Е. В. Чижонков, К оптимизации алгоритмов решения задачи Стокса,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1995, номер 6, 93–96

2. Данными методами может быть установлена глобальная разрешимость задачи Коши для одномерной системы газовой динамики в эйлеровых координатах, включающей законы сохранения массы, импульса и энергии, которая была доказана в [3] в лагранжевых координатах. При этом, как показывают примеры, в последнем случае можно говорить только о сходимости к функциональному решению по обобщенной последовательности, а само решение может быть сингулярной обобщенной функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М., 1978.
2. Галкин В. А. Функциональные решения законов сохранения//Докл. АН СССР. 1990. **310**, № 4. 834—839.
3. Тупчиев В. А. О разрешимости в целом задачи Коши для системы газовой динамики//Докл. РАН. 1995. **338**, № 1 (в печати).

Поступила в редакцию
03.03.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1995. № 6

УДК 519.635.8

Е. В. Чижонков

К ОПТИМИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТОКСА

В настоящее время известно несколько асимптотически оптимальных алгоритмов для решения стационарных уравнений типа Стокса и Навье—Стокса в переменных скорость—давление (см. [1—4] и цитированную там литературу). Однако реальная эффективность этих методов сильно зависит от выбора итерационных параметров, проблема оптимизации которых, к сожалению, исследована недостаточно. Одной из главных причин такого положения является применение только энергетических неравенств для получения оценок спектра разрешающих операторов. Этот подход эффективен, например, при исследовании методов решения эллиптических уравнений, а в данном случае может приводить к завышенным оценкам.

В настоящей работе предлагается новый способ анализа алгоритмов для решения уравнений Стокса, основанный на специальной параметризации спектра операторов перехода. Изложение проводится на примере метода, сочетающего идеи предобусловливания и симметризации по Гауссу [1, 2]. Здесь достоинство нового подхода проявляется в возможности выбора наилучшего предобусловливателя данного вида.

Перейдем к последовательному изложению результатов. Пусть Ω — область из R^s ($s=2,3$) с конечной, кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Определим следующие пространства: $W=(\overset{\circ}{W}{}^1_2)^s$ — векторное пространство Соболева с энергетическим скалярным произведением, $L_R=L_2(\Omega)/R^1$ — подпространство функций из $L_2(\Omega)$, ортогональных единице, $Z=W\times L_R$ — пространство решений первой краевой задачи Стокса

$$\begin{cases} -\Delta u+\operatorname{grad} p=f^1, \\ \quad -\operatorname{div} u=f^2, \\ \quad z=(u,\ p)\in Z, \end{cases} \tag{1}$$

где необходимо $f^2 \in L_R$. Здесь и далее решения задач понимаются в обобщенном смысле, что означает трактовку уравнений как соответствующих билинейных форм. Кроме этого нам потребуется подпространство соленоидальных функций из W: $H=\{u\in W,\ \operatorname{div} u=0\}$, его ортогональное дополнение будем обозначать через G, так что $W=H\oplus G$.

Спектром пучка операторов теории упругости (спектром Коссерá) называется решение задачи

$$\Delta u+\omega \operatorname{grad} \operatorname{div} u=0,\quad u|_{\partial\Omega}=0,$$

где ω — спектральный параметр. В дальнейшем будут существенно использоваться следующие свойства спектра [5, 6].

1. Существует счетная система собственных векторов $\{u_n\}$, удовлетворяющая каждому из условий ортогональности

$$(-\Delta u_n,\ u_k)=0,\ (\operatorname{div} u_n,\ \operatorname{div} u_k)=0,\ n\neq k.$$

2. Система $\{u_n\}$ полна в W, а система $\{\operatorname{div} u_n\}$ — в L_R.

3. Собственные значения ω расположены на луче $[-\infty,\ -1]$, причем границы луча — изолированные точки бесконечной кратности.

4. Собственные векторы, отвечающие бесконечному собственному значению, образуют базис $\{h_n\}$ в H, остальные же — базис $\{g_n\}$ в G соответственно.

Рассмотрим теперь спектральную задачу

$$Rp=\operatorname{div} \Delta^{-1} \operatorname{grad} p=tp,\quad p\in L_R. \tag{2}$$

Здесь выражение $\Delta^{-1}\varphi$ означает вектор-функцию $\psi\in W$, такую, что $\Delta\psi=\varphi$, t — спектральный параметр. Имеет место [7]

Лемма 1. *Собственные пары задачи* (2) (t_n, p_n) *представимы в виде* $(-\omega_n^{-1},\ \operatorname{div} g_n)$.

Это предложение, несмотря на простоту, носит принципиальный характер. Во-первых, оно устанавливает естественную связь между базисами пространств W и L_R, что в свою очередь дает полноту в Z произвольной системы функций $\{z_n^{1,2,3}\}$ вида

$$z_n^1=(h_n,\ 0),$$

$$z_n^{2,3}=(g_n,\ \operatorname{div} g_n/\gamma_n^{2,3}),$$

где $\gamma_p^2\neq\gamma_p^3\neq 0$ (при фиксированном n). Этот базис удобен для представления погрешности решения задачи Стокса в итерационных алгоритмах, поскольку оператор сокращения ошибки имеет в таком базисе либо диагональный, либо близкий к нему вид. Во-вторых, лемма 1 порождает параметризацию спектральных характеристик операторов, выражающую зависимость от исходной области Ω. Действительно, поскольку спектр Коссера имеет только одну [5] точку сгущения собственных значений $\omega=-2$, а бесконечное собственное значение ω изолировано, то можно считать, что $\operatorname{sp}(R)\in[m,1]$, $0<m\leqslant 1/2$. Введение параметра $m=m(\Omega)$ — нижней границы спектра задачи (2) — позволяет исследовать алгоритм решения задачи Стокса для широкого круга областей Ω одновременно.

Перейдем к анализу конкретного примера. В монографии [1] (см. также [2]) был исследован ряд методов для решения задач с седловыми операторами. Особенный интерес представляет сочетание предобусловливания с симметризацией по Гауссу. Рассмотрим ее простейший вариант применительно к задаче Стокса. Запишем (1) в операторном виде $Lz=F$, где $z=(u,p)$, $F=(f^1,f^2)$. Кроме этого нам потребуется задача с модельным оператором $Bz=D$, $D=(d^1,d^2)$:

$$-\Delta u=d^1,\ \alpha^{-1}p=d^2,$$

где $u\in W$, p, $d^2\in L_R$, а $\alpha>0$ — числовой параметр, подлежащий уточнению. Рассматриваемый алгоритм решения (1) запишем в следующем виде:

$$B(z^{k+1}-z^k)=-\tau_k L^*B^{-1}(Lz^k-F). \tag{3}$$

В данном случае сходимость метода определяется спектральными характеристиками оператора A: $Z\to Z$, $A=B^{-1}L^*B^{-1}L$. При наличии полной системы собственных векторов существенной является мера обусловленности $\operatorname{cond}(A)=\sup\operatorname{sp}(A)/\inf\operatorname{sp}(A)$, поскольку положительность спектра A гарантируется структурой самого оператора.

Рассмотрим спектральную задачу $Az=\lambda z$:

$$\begin{cases} u-\Delta^{-1}\operatorname{grad}p+\alpha\Delta^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}u=\lambda u,\\ -\alpha\operatorname{div}u+\alpha Rp=\lambda p,\end{cases} \tag{4}$$

для которой справедлива следующая

Лемма 2. *Собственные пары* (λ_n, z_n) *задачи* (4) *представимы в виде*

$$\lambda_n^1=1,\ z_n^1=(h_n,\ 0);$$

$$\lambda_n^{2,3}=\alpha t_n+1/2\pm\sqrt{\alpha t_n+1/4},\ z_n^{2,3}=(g_n,\ p_n/\gamma_n^{2,3}),$$

где

$$\gamma_n^{2,3}=-\frac{1\pm\sqrt{4\alpha t_n+1}}{2\alpha}\neq 0,$$

(t_n, p_n) — *собственные пары задачи* (2). *Система собственных функций* $\{z_n^{1,2,3}\}$ *полна в* Z.

Из полученных результатов следует, что оператор A допускает диагональное матричное представление в пространстве Z, а его спектр принадлежит множеству

$$\Lambda=\{1\}\cup\{\alpha t+1/2\pm\sqrt{\alpha t+1/4},\ t\in[m,\ 1]\}.$$

В данном случае имеет место

Теорема 1. *Пусть в алгоритме* (3) $\tau_k=\tau=\mathrm{const}$. *Тогда при любом* $\alpha>0$ *и произвольном начальном приближении* $z^0\in Z$ *метод сходится к решению задачи* (1) *тогда и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$\tau<\frac{4}{2\alpha+1+\sqrt{4\alpha+1}}.$$

Решение задачи о наилучшем выборе параметров в алгоритме (3) дает следующая

Теорема 2. *Пусть* m — *нижняя граница спектра оператора* R *в* (2). *Тогда при* $\alpha=2/m$ *мера обусловленности оператора простой структуры* $A=B^{-1}L^*B^{-1}L$ *в алгоритме* (3) *принимает наименьшее значение. При этом* $\operatorname{sp}(A)\in[1, 2/m+1/2+\sqrt{2/m+1/4}]$ *и чебышевский набор параметров* τ_k [8] *на указанном отрезке дает асимптотически наилучшую скорость сходимости.*

Подчеркнем отличие полученных результатов от [1, 2]. Для фиксированной метрики погрешности вводится обобщение модельного оператора B (параметр α). Отметим, что ранее предлагавшиеся значения $\alpha=1$ [1] и $\alpha=2$ [2] были равноценны с точки зрения асимптотической оптимальности алгоритма по параметру дискретизации области. В данном же случае производится оптимизация самого показателя скорости сходимости в зависимости от формы области. Применение изложенного подхода для дискретных аналогов (1), таким образом, порождает алгоритм, уже действительно оптимальный в выбранном классе.

Теперь сформулируем основные этапы нового способа анализа алгоритмов в целом. Базовая лемма 1 и свойства спектра Коссера 1—4 дают возможность построить в пространстве Z собственный базис оператора сокращения ошибки. При этом его собственные значения могут быть представлены в виде корней многочлена, коэффициенты которого зависят от итерационных параметров и формы области, параметризованной на основании той же леммы 1. Для получения окончательных формул оптимальных параметров или условий сходимости необходимо аналитически решать возникающие минимаксные задачи. В заключение отметим, что предложенный метод исследования может быть обобщен на случай алгоритмов, у которых оператор перехода может и не иметь простой структуры [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-01729.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяконов Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач. М., 1989.
2. Дьяконов Е. Г. О некоторых классах седловых градиентных методов//Вычислительные процессы и системы. Вып. 5. М., 1987. 101—115.
3. Кобельков Г. М. О численных методах решения уравнений Навье—Стокса в переменных скорость—давление//Вычислительные процессы и системы. Вып. 8. М., 1991. 204—236.
4. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.
5. Михлин С. Г. Спектр пучка операторов теории упругости//Успехи матем. наук. 1973. **28**, № 3 (171). 43—82.
6. Михлин С. Г. Дальнейшее исследование спектра Коссера//Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Математика. 1967. **7**, вып. 2. 96—102.
7. Chizhonkov E. V. Application of the Cossera spectrum to the optimization of a method for solving the Stokes Problem//Russ. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 1994. **9**, N 3. 191—199.
8. Бахвалов Н. С. Численные методы. М., 1975.
9. Чижонков Е. В. О сходимости одного алгоритма для решения задачи Стокса// //Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычисл. матем. и киберн. 1995. № 2. 12—17.

Поступила в редакцию
24.04.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1995. № 6

УДК 519.21

Н. А. Шихова

РАЗЛИЧЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ТИПОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Иногда приходится по данному количеству выборок малого объема проверять гипотезу о принадлежности распределения к некоторому типу, например нормальному, равномерному и т. д. Предполагается, что распределения выборок однотипны, но их параметры меняются