Е. Л. Коротяев, А. Лаптев, Формулы следов для дискретного оператора Шрёдингера,
Функц. анализ и его прил., 2017, том 51, выпуск 3, 81–86

УДК 517.9

Формулы следов для дискретного оператора Шрёдингера*

© 2017. Е. Л. Коротяев, А. Лаптев

Посвящается памяти профессора М. С. Аграновича

DOI: https://doi.org/10.4213/faa3459

1. Введение. Рассмотрим оператор Шрёдингера $H = \Delta + V$ на пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, $d \geqslant 3$, где Δ — дискретный оператор Лапласа на решетке $\mathbb{Z}^d$, определенный формулой

$$(\Delta f)(n) = \frac{1}{2} \sum_{|m-n|=1} f_m, \qquad f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d),\ n = (n_j)_{j=1}^d \in \mathbb{Z}^d.$$

Оператор $V = (V_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$, $V_n \in \mathbb{C}$, является комплексным потенциалом, действует по формуле $(Vf)(n) = V_n f_n$, $n \in \mathbb{Z}^d$, и подчиняется следующему условию:

$$V \in \ell^{2/3}(\mathbb{Z}^d). \tag{1}$$

Здесь $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$, $q > 0$, есть пространство последовательностей $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$, таких, что $\|f\|_q < \infty$, где

$$\|f\|_q = \|f\|_{\ell^q(\mathbb{Z}^d)} = \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{Z}^d} |f_n|, & q = \infty, \\ \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |f_n|^q\big)^{1/q}, & q \in (0,\infty). \end{cases}$$

Отметим, что $\ell^q(\mathbb{Z}^d)$, $q \geqslant 1$, является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_q$. Известно, что спектр оператора Лапласа абсолютно непрерывен и справедливо тождество $\sigma(\Delta) = \sigma_{\rm ac}(\Delta) = [-d, d]$, см., например, [10]. Так как возмущение V ядерное, то по теореме Вейля существенный спектр оператора Шрёдингера H имеет вид

$$\sigma_{\rm ess}(H) = [-d, d].$$

Тем не менее это условие не исключает появление сингулярно непрерывного спектра на отрезке $[-d, d]$. Наша главная цель состоит в том, чтобы найти новые формулы следов для оператора H с комплексным потенциалом V и использовать эти формулы для получения оценок комплексных собственных значений через потенциал.

Отметим, что некоторые из результатов, полученных в данной работе, являются новыми даже в случае вещественных потенциалов благодаря наличию меры ν (см. теорему 3), появляющейся в канонической факторизации соответствующего определителя Фредгольма. Нетривиальность таких мер обусловлена условием (1) на потенциал V. Мы считаем, что было бы интересно изучить связь между свойствами потенциала V и меры ν.

В последнее время равномерные оценки собственных значений операторов Шрёдингера в $\mathbb{R}^d$ с комплекснозначными потенциалами, убывающими на бесконечности, привлекли внимание многих специалистов. Оценки одного собственного значения были доказаны, например, в [8], [4], [19], и оценки сумм степеней

*Работа поддержана грантом РНФ No 15-11-30007.

собственных значений были найдены в [5], [15], [3], [1], [7], [20]. Последние оценки обобщают оценки Либа–Тирринга [16] на несамосопряженный случай. Отметим, что неизвестны какие-либо результаты о числе собственных значений операторов Шрёдингера с комплексными потенциалами. Мы здесь упомянем недавнюю работу [6], где авторы обсуждали эту проблему в деталях для нечетных размерностей.

Для дискретных операторов Шрёдингера большинство результатов были получены в самосопряженном случае; см., например, [22] для случая $\mathbb{Z}^1$. Операторы Шрёдингера с убывающими потенциалами на решетке $\mathbb{Z}^d$ рассматривались в работе Буте де Монвель–Сабани [2], Изоцаки–Коротяева [10], Копыловой [13], Розенблюма–Соломяка [18], Шабана–Вайнберга [21]; см. также ссылки в них. Изоцаки и Коротяев в [10] изучили обратную задачу рассеяния для дискретных операторов Шрёдингера с потенциалами, имеющими конечный носитель. В [11] Изоцаки и Мориока доказали, что в этом случае точечный спектр оператора H на интервале $(-d, d)$ отсутствует. Рассеяние на периодических метрических графах рассматривалось в работе Коротяева–Сабурова [14].

В данной работе мы используем классические результаты из комплексного анализа, которые приводит нас к новому классу формул следов для дискретного оператора Шрёдингера с комплекснозначными потенциалами. В частности, мы используем каноническую факторизацию аналитических функций из класса Харди. Такие факторизации для определителей Фредгольма позволяют получить формулы следов, что приводит к оценке комплексных собственных значений через $\ell^{2/3}_p$-норму потенциала.

2. Определения. Обозначим через $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \subset \mathbb{C}$ диск радиуса $r > 0$ и положим $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1$. Пусть также $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$. Удобно ввести новую спектральную переменную $z \in \mathbb{D}$ формулой

$$\lambda = \lambda(z) = \frac{d}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \in \Lambda := \mathbb{C} \setminus [-d, d], \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Функция $\lambda(z)$ обладает следующими свойствами:

• *Функция $z \to \lambda(z)$ конформно отображает диск $\mathbb{D}$ на спектральную область Λ.*

• *$\lambda(z)$ отображает $z = 0$ в $\lambda = \infty$ и границу $\partial\mathbb{D}$ на разрез $[-d, d]$.*

• *Обратное отображение $z(\,\cdot\,)\colon \Lambda \to \mathbb{D}$ имеет вид $z = d^{-1}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - d^2})$, $\lambda \in \Lambda$, и имеет место асимптотика $z(\lambda) = (d/2)\lambda^{-1} + O(1)\lambda^{-3}$ при $|\lambda| \to \infty$, которая определяет ветвь $z(\lambda)$.*

Введем пространства Харди $\mathscr{H}_p = \mathscr{H}_p(\mathbb{D})$. Пусть F аналитична в $\mathbb{D}$. Для $0 < p \leqslant \infty$ будем говорить, что F принадлежит пространству Харди $\mathscr{H}_p$, если $\|F\|_{\mathscr{H}_p} < \infty$, где величина $\|F\|_{\mathscr{H}_p}$ имеет вид

$$\|F\|_{\mathscr{H}_p} = \begin{cases} \sup_{r\in(0,1)} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |F(re^{i\vartheta})|^p \, d\vartheta\right)^{1p} & \text{при } 0 < p < \infty, \\ \sup_{z\in\mathbb{D}} |F(z)| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

3. Основные результаты. Через $\mathscr{B}_1$ обозначим класс ядерных операторов в $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Так как $V \in \mathscr{B}_1$, то мы можем определить детерминант Фредгольма $D(z)$, $z \in \mathbb{D}$, для пары Δ, $\Delta + V$ формулой (см. различные свойства детерминанта Фредгольма в [9])

$$D(z) = \det(I + V(\Delta - \lambda(z))^{-1}), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Отметим, что если $\lambda_0 \in \Lambda$ — собственное значение оператора H, то $z_0 = z(\lambda_0) \in \mathbb{D}$ есть нуль детерминанта D с такой же кратностью.

Теорема 1. *Пусть потенциал V подчинен условию* (1). *Тогда детерминант $D(z)$ аналитичен в $\mathbb{D}$ и непрерывен вплоть до границы. Он имеет N, $0 \leqslant N \leqslant \infty$, нулей z_j, таких, что*

$$0 < r_0 = |z_1| \leqslant \cdots \leqslant |z_j| \leqslant |z_{j+1}| \leqslant \ldots, \tag{2}$$

и справедлива оценка

$$\|D\|_{\mathscr{H}_\infty} \leqslant e^{C\|V\|_{2/3}}, \tag{3}$$

где постоянная C зависит только от d. Более того, функция $\log D(z)$, определенная условием $\log D(0) = 0$, аналитична в круге $\mathbb{D}_{r_0}$ радиуса $r_0 > 0$, определенного формулой (2), *и имеет в $\mathbb{D}_{r_0}$ ряд Тейлора*

$$\log D(z) = -c_1 z - c_2 z^2 - c_3 z^3 - c_4 z^4 - \cdots,$$

где

$$c_1 = d_1 a, \quad a = 2/d, \quad c_2 = d_2 a^2, \quad c_3 = d_3 a^3 - c_1, \quad c_4 = d_4 a^4 - c_2, \quad \ldots,$$

$$d_1 = \operatorname{Tr} V, \quad d_2 = \operatorname{Tr} V^2, \quad d_3 = \operatorname{Tr}(V^3 + (3d/2)V), \quad \ldots, \quad d_n = \operatorname{Tr}(H^n - H_0^n), \quad \ldots.$$

При доказательстве неравенства (3) основная аналитическая сложность связана с анализом $A(\lambda) = |V|^{1/2}(\Delta - \lambda)^{-1}|V|^{1/2}$ как оператор-функции из Λ в $\mathscr{B}_1$. Грубо говоря, требуется равномерная оценка нормы $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|A(\lambda)\|_{\mathscr{B}_1} < \infty$. Нет никаких результатов об этих оценках, но наши результаты требуют слишком сильного условия (1) на потенциал V.

Для функции D определим произведение Бляшке $B(z)$, $z \in \mathbb{D}$:

$$B = 1 \quad \text{при } N = 0 \quad \text{и} \quad B(z) = \prod_{j=1}^{N} \frac{|z_j|}{z_j} \frac{(z_j - z)}{(1 - \overline{z}_j z)} \quad \text{при } N \geqslant 1. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть потенциал V подчинен условию* (1), *и пусть $N \geqslant 2$. Тогда нули z_j функции D в круге $\mathbb{D}$ (см.* (2)) *имеют оценку*

$$\sum_{j=1}^{N} (1 - |z_j|) < \infty.$$

Более того, произведение Бляшке $B(z)$, $z \in \mathbb{D}$, определенное в (4), *сходится абсолютно в круге $\{|z| < 1\}$, $B \in \mathscr{H}_\infty$ и логарифм произведения $\log B$ имеет в круге $\mathbb{D}_{r_0}$ ряд Тейлора*:

$$\log B(z) = B_0 - B_1 z - B_2 z^2 - \cdots \quad \textit{при } z \to 0, \tag{5}$$

где $|B_n| \leqslant 2r_0^{-n} \sum_{j=1}^{N} (1 - |z_j|)$ и

$$B_0 = \log B(0) < 0, \quad B_1 = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{z_j} - \overline{z}_j \right), \quad \ldots, \quad B_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{z_j^n} - \overline{z}_j^n \right), \quad \ldots.$$

Приведем каноническую факторизацию детерминанта D и его основные свойства.

Теорема 3. *Пусть потенциал V подчинен условию* (1). *Тогда существует сингулярная мера $\nu \geqslant 0$ на $[-\pi, \pi]$, такая, что детерминант D имеет каноническую факторизацию*:

$$D(z) = B(z)e^{-K_\nu(z)}e^{K_D(z)}, \quad K_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\nu(t),$$
$$K_D(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|D(e^{it})|\, dt, \tag{6}$$

для всех $|z| < 1$, где $\log|D(e^{it})| \in L^1(-\pi, \pi)$ и

$$\operatorname{supp}\nu \subset \{t \in [-\pi, \pi] : D(e^{it}) = 0\}.$$

Замечания. 1. О канонической факторизации функций из $\mathscr{H}_p$ см., например, в [12].

2. Заметим, что функция $D_{\text{in}}(z) = B(z)e^{-K_\nu(z)}$ имеет оценку $|D_{\text{in}}(z)| \leqslant 1$, так как $d\nu \geqslant 0$ и $\operatorname{Re}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \geqslant 0$ для всех $(t, z) \in \mathbb{T} \times \mathbb{D}$.

Теорема 4 (формулы следов)**.** *Пусть потенциал V подчинен условию* (1). *Тогда верны следующие равенства*:

$$\frac{\nu(\mathbb{T})}{2\pi} - B_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|D(e^{it})|\, dt \geqslant 0, \tag{7}$$

$$-c_n + B_n = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{-int}\, d\mu(t), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где $d\mu(t) = \log|D(e^{it})|\, dt - d\nu(t)$, $B_0 = \log B(0) = \log(\prod_{j=1}^N |z_j|) < 0$ и B_n определены в (5). *В частности*,

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{z_j} - \overline{z}_j\right) = \frac{2}{d}\operatorname{Tr} V + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{-it}\, d\mu(t), \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{z_j^2} - \overline{z}_j^2\right) = \frac{4}{d^2}\operatorname{Tr} V^2 + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{-2it}\, d\mu(t), \tag{10}$$

и

$$\sum_{j=1}^N \operatorname{Im}\lambda_j = \operatorname{Tr}\operatorname{Im} V - \frac{d}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sin t\, d\mu(t),$$
$$\sum_{j=1}^N \operatorname{Re}\sqrt{\lambda_j^2 - d^2} = \operatorname{Tr}\operatorname{Re} V + \frac{d}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \cos t\, d\mu(t). \tag{11}$$

Имеются работы, посвященные функции спектрального сдвига для несамосопряженного ядерного возмущения (см., например, недавнюю работу [17] и цитированную в ней литературу). Там получены другие формулы следов (см. с. 812, 822 в [17]), выведенные из факторизации детерминанта возмущения в $\mathbb{C}_+$, и нет оценок собственных значений через норму возмущения, что является основной нашей целью. Наверное, формулы следов (7)–(11) приведены впервые. Кратко опишем доказательство. Основная проблема — это интегрируемость функции

$\log|D(e^{it})|$, $t\in[0,2\pi]$, которая следует из (3) и из известных результатов о пространствах Харди. Все функции в (6) имеют ряд Тейлора в круге. Поставляя эти ряды в (6) и приравнивая коэффициенты при степенях z, мы получим все тождества (7), (8).

Теорема 5. *Пусть потенциал V подчинен условию* (1). *Тогда верны следующие оценки*:

$$\sum(1-|z_j|)\leqslant -B_0\leqslant C(d)\|V\|_{2/3}-\frac{\nu(\mathbb{T})}{2\pi}, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Im}\lambda_j\leqslant \operatorname{Tr}\operatorname{Im}V+C(d)\|V\|_{2/3},\quad \textit{если}\ \ \operatorname{Im}V\geqslant 0, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sqrt{\lambda_j^2-d^2}\leqslant \operatorname{Tr}V+C(d)\|V\|_{2/3},\quad \textit{если}\ \ V\geqslant 0. \tag{14}$$

Замечания. 1. Некоторые результаты из теорем 4 и 5 являются новыми для вещественных потенциалов.

2. Кратко опишем доказательство теоремы 5. Из неравенства $1-x\leqslant -\log x$ для всех $x\in(0,1]$ получаем $-B_0=-B(0)=-\sum\log|z_j|\geqslant\sum(1-|z_j|)$. Оценка (3) дает

$$\left|\int_{\mathbb{T}}d\mu(t)\right|\leqslant\int_{\mathbb{T}}C\|V\|_{2/3}\,dt-\nu(\mathbb{T}). \tag{15}$$

Подставляя эти две оценки в тождество (7), получаем (12). Подставляя (15) в тождества (11), получаем (13), (14).

Благодарности. Часть работы написана Е. Л. Коротяевым во время пребывания в Royal Institute of Technology и Mittag-Leffler Institute, Stockholm. Он благодарен этим институтам за гостеприимство.

Литература

[**1**] A. Borichev, L. Golinskii, S. Kupin, Bull. London Math. Soc., **41**:1 (2009), 117–123. [**2**] A. Boutet de Monvel, J. Sahbani, Rev. Math. Phys., **11**:9 (1999), 1061–1078. [**3**] M. Demuth, M. Hansmann, G. Katriel, J. Funct. Anal., **257**:9 (2009), 2742–2759. [**4**] R. L. Frank, Bull. Lond. Math. Soc., **43**:4 (2011), 745–750. [**5**] R. L. Frank, A. Laptev, E. H. Lieb, R. Seiringer, Lett. Math. Phys., **77** (2006), 309–316. [**6**] R. L. Frank, A. Laptev, O. Safronov, J. London Math. Soc., **94**:2 (2016), 377–390. [**7**] R. L. Frank, J. Sabin, `http://arxiv.org/abs/1404.2817`. [**8**] R. L. Frank, A. Laptev, R. Seiringer, Spectral theory and analysis, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 214, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011, 39–44. [**9**] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965. [**10**] H. Isozaki, E. Korotyaev, Ann. Henri Poincaré, **13**:4 (2012), 751–788. [**11**] H. Isozaki, H. Morioka, Inverse Probl. Imaging, **8**:2 (2014), 475–489. [**12**] P. Koosis, *Introduction to H_p spaces*, Cambridge Tracts in Mathematic, vol. 115, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. [**13**] Е. А. Копылова, Алгебра и анализ, **21**:5 (2009), 87–113. [**14**] E. Korotyaev, N. Saburova, `http://arxiv.org/abs/1507.06441`. [**15**] A. Laptev, O. Safronov, Comm. Math. Phys., **292**:1 (2009), 29–54. [**16**] E. H. Lieb, W. Thirring, in: Studies in Mathematical Physics: Essays in Honor of Valentine Bargmann, Princeton University Press,

Princeton, 1976, 269–303. [**17**] M. Malamud, H. Neidhardt, Adv. Math., **274** (2015), 736–832. [**18**] G. Rosenblum, M. Solomjak, Problems in Math. Analysis, No. 41, J. Math. Sci. N. Y., **159**:2 (2009), 241–263. [**19**] O. Safronov, Bull. Lond. Math. Soc., **42**:3 (2010), 452–456. [**20**] O. Safronov, Proc. Amer. Math. Soc., **138**:6 (2010), 2107–2112. [**21**] W. Shaban, B. Vainberg, Appl. Anal., **80** (2001), 525–556. [**22**] M. Toda, *Theory of Nonlinear Lattices*, 2nd. ed., Springer-Verlag, Berlin, 1989.

Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
e-mail: korotyaev@gmail.com, e.korotyaev@spbu.ru

Imperial College London, United Kingdom
e-mail: a.laptev@imperial.ac.uk

Поступило в редакцию
13 октября 2016 г.