что $F_1(u)=v$. *Если же* $q\in HQ_\rho^{m,m_0}$ *и* $m_0>n$, *то аналогичное утверждение справедливо для отображения* F_2.

Первая часть теоремы 2 следует из теоремы 1, а вторая — из упомянутого в замечании ее усиления.

В заключение автор выражает благодарность О. Г. Смолянову за постановку задачи и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hamilton R. S. The inverse function theorem of Nash and Moser//Bull. Amer. Math. Soc. 1982. 7, N 1. 65—222.
2. Lojasiewics S., Zehnder E. An inverse function theorem in Frechet—Spaces//J. Funct. Anal. 1979. 33. 165—174.
3. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М., 1977.

Поступила в редакцию
03.01.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987. № 6

УДК 517.95

И. С. Ломов

ОБЫЧНАЯ СХОДИМОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ ПРИ НАЛИЧИИ НУЛЕВЫХ ТОЧЕК СПЕКТРА

Регуляризованные асимптотические ряды (см. [1]) обладают той особенностью, что они сходятся не только асимптотически, но и в обычном смысле, т. е. фактически являются рядами Тейлора. Однако доказательство обычной сходимости не является тривиальным. Ранее обычная сходимость устанавливалась в случае обратимого предельного оператора (см. [1, 2]). В настоящей работе проводится доказательство обычной сходимости для необратимого предельного оператора простой структуры и алгоритм построения регуляризованных рядов развивается на более общий случай по сравнению с работой [3].

1. Постановка задачи. В n-мерном унитарном пространстве H рассмотрим сингулярно возмущенную задачу

$$\varepsilon u'-A(x)u=h(x),\ u(0,\ \varepsilon)=u_0,\ x\in G=(0,\ a), \tag{1}$$

где $A(x)$ — линейный ограниченный необратимый оператор, действующий в H при каждом $x\in\bar G=[0,\ a]$, u_0, $h(x)\in H$, $\varepsilon\in\mathbf{C}$ — параметр, $0<|\varepsilon|\ll 1$, $a\in(0,\ +\infty)$. Требуется найти условия на данные задачи, при которых решение представимо в виде регуляризованного асимптотического ряда, сходящегося в обычном смысле. Решением задачи (1) (при фиксированном ε) назовем функцию $u(x,\ \varepsilon)\in C^\infty(\bar G,\ H)$, удовлетворяющую уравнению и начальному условию.

Отметим, что построение регуляризованных рядов в случае кратной нулевой точки спектра диагонализуемого оператора A и получение условий их асимптотической сходимости впервые были проведены в работе [3]. Асимптотическая сходимость регуляризованных рядов в случае кратного спектра ранее доказывалась М. П. Мягковой в [4] для диагонализуемого оператора A, А. Г. Елисеевым в [5] для оператора жордановой структуры, С. А. Ломовым и А. А. Бободжановым в [6] для неограниченного оператора со счетнократным спектром.

2. Переход к регулярно возмущенной задаче. Для доказательства обычной сходимости рядов необходимо частично изложить формализм получения регуляризованного ряда для решения задачи (1) при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим через $\{\lambda_k(x)\}_{k=1}^n$ ($\lambda_k \in \mathbf{C}$) систему собственных значений оператора A, занумерованных с учетом их кратности. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_{p+1}$ — кратности различных собственных значений (k_{p+1} — кратность нулевого собственного значения), $k_1 + \ldots + k_{p+1} = n$. Через $m(l)$ обозначим номер первого собственного значения в цепочке $\{\lambda_k\}$, имеющего кратность k_l $(l = 1, 2, \ldots, p+1)$: $m(l) = 1 + (k_0 + k_1 + \ldots + k_{l-1})$, $k_0 = 0$. Тогда можно записать: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{k_1}$, $\lambda_{m(2)} = \ldots = \lambda_{m(3)-1}$, $\ldots, \lambda_{m(p+1)} = \ldots = \lambda_n = 0$. Потребуем выполнения следующих условий.

Условия $\mathcal{A}$. 1. Оператор $A(x)$ имеет n линейно независимых на $\bar{G}$ собственных функций $b_k(x)$, отвечающих собственным значениям $\lambda_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$. 2. Собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m(p+1)-1}$ — ненулевые, $\lambda_{m(p+1)} \equiv \ldots \equiv \lambda_n \equiv 0$, $x \in \bar{G}$. 3. Если $\lambda_i(x) \not\equiv \lambda_j(x)$ на $\bar{G}$, то $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$ $\forall x \in \bar{G}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

В соответствии с методом регуляризации (см. [1]) введем *регуляризирующие* переменные

$$t_l = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \lambda_{m(l)}(\tau)\, d\tau \equiv \varphi_l(x, \varepsilon), \quad l = 1, 2, \ldots, p;$$

обозначим $t = \{t_1, \ldots, t_p\}$, $\varphi(x, \varepsilon) = \{\varphi_1(x, \varepsilon), \ldots, \varphi_p(x, \varepsilon)\}$. Наряду с задачей (1) рассмотрим расширенную задачу

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon \frac{\partial y}{\partial x} + D_\lambda y - A(x) y = h(x), \quad y(0, 0, \varepsilon) = u_0. \tag{2}$$

Ее решение $y(x, t, \varepsilon)$ в области $(x, t) \in G \times \mathbf{C}^p$ должно удовлетворять условию

$$y(x, t, \varepsilon)|_{t=\varphi(x,\varepsilon)} = u(x, \varepsilon), \tag{3}$$

где $u(x, \varepsilon)$ — решение задачи (1); $D_\lambda = \lambda_{m(1)} \dfrac{\partial}{\partial t_1} + \ldots + \lambda_{m(p)} \dfrac{\partial}{\partial t_p}$.

Решение задачи (2) определяем в виде ряда теории возмущений

$$y(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i(x, t) \tag{4}$$

с коэффициентами y_i из *пространства безрезонансных решений* U:

$$U = \Big\{ y(x, t) : y = \sum_{l=1}^{p+1} y_l(x) e^{t_l} = \sum_{l=1}^{p+1} e^{t_l} \sum_{k=1}^{n} y_{kl}(x) b_k(x),$$

$$t_{p+1} = 0, \ y_{kl}(x) \in C^\infty(\bar{G}, \mathbf{C}) \Big\}.$$

На U при каждом $x \in \bar{G}$ вводится обычная гильбертова норма. Функции $y_i(x, t)$ — коэффициенты ряда (4) — определяем как решения следующих итерационных задач в пространстве U:

$$L_0 y_0 \equiv D_\lambda y_0 - A(x) y_0 = h(x), \ y_0(0, 0) = u_0, \ \frac{\partial y_0}{\partial x} \perp \mathcal{N}(L_0^*), \ x \in G;$$

$$L_0 y_i = -\frac{\partial y_{i-1}}{\partial x}, \ y_i(0, 0) = 0, \ \frac{\partial y_i}{\partial x} \perp \mathcal{N}(L_0^*), \ x \in G, \ i = 1, 2, \ldots.$$

Для решения итерационных задач вводим сопряженное с U пространство U^* (см. [6, с. 82]), которое отождествим со следующим пространством функций:

$$U^* = \left\{ z(x, t) : z = \sum_{l=1}^{p+1} \sum_{k=1}^{n} z_{kl}(x) b_k^*(x) e^{t_l},\ z_{kl}(x) \in C^\infty(\bar{G}, \mathbf{C}) \right\},$$

где b_k^* — собственные функции оператора A^* (сопряженного к оператору A), отвечающие собственным значениям $\bar{\lambda}_k$. На элементах U и U^* вводим скалярное произведение $\langle y, z \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p+1} y_{kl} \bar{z}_{kl}$, $\forall y \in U$, $\forall z \in U^*$. Базисными элементами ядра оператора $L_0^* = D_{\bar{\lambda}} - A^*$ $\left(\text{где } D_{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda}_{m(1)} \frac{\partial}{\partial t_1} + \ldots + \bar{\lambda}_{m(p)} \frac{\partial}{\partial t_p} \right)$ являются функции $b_k^* \exp(t_l)$, $k = m(l), \ldots, m(l+1) - 1$, $l = 1, \ldots, p+1$.

В работе [3] доказаны теоремы о нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач в U для случая, когда ненулевые точки спектра оператора A различны. Эти теоремы остаются справедливыми и в нашем случае (оператор L_0 действует из конечномерного пространства в конечномерное). Условия ортогональности функции $y'_x(x, t)$ ($y(x, t)$ — произвольный коэффициент ряда (4)) ядру $\mathcal{N}(L_0^*)$, используемые при обосновании этих теорем, можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$y'_{kl} + \sum_{i=1}^{n} (b'_k, b_i^*) y_{il} = 0,\ k = m(l), \ldots, m(l+1) - 1;\ l = 1, \ldots, p+1;$$

начальные условия для функций $y_{kl}(x)$ определяются через начальные условия исходной задачи. Отметим, что в формулировке теоремы 3 работы [3] пропущено условие $h(x) \perp \mathcal{N}(A^*)$.

3. Формулировка основных результатов. Обозначим через $\mathcal{L}(H)$ (кратко $\mathcal{L}$) пространство линейных ограниченных операторов, действующих в H. Результат для однородного уравнения (1) является более общим (безусловным), поэтому рассмотрим этот случай отдельно.

Теорема 1. *Пусть оператор $A(x)$ из класса $C^\infty(\bar{G}, \mathcal{L})$ удовлетворяет условиям $\mathcal{A}$; пусть $h(x) \equiv 0$ в $\bar{G}$. Тогда регуляризованный ряд* (4) *с коэффициентами из U единствен и решение $y(x, t, \varepsilon)$ задачи* (2) *— сумма ряда* (4) *— является аналитической функцией в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (равномерно по $x \in \bar{G}$ при каждом фиксированном $t \in \mathbf{C}^p$). Сужение* (3) *ряда* (4) *представляет собой решение задачи* (1) *(при каждом фиксированном достаточно малом $|\varepsilon|$).*

Основному результату для случая $h \not\equiv 0$ предпошлем вспомогательное утверждение о представлении формального решения неоднородного уравнения (1).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия $\mathcal{A}$, $A \in C^\infty(\bar{G}, \mathcal{L})$, $h \in C^\infty(\bar{G}, H)$ и $h \perp \mathcal{N}(A^*)$. Тогда уравнение* (1) *имеет формальное решение $w(x, \varepsilon)$, регулярно зависящее от ε и представимое в виде формального степенного ряда*

$$w(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(x),\ w_k(x) \in C^\infty(\bar{G}, H). \tag{5}$$

Ряд (5) назовем *основным*.

Теорема 2. *При выполнении условий леммы 1 регуляризованный ряд* (4) *с коэффициентами из U единствен и обладает следующими свойствами:*

1) *если сумма основного ряда* (5) *является аналитической по ε функцией в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$ равномерно по $x\in\bar{G}$, то и решение $y(x, t, \varepsilon)$ задачи* (2), *являющееся суммой ряда* (4), *также аналитическая функция в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$ (равномерно по $x\in\bar{G}$ при каждом фиксированном $t\in\mathbf{C}^p$);*

2) *если ряд* (5) *сходится только асимптотически при $\varepsilon\to 0$ (а в обычном смысле расходится), то и регуляризованный ряд* (4) *сходится только асимптотически.*

Утверждение теоремы 2 непосредственно следует из теоремы 1, леммы 1 и структуры функций $y_i(x, t)$ — коэффициентов ряда (4).

4. Решение вспомогательного операторного уравнения. Приведем две леммы о структуре решения операторного уравнения

$$\varepsilon Z'-A(x)Z=0,\ \varepsilon\to 0,\ x\in G, \tag{6}$$

в пространстве H. Матрицы операторов из $\mathscr{L}$ рассматриваются в естественном ортонормированном базисе в H. Наличие кратных точек спектра привносит определенные сложности в обоснование этих лемм. Основное отличие от случая простого спектра состоит в том, что вместо распадающейся системы дифференциальных уравнений имеем нераспадающуюся систему (12) и другой вид операторов $P_k(x)$, $k\geqslant 0$. В остальном при доказательстве лемм следуем схеме, изложенной в [1, с. 52—56].

Лемма 2. *Пусть A из класса $C^\infty(\bar{G}, \mathscr{L})$ удовлетворяет условиям $\mathscr{A}$. Тогда существует формальное решение уравнения* (6), *представимое в виде формального степенного ряда*

$$Z(x, \varepsilon)=P(x, \varepsilon)e^{\Lambda(x,\varepsilon)}=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k P_k(x)e^{\Lambda(x,\varepsilon)}, \tag{7}$$

где $\Lambda(x, \varepsilon)\in\mathscr{L}$ — оператор с матрицей $\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\lambda_1(\tau)d\tau, \ldots, \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\lambda_n(\tau)d\tau\right\}$, *операторы $P_k\in\mathscr{L}$ подлежат определению.*

Лемма 3. *При условиях леммы 2 оператор $P(x, \varepsilon)$ из* (7) *аналитичен по ε в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$ (равномерно по $x\in\bar{G}$).*

Доказательство леммы 2. Для оператора $P(x, \varepsilon)$ получим следующее уравнение: $\varepsilon P'+P\Lambda(\lambda(x))-A(x)P=0$, где $\Lambda(\lambda)\in\mathscr{L}$ — оператор с матрицей $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Формально продифференцировав ряд для P, приравняем в последнем уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε:

$$P_0\Lambda(\lambda)-AP_0=0, \tag{8}$$

$$P_k\Lambda(\lambda)-AP_k=-P_{k-1},\ k=1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Исследуем разрешимость этих уравнений. Оператор P_0 определим в виде $P_0(x)=B(x)L(c(x))$, где $B\in C^\infty(\bar{G}, \mathscr{L})$ — обратимый оператор — решение уравнения $AB=B\Lambda(\lambda)$ (такое решение существует, так как оператор A диагонализуем и его спектр сохраняет постоянную кратность), $L(c)\in C^\infty(\bar{G}, \mathscr{L})$ — оператор общего вида, коммутирующий с

$\Lambda(\lambda)$ на $\bar{G}$. Матрица оператора $L(c)$ имеет следующий вид: на пересечении строк и столбцов с номерами из множества M_l,

$$M_l=\{m(l),\ m(l)+1,\ \ldots,\ m(l)+k_l-1\},\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ p+1, \tag{10}$$

стоят произвольные элементы c_{ij}, $i,\ j\in M_l$, а остальные элементы в этих строках и столбцах — нули. Оператор P_0 удовлетворяет уравнению (8) при произвольных c_{ij}, которые определим из условия разрешимости уравнения (9) при $k=1$. Оператор P_1 ищем в виде $P_1(x)=B(x)D_1(x)$, где $D_1\in C^\infty(\bar{G},\ \mathscr{L})$ — произвольный оператор, удовлетворяющий уравнению

$$D_1\Lambda(\lambda)-\Lambda(\lambda)D_1=-B^{-1}P_0',\ x\in G. \tag{11}$$

Пусть $\{d_{ij}(x)\}$ — матрица оператора D_1. Матрицу оператора в левой части уравнения (11) можно представить в виде $\{(\lambda_i-\lambda_j)d_{ij}\}$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, из чего заключаем, что элементы матрицы, стоящие на пересечении строк и столбцов с номерами из множеств M_l, нулевые (функции d_{ij} в этих элементах остаются пока неопределенными). В остальных элементах матрицы $\lambda_j-\lambda_i\neq 0$ в $\bar{G}$; функции d_{ij} в этих элементах однозначно определяются из уравнения (11). Мы установили, что необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (11) является равенство нулю элементов матрицы оператора $B^{-1}P_0'$ с номерами $i,\ j\in M_l$. Нетрудно убедиться, что эти элементы представляют собой линейные дифференциальные выражения первого порядка относительно неизвестных c_{ij}. Приравнивая эти элементы нулю, получаем дифференциальные уравнения. Фиксируем номер l. Группируя эти уравнения по столбцам минора с элементами, имеющими номера из M_l, получаем k_l систем дифференциальных уравнений с одинаковыми матрицами при неизвестных. Запишем эти k_l систем в единой форме

$$y_j'+B_1(x)y_j=0, \tag{12}$$

где $y_j=\{c_{m(l),\,j},\ c_{m(l)+1,\,j},\ \ldots,\ c_{m(l)+k_l-1,\,j}\}$, j принимает все значения из M_l; B_1 — часть матрицы оператора $B^{-1}B'$. Для однозначного определения функций c_{ij} из уравнений (12) выберем начальные условия для $y_j\,(j\in M_l)$ так, чтобы эти функции образовывали фундаментальную систему решений однородного уравнения (12) при $x\in\bar{G}$. Оператор P_0 определен.

Отметим сразу, что определитель, составленный из элементов c_{ij} с номерами $i,\ j\in M_l$, отличен от нуля. Так как произведение этих $p+1$ определителей равно определителю матрицы оператора $L(c)$, то оператор $L(c(x))$ обратим $(x\in\bar{G})$ и, следовательно, существует обратный к P_0 оператор $P_0^{-1}\in\mathscr{L}$.

Итак, доказана разрешимость уравнения (11), а следовательно, и (9) (при $k=1$). Неопределенными остались элементы d_{ij} с номерами (10). Процесс нахождения d_{ij} аналогичен определению c_{ij}: ищем оператор P_2 в виде $P_2=BD_2$, $D_2(x)\in C^\infty(\bar{G},\ \mathscr{L})$; для D_2 получаем уравнение вида (11); определяем d_{ij} из условия разрешимости этого уравнения и определяем элементы матрицы оператора D_2 с номерами $i,\ j\notin M_l$, $l=1,\ \ldots,\ p+1$. Методом математической индукции устанавливаем разрешимость всех уравнений (9) при $k\in\mathbf{N}$. Лемма 2 доказана.

Для доказательства леммы 3 достаточно показать, что в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$ формальный степенной ряд $P(x,\ \varepsilon)$ имеет формальный обратный $P^{-1}(x,\ \varepsilon)$, $x\in\bar{G}$. Это следует из того, что, как доказано в лемме 2, нулевой член ряда — оператор P_0 — обратим для $x\in\bar{G}$.

5. Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 2, произвольное решение уравнения (1) представимо в виде ($h(x)\equiv 0$)

$$u(x,\ \varepsilon)=Z(x,\ \varepsilon)c(\varepsilon)=P(x,\ \varepsilon)e^{\Lambda(x,\varepsilon)}c(\varepsilon),\quad \forall c(\varepsilon)\in H.$$

Запишем решение задачи (1) следующим образом:

$$u(x,\ \varepsilon)=Z(x,\ \varepsilon)P^{-1}(0,\ \varepsilon)u_0=P(x,\ \varepsilon)e^{\Lambda(x,\varepsilon)}P^{-1}(0,\ \varepsilon)u_0. \tag{13}$$

Регуляризуем задачу (1), введя переменные $t_l (l=1,\ \ldots\ ;\ p)$. Перейдем к задаче (2). Заменив в (13) оператор $\Lambda(x,\ \varepsilon)$ на оператор $\Lambda(t)$ с матрицей $\mathrm{diag}\{t_1,\ \ldots,\ t_p,\ 0,\ \ldots,\ 0\}$, получим функцию независимых переменных $(x,\ t)\in\bar{G}\times\mathbf{C}^p$

$$\tilde{y}(x,\ t,\ \varepsilon)=Z(x,\ t,\ \varepsilon)P^{-1}(0,\ \varepsilon)u_0=P(x,\ \varepsilon)e^{\Lambda(t)}P^{-1}(0,\ \varepsilon)u_0. \tag{14}$$

Из леммы 3 следует, что функция (14) аналитична по ε в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$ равномерно по $x\in\bar{G}$ при каждом $t\in\mathbf{C}^p$. Эта функция является решением задачи (2). Действительно, подставив функцию (14) в (2):

$$L_\varepsilon\tilde{y}=[\varepsilon P'(x,\ \varepsilon)+P(x,\ \varepsilon)\Lambda(\lambda)-A(x)P(x,\ \varepsilon)]e^{\Lambda(t)}P^{-1}(0,\ \varepsilon)u_0$$

и вспомнив уравнение для оператора P, получим $L_\varepsilon\tilde{y}\equiv 0$, $\tilde{y}(0,\ 0,\varepsilon)=u_0$. Заменим P степенным рядом и разложим аналитическую функцию $e^{\Lambda(t)}c(\varepsilon)$ в степенной ряд. Внутри общего интервала сходимости эти ряды можно перемножать, поэтому решение $\tilde{y}(x,\ t,\ \varepsilon)$ представимо в виде сходящегося ряда по степеням ε с коэффициентами из пространства U. В силу теоремы единственности для регуляризованного ряда (4) с коэффициентами из U функция (14) есть решение задачи (2), представимое в виде регуляризованного ряда (4). Аналитичность в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$ функции $\tilde{y}(x,\ t,\ \varepsilon)$, а следовательно, и соответствующего ряда (4) доказана выше. Сужение (3) решения $\tilde{y}$ — функция (13) — является (единственным) решением задачи (1). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Мы показали, что для построения решения сингулярно возмущенной задачи Коши (1) в виде сходящегося функционального ряда (при каждом достаточно малом $|\varepsilon|$ и при выполнении условий теоремы 1) следует воспользоваться методом регуляризации сингулярных возмущений: построить решение (4) задачи (2) (ряд (4), по доказанному, есть ряд Тейлора в окрестности точки $\varepsilon=0$) и взять сужение (3) этого ряда, являющееся решением задачи Коши (1). Структура решения (3) задачи (1) такова: при экспоненциальных множителях $\exp(\varphi_l(x,\ \varepsilon))$, $l=1,\ \ldots,\ p$, стоят ряды Тейлора по степеням ε, сходящиеся в обычном смысле при достаточно малых по модулю комплексных ε (равномерно по $x\in\bar{G}$). При этом решение задачи Коши (1) будет ограниченным по ε, когда $\varepsilon\to 0$, при выполнении условия $\mathrm{Re}(\lambda_{m(l)}/\varepsilon)\leqslant 0$, $l=1,\ \ldots,\ p$.

6. Доказательство леммы 1. Подставляя ряд (5) в уравнение (1), получаем уравнение для функций w_i:

$$A(x)w_0(x)=-h(x), \tag{15}$$

$$A(x)w_i(x)=w'_{i-1}(x),\ x\in G,\ i=1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{16}$$

Оператор A необратим. Для разрешимости уравнений (15), (16) потребуем ортогональности правых частей уравнений ядру $\mathcal{N}(A^*)$. Систему собственных функций $\{b_k^*\}_{k=1}^n$ оператора A^* выберем так, чтобы

системы $\{b_k\}$ и $\{b_k^*\}$ были биортогональны на $\bar{G}$ (см. [7, с. 125]). Собственные функции $\{b_k^*\}_{k=m(p+1)}^n$, отвечающие нулевому собственному значению, образуют базис ядра $\mathcal{N}(A^*)$. Собственные функции $\{b_k\}_{k=1}^n$ образуют базис в H при каждом $x\in\bar{G}$. Таким образом, условие $h\perp\mathcal{N}(A^*)$ эквивалентно следующему представлению $h: h(x)=$ $=h_1(x)b_1(x)+\ldots+h_{m(p+1)-1}(x)b_{m(p+1)-1}(x)$, $x\in\bar{G}$. Представим решение уравнения (15) в виде $w_0(x)=w_{01}(x)b_1(x)+\ldots+w_{0n}(x)b_n(x)$, $x\in\bar{G}$, тогда из (15): $w_{0k}=-h_k/\lambda_k$, $k=1, \ldots, m(p+1)-1$. Функции $w_{0k}(x)$, $k\geqslant m(p+1)$, найдем из условия $w_0'(x)\perp\mathcal{N}(A^*)$. Разложив функцию w'_0 по базису (см. [7, с. 121]), получим $w_0'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\Big[w_{0k}'(x)+\sum\limits_{i=1}^{n}w_{0i}(x)\times$ $\times(b_i', b_k^*)\Big]b_k(x)$, и для разрешимости уравнения (16) при $i=1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$w_{0k}'+\sum_{i=1}^{n}w_{0i}(b_i', b_k^*)=0,\ x\in\bar{G},\quad k=m(p+1), \ldots, n.$$

Положив $w_{0k}(0)=\alpha_k$, $\forall\alpha_k\in\mathbf{C}$, $k\geqslant m(p+1)$, однозначно определим оставшиеся функции w_{0k}, $w_{0k}\in C^\infty(\bar{G}, \mathbf{C})$. Решение уравнения (15) полностью определено. При этом $w_0'\perp\mathcal{N}(A^*)$ и уравнение (16) для $i=1$ разрешимо. Первые $m(p+1)-1$ компонент функции w_1 находим из уравнения (16), $i=1$, остальные k_{p+1} компонент — из условия ортогональности $w_1'\perp\mathcal{N}(A^*)$, необходимого для разрешимости уравнения (16) при $i=2$. Методом математической индукции доказываем разрешимость всех задач (15), (16). Лемма 1 доказана.

Решение задачи (1) можно записать в виде (см. (13))

$$u(x, \varepsilon)=P(x, \varepsilon)e^{\Lambda(x,\varepsilon)}P^{-1}(0, \varepsilon)[u_0-w(0, \varepsilon)]+w(x, \varepsilon).$$

Это решение является сужением (3) ряда (4). Таким образом, метод регуляризации сингулярных возмущений и в случае необратимого предельного оператора A позволяет строить асимптотические ряды, сходящиеся к решению задачи (1) в обычном смысле, т. е. строить точные решения сингулярно возмущенных задач, основные ряды для которых сходятся равномерно по $x\in\bar{G}$.

Замечание 2. Теоремы 1, 2 справедливы и в том случае, когда оператор A и функции h, u_0 зависят регулярно от ε и оператор $A(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon=0$ удовлетворяет условиям теорем.

Замечание 3. Изучение задачи Коши при $\varepsilon\to 0$ с быстрыми и медленными переменными

$$\varepsilon u'-A_1(x)u-B_1(x)v=h_1(x),\ u(0, \varepsilon)=u_0,$$
$$v'-A_2(x)u-B_2(x)v=h_2(x),\ v(0, \varepsilon)=v_0,$$

при условии, что оператор A_1 удовлетворяет условиям $\mathcal{A}$, сводится к рассмотренной задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. Ломов С. А. Аналитические решения сингулярно возмущенных задач//Докл. АН СССР. 1982. **265**, № 3. 529—533.

3. Ломов И. С. Регуляризация сингулярных возмущений по спектру предельного оператора//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1976. № 3. 6—13.
4. Мягкова М. П. Асимптотическое решение задачи Коши в случае тождественно кратных точек спектра//Тр. МЭИ. 1975. Вып. 260. 129—134.
5. Елисеев А. Г. Теория сингулярных возмущений для систем дифференциальных уравнений в случае кратного спектра предельного оператора//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1984. **48**, № 5. 999—1041.
6. Бободжанов А. А., Ломов С. А. Асимптотическое интегрирование задачи Коши со счетнократным спектром//Матем. заметки. 1984. **35**, вып. I. 63—82.
7. Садовничий В. А. Теория операторов. М., 1979.

Поступила в редакцию
20.01.86