М. Д. Миссаров, Инвариантные многообразия ренормализационной группы и критическое поведение в иерархической фермионной модели, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996, номер 6, 61–63

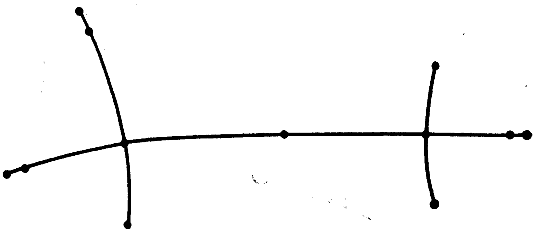
$$q_7 = -\frac{881040112562681914516311 51}{32080111559903887055104 00000} + \frac{4490343298273101763842 7353\sqrt{-11}}{32080111559903887055104 00000},$$

$$q_8 = -\frac{12635455258870878123168 4854967}{21528962867851498602680 2944000000} + \frac{14459655253391192167641 0938701\sqrt{-11}}{21528962867851498602680 2944000000},$$

$$q_9 = \frac{73319165764050208397331 5708374249}{72240434903075703561293 7278592000000} - \frac{79420812869387101237958 66185318901\sqrt{-11}}{57792347922460562849034 98228736000000},$$

$$q_{11} = \frac{46566373396620304084641 036664807888913213531}{21208196233458047170990 786140383440281600000000000} + \frac{10207079650537898540933 87210896251864017310 07\sqrt{-11}}{21208196233458047170990 786140383440281600000000000},$$

дает представленное на рисунке изображение.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drawing curves over number field//The Grothendieck Festschift. V. 3. Dösseldorf, 1990. 199—227.
2. Shabat G., Zvonkin A. Plane tree and algebraic numbers//Contemporary Math. 1994. **178.** 233—275.
3. Bétréma J., Péré S., Zvonkin A. Plane trees and their Shabat polynomials. Catalog//Raport Interne du LaBRI. N 92—75. Bordeaux, 1992.
4. Couveignes J.-M., Granboulan L. Dessins from a geometrical point of view//London Math. Soc. Lect. Notes. 1993. **200.** 79—114.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 6

УДК 519.248

М. Д. Миссаров

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ И КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ФЕРМИОННОЙ МОДЕЛИ

В [1] показано, что преобразование ренормгруппы (РГ) в иерархической фермионной модели задается бирациональным отображением в плоскости констант связи, и описаны все неподвижные точки этого преобразования. Оказывается, можно получить некоторую информацию также и о глобальном поведении РГ-инвариантных кривых.

Пусть $\mathbf{N}=\{1, 2, \ldots\}$, $V_{k,s}=\{j : j\in\mathbf{N},\ (k-1)n^s<j\leqslant kn^s\}$, $k,\ s\in\mathbf{N}$ и пусть $s(i,\ j)=\min\{s$: существует k, такое, что $i,\ j\in V_{k,s}\}$. Иерархическое расстояние $d(i,\ j)$, $i,\ j\in\mathbf{N}$, определяется по формуле $d(i,\ j)=n^{s(i,j)}$, если $i\neq j$, $d(i,\ i)=0$. Рассмотрим 4-компонентное фермионное поле $\psi^*(i)=(\bar\psi_1(i),\ \psi_1(i),\ \bar\psi_2(i),\ \psi_2(i))$, $i\in\mathbf{N}$, компоненты которого являются генераторами алгебры Грассмана. РГ-преобразование определяется по формуле $r_a\psi^*(i)=n^{-a/2}\sum\limits_{j\in V_{i,1}}\psi^*(j)$, где a является параметром ренормгруппы. Обозначим $V_{1,N}$ через Λ_N, и пусть A_N — подалгебра Грассмана, порожденная $4n^N$ генераторами, соответствующими этому объему.

Определим гиббсовское состояние («среднее значение») $\rho_N(r,\ g)$ на A_N как

$$(\rho_N(H_N(\psi^*;\ a;\ r,\ g)))(F)=Z_N^{-1}\int F(\psi^*)\exp\{-H_N(\psi^*;\ a;\ r,\ g)\}\,d\psi^*(i),$$

где $d\psi^*=d\psi_1 d\bar\psi_1 d\psi_2 d\bar\psi_2$, и используем обычные правила интегрирования по антикоммутирующим переменным, Z_N обозначает статистическую сумму, $F\in A_N$,

$$H_N(\psi^*;\ a;\ r,\ g)=\sum_{i,j\in\Lambda_N} d_{0,N}(i,\ j)(\bar\psi_1(i)\psi_1(j)+\bar\psi_2(i)\varphi_2(j))+$$

$$+\sum_{i\in\Lambda_N}(r(\bar\psi_1(i)\psi_1(i)+\bar\psi_2(i)\psi_2(i))+g(\bar\psi_1(i)\psi_1(i)\bar\psi_2(i)\psi_2(i))),$$

$$d_{0,N}(i,\ j)=c_1(n)d^{-a}(i,\ j)-c_2(N,\ n),\quad i\neq j,\quad d_{0,N}(i,\ i)=c_3(N,\ n),$$

c_1, c_2, c_3 — некоторые константы. Тогда для ренормированного состояния $\rho'(F)=\rho(F(r_a\psi^*))$ можно доказать, что

$$\rho'_N(H_N(\psi^*;\ a;\ r,\ g))=\rho_{N-1}(H_{N-1}(\psi^*;\ a;\ r',\ g')),$$

где

$$r'=n^{a-1}\left(\frac{(r+1)^2-g}{(r+1)^2-g/n}(r+1)-1\right),\quad g'=n^{2a-3}\left(\frac{(r+1)^2-g}{(r+1)^2-g/n}\right)^2 g. \quad (1)$$

РГ-преобразование имеет две неподвижные точки $(r_\pm(a),\ g_\pm(r_\pm(a)))$, где

$$r_\pm(a)=\frac{\pm\sqrt{n}-n^{a-1}}{1\mp\sqrt{n}},\quad g_\pm(r)=\frac{r(1+r)^2}{1+r\pm 1/\sqrt{n}}.$$

Кроме того, гауссовская точка $(0,\ 0)$, а также δ-функция, которой в плоскости $(r,\ g)$ соответствует бесконечно удаленная точка, являются неподвижными точками РГ для всех значений a.

Пусть $a>3/2$. Тогда существуют устойчивые и неустойчивые РГ-инвариантные кривые, проходящие через неподвижные точки «+» и «—». Пусть

$$\gamma_\pm(r,\ a)=\frac{(r+1)\,(n^{a-1}\mp n^{a-3/2})-n^{a-1}+1}{(r+1)\,(n^{a-1}\mp n^{a-3/2})-n^{a-2}+n^{-1}}(r+1)^2,$$

$$\gamma''(r,\ a)=\frac{r(1-n^{a-2})}{r(1-n^{a-2})+1-n^{-1}}(r+1)^2,$$

$$G_1=\{(r,\ g):0<r<r_+(a),\ \max(\gamma'(r,\ a),\ \gamma_+(r,\ a))<g<g_+(r)\}\cup$$

$$\cup\{(r,\ g):r_+(a)<r<\infty,\ g_+(r)<g<\gamma_+(r,\ a)\},$$

$$G_2=\{(r,\ g):\infty<r<r_-(a),\ \gamma_-(r,\ a)<g<g_-(r)\}\cup$$
$$\cup\{(r,\ g):r_-(a)<r\leqslant-1,\ g_-(r)<g<\gamma_-(r,\ a)\}.$$

Теорема. *Часть устойчивой РГ-инвариантной кривой для неподвижной точки «+» задается гладкой монотонно возрастающей функцией $g=g_+(r)$, $0<r$, и лежит в области G_1. Часть устойчивой РГ-инвариантной кривой для неподвижной точки «—» задается гладкой монотонно убывающей функцией $g=g_-(r)$, $r<-1$, и лежит в области G_2.*

Из этой теоремы можно извлечь информацию о критическом поведении в температурном варианте модели. Можно показать, что

$$\rho_N'(T^{-1}H_N(\psi^*;\ a;\ r,\ g))=\rho_{N-1}(T^{-1}H_{N-1}(\psi^*;\ a;\ S_N^{-1}R(a)S_T(r,\ g))),$$

где $R(a)$ задается формулами (1), $S_T(r,\ g)=(r,\ Tg)$, $T>0$ — «температура». Например, для $r>0$, $g>0$ существует T_{cr}, такое, что $(r,\ T_{cr})$ лежит на устойчивой РГ-инвариантной кривой, проходящей через точку «+». Пусть

$$P_N(x^*;\ T)=c_N\rho_N(T^{-1}H_N(\psi^*;\ a;\ r,\ g))\,\delta\Big(n^{-N}\sum_{i\in\Lambda_N}\psi_i^*-x^*\Big)$$

— грассманово-значная «плотность» среднего спина, δ-функция определяется как $\delta(x)=\bar{x}_1x_1\bar{x}_2x_2$, c_N — нормирующий множитель. Тогда при $a>3/2$ $n^{2N(2-a)}P_N(n^{(a/2-1)}x^*;\ T_{cr})$ стремится к плотности $\mathrm{const}\exp\{-$ $-T_{cr}^{-1}H_0(\psi^*;\ a;\ r_+(a),\ T_{cr}^{-1}g_+(a)\}$. Это означает, что критический индекс $\alpha=a/2$. При $a\leqslant3/2$ точка «+» переходит в нижнюю полуплоскость, а РГ-инвариантная кривая становится устойчивой для точки (0, 0) и в этом случае предел последовательности $n^{2N(2-a)}P_N(x^*;\ T_{cr})$ будет гауссовским.

Антикоммутативный аналог восприимчивости определим как

$$\chi_{N,T}(r,\ g)=n^{-N}\rho_N(T^{-1}H_N(r,\ g))(F),$$
$$F=\Big(\sum_{i\in\Lambda_N}\bar{\psi}_1(i)\Big)\Big(\sum_{i\in\Lambda_N}\psi_1(i)\Big)+\Big(\sum_{i\in\Lambda_N}\bar{\psi}_2(i)\Big)\Big(\sum_{i\in\Lambda_N}\psi_2(i)\Big).$$

Можно показать, что при $T>T_{cr}$ существует термодинамический предел $\chi_T(r,\ g)=\lim_{N\to\infty}\chi_{N,T}(r,\ g)$. С помощью рассуждений, подобных тем, которые были использованы при исследовании бозонной иерархической модели Дайсона [2, 3], можно также доказать, что

$$\frac{\ln\chi_T(r,\ g)}{\ln|T-T_{cr}|}\to\frac{\ln n^{1-a}}{\ln\lambda_1(a)}\quad\text{при } T\to T_{cr},$$

здесь λ_T есть наибольшее собственное число дифференциала отображения $R(a)$ в неподвижной точке «+». Похожие результаты справедливы и в области $r<-1$, $g>0$, где критические индексы определяются спектром дифференциала в точке «—». Вопрос о существовании термодинамического предела при $T>T_{cr}$ остается пока открытым.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 95-01-00270а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lerner E. Yu., Missarov M. D. Fixed points of renormalization group in the hierarchical fermionic model//J. Stat. Phys. 1994. **76**. 805—817.
2. Bleher P. M., Sinai Ya. G.//Communs Math. Phys. 1973. **33**. 23—42.
3. Collet P., Eckmann J.-P. A renormalization group analysis of the hierarchical model in statistical mechanics//Lect. Notes Phys. V. 74. Berlin; Heidelberg; N. Y., 1978.