S. I. Adian, Finitely defined groups and algorithms, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1957, Volume 117, Number 1, 9–12

Доклады Академии наук СССР
1957. Том 117, № 1

МАТЕМАТИКА

С. И. АДЯН

КОНЕЧНО-ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ГРУППЫ И АЛГОРИТМЫ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 7 V 1957)

Группа F называется конечно-определенной, если она может быть задана конечным числом образующих элементов и определяющих соотношений. Групповое свойство α называется инвариантным, если оно, будучи выполнено в группе F, выполнено и во всякой группе F_1, изоморфной группе F.

В ([3]) была доказана невозможность алгоритмов распознавания для некоторых классов инвариантных свойств конечно-определенных групп. А. А. Марковым доказана невозможность алгоритмов распознавания для весьма широкого класса свойств ассоциативных исчислений ([2]). Первая часть настоящей работы является продолжением работы ([3]). Доказывается теорема, аналогичная теореме А. А. Маркова для ассоциативных исчислений.

Теорема 1. *Пусть α—некоторое инвариантное групповое свойство. Если существуют как конечно-определенная группа F_1, обладающая свойством α, так и конечно-определенная группа F_2, не вложимая ни в какую конечно-определенную группу с этим свойством, то невозможен алгоритм, определяющий для всякой конечно-определенной группы F, обладает она свойством α или нет.*

В работе ([1]) П. С. Новиков построил конечно-определенную группу с неразрешимой проблемой тождества. Пусть эта группа, которую мы обозначим через F_0, задается образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и определяющими соотношениями*

$$A_i = A_i'. \qquad (1)$$

В доказательстве теоремы 1 используется тот факт, что группа F_0 не имеет кручения (последнее в ([1]) не доказано, но без особого труда может быть доказано на основе работы ([1])).

Следующая лемма почти очевидна.

Лемма 1. *Любая конечно-определенная группа F_2 изоморфно вкладывается в конечно-определенную группу F_2', задаваемую системой образующих, которые все имеют бесконечный порядок.*

Пусть группа F_2', в которую изоморфно вкладывается конечно-определенная группа F_2, удовлетворяющая условию теоремы 1, задается образующими $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и определяющими соотношениями

$$B_j = B_j'. \qquad (2)$$

Через F обозначим свободное произведение

$$F \equiv F_0 * F_2' * F_3,$$

где F_3 — свободная группа с одним образующим p.

* При задании конечно-определенной группы мы всегда будем выписывать только положительный алфавит и нетривиальные определяющие соотношения, т. е. соотношения, которые не выполнены в свободной группе.

Группа F определяется образующими

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m, p \tag{3}$$

и определяющими соотношениями (1) и (2).

Две буквы алфавита (3) назовем однотипными, если либо обе они являются образующими группы F_0, либо обе являются образующими группы F'_2. В противном случае они называются разнотипными.

Лемма. 2. *Две разнотипные буквы алфавита группы F являются свободными образующими порожденной ими в F подгруппы.*

Лемма. 3. *Алфавит группы F можно расположить в последовательность с повторениями*

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k, \tag{4}$$

обладающую следующими свойствами: 1) *совокупность букв, стоящих в* (4) *на нечетных местах до e_{k-2}, составляет весь алфавит* (3); 2) *буквы e_i и e_{i+2} разнотипны, буквы e_k и e_{k-1} разнотипны и отличны от буквы p.*

Можно записать определяющие соотношения группы F в алфавите (4). При этом придется добавить ряд соотношений вида $e_i = e_j$, которые будут отражать повторение букв в (4).

Пусть определяющими соотношениями группы F в алфавите (4) будут

$$C_\nu = D_\nu. \tag{5}$$

Рассмотрим произвольное слово A группы F, не содержащее букв p и p^{-1}. По каждому слову такого рода построим конечно-определенную группу, которую будем обозначать через F_{qA}.

Положительный алфавит группы F_{qA} получается добавлением к алфавиту (4) k новых букв $q_1, q_2, \ldots, q_k$. В качестве определяющих соотношений группы F_{qA} берем все соотношения (5), добавляя к ним следующие соотношения:

$$q_i q_{i+1} = q_{i+1} e_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1); \tag{6}$$

$$e_{2j-1} q_{2j-1} = q_{2j-1} E \quad \left(j = 1, 2, \ldots, \left[\frac{k-1}{2}\right]\right); \tag{7}$$

$$e_k q_k E = q_k e_k q_k^{-1}. \tag{8}$$

Основная лемма. *Если $A = 1$ в группе F, то соответствующая группа F_{qA} единичная. Если слово A имеет бесконечный порядок в группе F, то группа F является подгруппой группы F_{qA}.*

Первая часть этой леммы легко доказывается на основании соотношений (6), (7), (8) и леммы 3. Доказательство второй части сложно и представляет основную трудность настоящей работы.

Пользуясь основной леммой, доказать теорему 1 нетрудно.

Каждому слову A группы F_0 поставим в соответствие конечно-определенную группу

$$F'_{qA} = F_{qA} * F_1,$$

где F_{qA} — построенная выше по слову A группа; F_1 — конечно-определенная группа со свойством α, существование которой обусловлено в теореме 1.

Мы получили некоторый класс конечно-определенных групп. Если $A = 1$ в F_0, то $A = 1$ в F, и, по основной лемме, группа F_{qA} единичная. Тогда F'_{qA} изоморфна группе F, и инвариантное свойство α выполнено в группе F'_{qA}.

Пусть $A \neq 1$ в F_0. Тогда слово A имеет бесконечный порядок в F_0, так как F_0 — группа без кручения. Следовательно, слово A имеет бесконечный порядок в F. По основной лемме группа F является подгруппой группы F_{qA}, а, значит, и группы F'_{qA}. Группа F имеет подгруппу F'_2, последняя в свою очередь — подгруппу F_2. Так как группа F_2 по условию теоремы 1 не может быть вложена ни в какую конечно-определенную группу со свойством α, то в группе F'_{qA} свойство α не выполнено. В силу неразрешимости проблемы тождества в группе F_0 невозможен алгоритм, определяющий для каждой группы F'_{qA}, выполнено в ней свойство α или нет. Теорема 1 доказана.

Условие теоремы 1 нельзя ослабить, заменив требование существования конечно-определенной группы, не вложимой ни в какую конечно-определенную группу со свойством α, требованием существования конечно-определенной группы, не обладающей свойством α. Действительно, существуют как конечно-определенные группы, совпадающие со своим коммутантом, так и конечно-определенные группы, не совпадающие со своим коммутантом. В то же время есть алгоритм, определяющий для произвольной конечно-определенной группы, совпадает она со своим коммутантом или нет. Это алгоритм, решающий проблему тождества для коммутативных групп.

Заметим, что этот же алгоритм позволяет для произвольной конечно-определенной разрешимой (или произвольной нильпотентной) группы определить, является она единичной или нет. Это тем более интересно, что проблема тождества для разрешимых групп не решена.

Каждое инвариантное свойство α выделяет класс конечно-определенных групп, обладающих свойством α. Такой класс назовем классом α-групп. Класс конечно-определенных групп α будем называть полным, если всякая конечно-определенная группа изоморфна некоторой подгруппе какой-нибудь группы из класса α. Теорему 1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1′. *Если α — непустой и неполный класс конечно-определенных групп, то невозможен алгоритм, определяющий для произвольной конечно-определенной группы, принадлежит она классу α или нет.*

Неполнота класса α не является необходимым условием, ибо существует бесконечно много полных классов групп с неразрешимой проблемой распознавания принадлежности к ним. Например, класс конечно-определенных групп, разложимых в прямое произведение k групп или разложимых в свободное произведение k групп, и т. д. Полнота этих классов очевидна.

Вторая часть работы посвящена доказательству полноты некоторых классов конечно-определенных групп. Из всего сказанного выше о классе групп, совпадающих со своим коммутантом, видно, что этот класс является полным. Заметим сразу же, что во всяком полном классе содержится группа с неразрешимой проблемой тождества.

Как было доказано в ([3]), невозможен алгоритм, определяющий для любой конечно-определенной группы, является она простой или нет. Если же заранее известно, что группа простая, то алгоритм, решающий проблему тождества в ней, строится очень просто*. Отсюда следует, что класс простых групп является неполным в определенном выше смысле.

Для того чтобы конечно-определенная группа F была простой, необходимо и достаточно, чтобы добавление к соотношениям группы F какого-нибудь соотношения $A = B$, не выполненного в F, превращало группу F в единичную.

Рассмотрим конечную систему слов

$$L_1, L_2, \ldots, L_r, \tag{9}$$

составленных из букв $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_s^{-1}$. Конечно-определенную группу F назовем условно-единичной относительно системы тождественных соотношений

$$L_i \equiv 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{10}$$

---

* Этот алгоритм автору сообщил А. В. Кузнецов.

если добавление к соотношениям группы F любого из тождественных соотношений (10) превращает группу F в единичную. Аналогично можно определить условно-конечные группы, условно-абелевы и т. д. Если класс α-групп содержит единичную группу, то класс условно-α-групп содержит весь класс условно-единичных групп.

Тождественное соотношение называется нетривиальным, если оно не выполнено в свободной группе.

Теорема 2. *Какова бы ни была конечная система нетривиальных тождеств* (10), *класс условно-единичных групп относительно этой системы тождеств является полным.*

Выше мы установили, что любую конечно-определенную группу можно изоморфно вложить в группу типа F_{qA}. Для этого достаточно, чтобы слово A не содержало букв p и p^{-1} и имело бесконечный порядок в группе F.

Для доказательства теоремы 2 достаточно подобрать такое слово A_0, которое имело бы бесконечный порядок в группе F и обращалось в единицу при добавлении любого из тождественных соотношений (10).

Элементы a_1 и b_1 являются свободными образующими порожденной ими подгруппы F' группы F. Следовательно, группа F' содержит свободные подгруппы любого конечного ранга. Возьмем подгруппу F'' группы F' ранга $s+1$. Пусть свободные образующие ее E_1, $E_2, \ldots, E_s$, E_{s+1}. Подставим в слова (9) вместо букв $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_s^{-1}$ соответственно слова $E_1, E_2, \ldots, E_s, E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_s^{-1}$. Полученные при этом слова обозначим $L_1', L_2', \ldots, L_r'$.

Так как все тождественные соотношения (10) по условию нетривиальны, ни одно из слов L_i' $(i=1,2,\ldots,r)$ не равно 1 в группе F''. Слово

$$A_0 = [\ldots[[E_{s+1}L_1', L_2'], L_3'], \ldots L_r'] \tag{11}$$

также не равно 1 в F'', ибо в свободной группе два элемента не будут перестановочны, если они оба не равны единице и не равны между собой. Так как группа F'' свободная, то слово A_0 имеет бесконечный порядок в F'', а, значит, и в группе F. При этом A_0 обращается в единицу при добавлении любого из тождественных соотношений (11). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Класс конечно-определенных групп, задаваемых конечными системами взаимно сопряженных образующих, является полным.*

Так как все образующие группы F_{qA} сопряжены слову A, то для доказательства теоремы 3 достаточно взять $A = a_1$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
25 IV 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Новиков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, **44** (1955). [2] А. А. Марков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, **42** (1954). [3] С. И. Адян, ДАН, **103**, № 4 (1955).