ (ведь $\xi_1(s)$ на (τ, t) не имеет нулей). Так как $\xi_1(s) - \xi_2(s)$ непрерывна, то $\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau) = 0$. Учитывая, что

$$\xi_1(t) - \xi_2(t) = \int_{t_0}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s)))\, dw(s) + \zeta_1(t) - \zeta_2(t),$$

а

$$0 = \xi_1(\tau) - \xi_2(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{\tau} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s)))\, dw(s) + \zeta_1(\tau) - \zeta_2(\tau),$$

заключаем

$$\xi_1(t) - \xi_2(t) = \int_{\tau}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds +$$

$$+ \int_{\tau}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s, \xi_2(s)))\, dw(s) + \zeta_2(\tau) - \zeta_2(t).$$

Но $\xi_1(t) - \xi_2(t) > 0$, а $\zeta_2(\tau) - \zeta_2(t) < 0$, поэтому

$$\Delta^+(t) \leqslant \left| \int_{\tau}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds + \int_{\tau}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s)) \right| dw(s) | .$$

Так что имеем следующую оценку, справедливую и в том случае, когда $\tau = t$ (а, значит, $\Delta^+(t) = 0$):

$$\Delta^+(t) \leqslant \max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t'}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds + \int_{t'}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s)))\, dw(s) \right|.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\Delta^-(t) \leqslant \max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t'}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t'}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s)))\, dw(s) \right. .$$

Так что

$$|\xi_1(t) - \xi_2(t)| \leqslant \max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t'}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds \right| +$$

$$+ \max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t'}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s) - \sigma(s, \xi_2(s)))\, dw(s) \right|. \tag{1.1}$$

Обозначим через $\chi_N(t)$ случайный процесс, определяемый следуюшим образом:

$$\chi_N(t)=\begin{cases}1, & \text{если } \sup\limits_{t_0\leqslant t'\leqslant t}|\xi_1(t')|<N,\ \sup\limits_{t_0\leqslant t'\leqslant t}|\xi_2(t')|<N,\\ 0, & \text{если } \sup\limits_{t_0\leqslant t'\leqslant t}|\xi_1(t')|\geqslant N, \text{ или } \sup\limits_{t_0\leqslant t'\leqslant t}|\xi_2(t')|\geqslant N.\end{cases}$$

Учитывая, что $\chi_N(s)=1$ при $s\leqslant t$, если только $\chi_N(t)=1$, можем получить из (1.1) следующее неравенство:

$$|\xi_1(t)-\xi_2(t)|\chi_N(t)\leqslant\max_{t_0\leqslant t'\leqslant t}\int_{t'}^{t}\chi_N(s)[a(s,\xi_1(s))-a(s,\xi_2(s))]\,ds+$$
$$+\max_{t_0\leqslant t'\leqslant t}\left|\int_{t'}^{t}\chi_N(s)[\sigma(s,\xi_1(s))-\sigma(s,\xi_2(s))]\,dw(s)\right|.$$

Используя неравенства

$$\left(\int_{t'}^{t}\chi_N(s)[a(s,\xi_1(s))-a(s,\xi_2(s))]^2\,ds\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant(t-t')\int_{t'}^{t}[a(s,\xi_1(s))-a(s,\xi_2(s))]^2\chi_N(s)\,ds\leqslant$$
$$\leqslant K^2(t-\tau)\int_{t'}^{t}|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2\chi_N(s)\,ds\leqslant K^2(T-t_0)\int_{t_0}^{t}\chi_N(s)|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2\,ds,$$

и

$$\max_{t_0\leqslant t'\leqslant t}\left|\int_{t'}^{t}\chi_N(s)[\sigma(s,\xi_1(s))-\sigma(s,\xi_2(s))]\,dw(s)\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2\max_{t_0\leqslant t'\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{t'}\chi_N(s)[\sigma(s,\xi_1(s)-\sigma(s,\xi_2(s))]\,dw(s)\right|,$$

а также то обстоятельство, что $\int_{t_0}^{t'}\chi_N(s)[\sigma(s\ \xi_1(s))-\sigma(s,\xi_2(s))]\,dw(s)$ является мартингалом по t', и, следовательно, на основании теоремы 3.4 главы 7 из [10]

$$\mathbf{M}\left\{\sup_{t_0\leqslant t'\leqslant t}\left|\int_{t_0}^{t'}\chi_N(s)[\sigma(s,\xi_1(s))-\sigma(s,\xi_2(s))]\,dw(s)\right\}^2\leqslant\right.$$
$$\leqslant 4\mathbf{M}\left|\int_{t_0}^{t}\chi_N(s)[\sigma(s,\xi_1(s)]-\sigma(s,\xi_2(s))]\,dw(s))^2\leqslant\right.$$
$$\leqslant 4K^2\int_{t_0}^{t}\mathbf{M}\chi_N(s)|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2\,ds,$$

мы можем утверждать, что существует такое C, что для всех $t\in[t_0,T]$ выполняется неравенство:

$$\mathbf{M}\chi_N(t)|\xi_1(t)-\xi_2(t)|^2\leqslant C\int_{t_0}^{t}\mathbf{M}\chi_N(s)|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2\,ds.$$

Из этого неравенства (повторным его применением), учитывая, что $\chi_N(s)|\xi_1(s)-\xi_2(s)|\leqslant 2N$, получим, что при каждом n $\mathbf{M}\chi_N(s)|\xi_1(s)-$

$-\xi_2\ s)|^2 \leqslant 4N^2 \frac{C^n}{n!}$. Значит, при каждом N $\mathbf{M}\chi_N(s)|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2=0$, т. е. $\mathbf{P}\{\xi_1(s)=\xi_2(s)\}=1$. Учитывая непрерывность $\xi_1(s)$ и $\xi_2(s)$, отсюда выводим, что $\xi_1(s)=\xi_2(s)$ с вероятностью 1. Поэтому и $\zeta_1(s)=\zeta_2(s)$.

Замечание. Уравнение (5) имеет решение лишь при одной функции $\zeta(t)$. Так что для доказательства *существования* решения нам нужно найти хотя бы одно $\zeta(t)$, при котором (5) имело бы решение. Кроме того, независимо от способа решения уравнения всегда будет получаться одно и то же $\zeta(t)$.

Разностные уравнения

Мы будем разыскивать процесс с отражающим экраном как предел решений некоторых конечно-разностных уравнений. Пусть $t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$ — некоторое разбиение отрезка $[t_0, T]$. Обозначим $t_{k+1}-t_k=\Delta t_k$, $w(t_{k+1})-w(t_k)=w_k$. Пусть, далее, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — некоторая последовательность положительных случайных величин, и, наконец, η_0 — случайная величина, не зависящая от $w(t)$. Построим последовательность случайных величин η_k, $k=1, 2, \ldots, n$ по формулам:

$$\begin{aligned}\eta_k=\eta_{k-1}&+\sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1})w_{k-1}+a(t_{k-1}, \eta_{k-1})\Delta t_{k-1}+\\&+\psi_0(\eta_{k-1}+\sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1})w_{k-1}+a(t_{k-1}, \eta_{k-1})\Delta t_{k-1})h_k,\end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\psi_0(x)=1$ при $x\leqslant 0$ и $\psi_0(x)=0$ при $x>0$. Свяжем с этой последовательностью величин случайный процесс: $\eta(t)=\eta_k$ при $t\in[t_k, t_{k+1})$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. Наша цель — показать, что при $\max\Delta t_k\to 0$ процесс $\eta(t)$ сходится по вероятности к некоторому процессу, являющемуся решением уравнения (5).

Для этого нам нужно будет оценить разность между $\eta(t)$ и $\eta'(t)$, где $\eta'(t)=\eta'_l$ при $t\in[t'_l t'_{l+1})$, $l=0, 1, \ldots, m$; последовательность η'_l определяется соотношением

$$\begin{aligned}\eta'_l=\eta'_{l-1}&+\sigma(t'_{l-1}, \eta'_{l-1})w'_{l-1}+a(t'_{l-1}, \eta'_{l-1})\Delta t'_{l-1}+\\&+\psi_0(\eta'_{l-1}+\sigma(t'_{l-1}, \eta'_{l-1})w'_{l-1}+a(t'_{l-1}, \eta'_{l-1})\Delta t'_{l-1})h'_l,\end{aligned}$$

в котором η'_0 не зависит от $w(t)$, $\Delta t'_l=t'_{l+1}-t'_l$, $w'_l=w(t'_{l+1})-w(t'_l)$, и $h'_1, \ldots, h'_m$ — последовательность положительных случайных величин, а $t_0=t'_0<t'_1<\ldots<t'_m$ — некоторое разбиение отрезка $[t_0, T]$. Положим

$$\Delta^+(t)=\begin{cases}\eta(t)-\eta'(t), & \text{если } \eta(t)>\eta'(t),\\ 0, & \text{если } \eta(t)\leqslant\eta'(t);\end{cases}$$

$$\Delta^-(t)=\begin{cases}\eta'(t)-\eta(t), & \text{если } \eta'(t)>\eta(t),\\ 0, & \text{если } \eta'(t)\leqslant\eta(t).\end{cases}$$

Оценим $\Delta^+(t)$ в том случае, когда $\Delta^+(t)>0$. Предположим сначала, что $\Delta^+(s)>0$ для всех $s\in[t_0, t]$. Тогда возможен один из трех случаев:

а) $\psi_0(\eta_{k-1}+\sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1})w_{k-1}+a(t_{k-1}, \eta_{k-1})\Delta t_{k-1})=0$ для всех k, для которых $t_k\leqslant t$, тогда

$$\Delta^+(t)=\eta_0-\eta'_0+\sum_{t_k<t}(\sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1})w_{k-1})+a(t_{k-1}, \eta_{k-1})\Delta t_{k-1}-$$

$$-\sum_{t'_l\leqslant t}(\sigma(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})w_{l+1}+a(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\Delta t'_{l-1})-$$

$$-\sum_{t'_l\leqslant t}\psi_0(\eta'_{l-1}+\sigma(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})w'_{l-1}+a(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\Delta t'_{l-1})\leqslant$$

$$\leqslant\eta_0+\eta'_0+\sum_{t_k\leqslant t}(\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})w_{k-1}+a(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\Delta t_{k-1})-$$

$$-\sum_{t'_l\leqslant t}(\sigma(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})w'_{l-1}+a(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\Delta t'_{l-1});$$

б) $\psi_0(\eta_{k-1}+\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})w_{k-1}+a(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\Delta t_{k-1})>0$ при некоторых k; пусть r означает наибольший индекс, для которого $t_r\leqslant t$ и $\psi_0(\eta_{r-1}+$ $+\sigma(t_{r-1},\ \eta_{r-1})w_{r-1}+a(t_{r-1},\ \eta_{r-1})\Delta t_{r-1})>0$, тогда при $k>r$ $\psi_0(\eta_{k-1}+$ $+\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})w_{k-1}+a(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\Delta t_{k-1})=0$ и, значит, на основании случая а) мы можем заключить, что

$$\Delta^+(t)\leqslant\eta(t_r)-\eta'(t_r)+\sum_{t_r<t_k\leqslant t}\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})w_{k-1}+$$

$$+a(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\Delta t_{k-1})-\sum_{t_r<t'_l\leqslant t}(\sigma(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})w'_{l-1}+a(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\Delta t'_{l-1}),$$

но $\eta(t_r)\leqslant h_r$, а $-\eta'(t_r)\leqslant-\inf_{t_0\leqslant t\leqslant T}\eta'(t)\psi_0(\eta'(t))$, следовательно, получаем:

$$\Delta^+(t)\leqslant h_r-\inf_{t_0\leqslant t-T}\eta'(t)\psi_0(\eta'(t))+\sum_{t_r<t_k\leqslant t}(\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})w_{k-1}+$$

$$+a(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\Delta t_{k-1})-\sum_{t_r<t'_l\leqslant t}(\sigma(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})w'_{l-1}+a(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\Delta t'_{l+1}).$$

На основании а) и б) заключаем, что в том случае, когда $\Delta^+(s)>0$ для всех $s\in[t_0,t]$, справедливо неравенство

$$\Delta^+(t)\leqslant|\eta_0-\eta_0|+\sup_{1\leqslant r\leqslant n}h_r-\inf_{t_0\leqslant s\leqslant T}\eta'(s)\psi_0(\eta'(s))+$$

$$+\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Bigg|\sum_{s<t_{k-1}\leqslant t}(\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})w_{k-1}+a(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\Delta t_{k-1})-$$

$$-\sum_{s<t'_l\leqslant t}(\sigma(t_{l-1},\ \eta'_{l-1})w'_{l-1}+a(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\Delta t'_{l-1})\Bigg|.$$

Пусть теперь $\Delta^+(t)>0$, но $\Delta^+(s)$ обращается в нуль при $s<t$. Обозначим через τ максимальную точку на $[t_0,t]$, для которой $\Delta^+(\tau-0)=0$, а $\Delta^+(\tau+0)>0$. Тогда, очевидно, $|\eta(\tau)-\eta'(\tau)|\leqslant\max_k|\eta_k-\eta_{k-1}|+\max_l|\eta'_l-$ $-\eta'_{l-1}|$. Так как на $[\tau,t]$, $\Delta^+(s)>0$, то применимы оценки, полученные в случаях а) и б). Так что в общем случае имеем следующее неравенство:

$$\Delta^+(t)\leqslant|\eta_0-\eta'_0|+\sup_{1\leqslant r\leqslant n}h_r+\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\eta_k-\eta_{k-1}|-$$

$$-\inf_{t_0\leqslant s\leqslant T}\eta'(s)\psi_0(\eta'(s))+\max_{1\leqslant l\leqslant m}|\eta_l-\eta_{l-1}|+$$

$$+\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Bigg|\sum_{s<t_{k-1}\leqslant t}(\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\,w_{k-1}+a(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\,\Delta t_{k-1})-$$

$$-\sum_{s\leqslant t'_l\leqslant t}(\sigma(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\cdot w'_{l-1}+a(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\,\Delta t'_{l-1})\Bigg|. \qquad (1.3)$$

Написав аналогичную оценку для $\Delta^-(t)$, мы получим для $|\eta(t)-\eta'(t)|=$ $=\max(\Delta^+(t),\ \Delta^-(t))$ следующее неравенство:

$$|\eta(t)-\eta'(t)|\leqslant|\eta_0-\eta'_0|+\sup_{1\leqslant r\leqslant n}h_r+\sup_{1\leqslant r\leqslant m}h'_r+$$

$$+\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|\eta_k-\eta_{k-1}|+\sup_{1\leqslant l\leqslant m}|\eta'_{l-1}-\eta'_l|-$$

$$-\inf_{t_0\leqslant t\leqslant T}\eta(s)\,\psi_0(\eta(s))-\inf_{t_0\leqslant t\leqslant T}\eta'(s)\,\psi_0(\eta'(s))+$$

$$+\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Bigg|\sum_{s<t_{k-1}\leqslant t}(\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\,w_{k-1}+a(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\,\Delta t_{k-1}-$$

$$-\sum_{s<t'_{l-1}\leqslant t}(\sigma(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\,w'_{l-1}+a(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\,\Delta t'_{l-1})\Bigg|. \qquad (1.4)$$

Будем считать теперь, что подразделение $t'_0<t'_1<\ldots<t'_m$ получается из подразделения $t_0<t_1<\ldots<t_n$ добавлением некоторых точек. Преобразуем сумму, стоящую под знаком модуля в (1.4). Пусть $t_r\leqslant s<t_{r+1}$, $t'_q\leqslant s<t'_{q+1}$, тогда

$$\sum_{t_k\leqslant s}\sigma(t_k,\ \eta_k)\,w_k-\sum_{t'_l\leqslant s}\sigma(t'_l,\ \eta'_l)\,w_l=$$

$$=\sum_{t_k\leqslant s}\ \sum_{t_{k-1}\leqslant t'_l<t_k}(\sigma(t'_l,\ \eta_{k-1})-\sigma(t'_l,\ \eta_e))\,w'_l+$$

$$+\sum_{t_r\leqslant t'_l\leqslant s}(\sigma(t'_l,\ \eta_r)-\sigma(t'_l,\ \eta'_l))\,w'_l+$$

$$+\sum_{t_k\leqslant s}\ \sum_{t_{k-1}\leqslant t'_l<t_k}[\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})-\sigma(t'_l,\ \eta_{k-1})]\,w'_l+$$

$$+\sum_{t_r\leqslant t'_l\leqslant s}(\sigma(t_{r-1},\ \eta_r)-\sigma(t'_l,\ \eta_l))\,w'_l+\sigma(t_r,\ \eta_r)\,[w(t_{r+1})-w(t'_{q+1})].$$

Преобразовав аналогичным образом $\sum\limits_{t_k\leqslant s}a(t_k,\ \eta_k)\,\Delta t_k-\sum\limits_{t'_l\leqslant s}a(t'_l,\ \eta'_l)\,\Delta t'_l$ и воспользовавшись неравенством: $\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum\limits_{k}^{n}a_i\Big|\leqslant 2\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum\limits_{1}^{k}a_i\Big|$, получим такую оценку:

$$|\eta(t)-\eta'(t)|\leqslant|\eta_0-\eta'_0|+\sup_{1\leqslant r\leqslant n}h_r+\sup_{1\leqslant r\leqslant m}h'_r-$$

$$-\inf_{t_0\leqslant s\leqslant T}\eta(s)\,\psi_0(\eta(s))-\inf_{t_0\leqslant s\leqslant T}\eta'(s)\,\psi_0(\eta'(s))+$$

$$+\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\eta_k-\eta_{k-1}|+\max_{1\leqslant l\leqslant m}|\eta'_l-\eta_{l-1}|+$$

$$+2\sup_{1\leqslant j\leqslant n, t\in[t_0,T]}\sigma(t,\eta_j)\max_{|s_2+s_1|\leqslant\max\Delta t_k}|w(s_2)-w(s_1)|+$$

$$+2\sup_{1\leqslant j\leqslant n, t\in[t_0,T]}|a(t,\eta_j)|\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta t_k+2\sup_{s\leqslant t}\Big|\sum_{t_l'<s}(\sigma(t_l',\eta(t_l'))-\sigma(t_l',\eta'(t_l'))w_l'\Big|+$$

$$+2\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\sum_{t_l'<s}(a(t_l',\eta(t_l'))-a(t_l',\eta'(t_l'))\Delta t_l')\Big|+$$

$$+2\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\sum_{t_k\leqslant t_l'<t_{k+1}\leqslant s}(\sigma(t_k,\eta_k)-\sigma(t_l',\eta_k))w_l'\Big|+$$

$$+2\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\sum_{t_k\leqslant t_l'<t_{k+1}\leqslant s}(a(t_k,\eta_k)-a(t_l',\eta_k))\Delta t_l'\Big|. \qquad (1.5)$$

Поступила в редакцию
15.9.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Принципы теории стохастических дифференциальных уравнений, Труды Физ-мат. ин-та АН СССР, 5 (1931), 95—124.

[2] И. И. Гихман, К теории дифференциальных уравнений случайных процессов, УМЖ, **2**, 3 (1950), 45—69.

[3] И. И. Гихман, К теории дифференциальных уравнений случайных процессов, II, УМЖ, 3 (1951), 317—339.

[4] K. Ito, On stochastic differential equations, Mem Am. Math. Soc. 4 (1951), 1—51.

[5] G. Maruyama, Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend. Circ. Math. Palermo, 4 (1955), 1—43.

[6] J. Doob, Martingales and one demensional diffusion, Tr. AMS, 78 (1955), 168—208.

[7] W. Feller, Diffusion processes in one demension, Trans. OMS, 77 (1954), 1(31.

[8] W. Feller, The generale diffusion operator and positivity preserving semigroups in one demension, Ann. Math., 60 (1954), 417—435.

[9] А. Д. Вентцель, Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка, ДАН СССР, **111** (1956), 269—272.

[10] Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИИЛ, М., 1956.

[11] А. В. Скороход, Предельные теоремы для случайных процессов с независимыми приращениями, Теория вероят. и ее примен., **11**, 2 (1957), 145—177.

[12] E. E. Слуцкий, Alcuni proposizioni sulla teoria degli funzioni aleatorie, Giorn. Inst. Attuorie, 8 (1937), 183—199.

[13] А. В. Скороход, О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам, II, Процессы Маркова, Теория вероят. и ее примен., **V**, 1 (1960), 45—53.

STOCHASTIC EQUATIONS FOR DIFFUSION PROCESSES IN A BOUNDED REGION

A V. SKOROHOD *(KIEV)*

(Summary)

In this paper an equation is derived for diffusion processes with a reflecting boundary; it is proved that the solution to this equation exists and is unique.