



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. V. Malinnikova, Uniform approximation by harmonic differential forms on compact subsets of a Riemannian manifold,
Algebra i Analiz, 1999, Volume 11, Issue 4, 115–138

<https://www.mathnet.ru/eng/aa1065>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

May 22, 2025, 06:37:11



РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ НА КОМПАКТНЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

© Е. В. Малинникова

Работа посвящена обобщению теорем Рунге и Гартогса–Розенталя о равномерной аппроксимации рациональными дробями. Вместо комплексной плоскости мы рассматриваем риманово многообразие, вместо аналитических функций комплексной переменной — гармонические дифференциальные формы. Роль рациональных дробей играют линейные комбинации „элементарных“ гармонических форм — так называемых форм Кулона и Био–Савара.

Введение

Пусть M — риманово n -мерное многообразие класса C^∞ , связное и ориентированное. Мы изучаем равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами на M . Эта работа продолжает работы [1] и [2], в которых M было евклидовым пространством. Отметим, что приближение гармоническими функциями на римановых многообразиях изучалось в [3]. Переход к естественной для гармонических форм среде обитания — риманову многообразию — потребовал по-новому осмыслить основные понятия и средства, применявшиеся в [1, 2]. Пришлось отказаться от использования ньютоновского потенциала и фундаментального решения оператора Лапласа. Частичной заменой оператора U (см. [1]) стал оператор Грина на компактном многообразии. Роль формулы Коши–Грина $c_n T = d\delta U^T + \delta dU^T$ перешла к формуле Ходжа–Вейля–Де Рама–Кодаиры, осуществляющей разложение потока с компактным носителем на точную, коточную и гармоническую составляющие (последняя отсутствует в случае $M = \mathbb{R}^n$). Возможная нетривиальность гомологий многообразия M заставляет по-иному определить элементарные формы. Так, если

Ключевые слова: гармоническая дифференциальная форма, теорема Рунге, теорема Ходжа.
Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 96-01-00541) и NSERC (грант OGP0 170258).

r -форма Био–Савара BS^γ (см. [1, с. 124]) порождается конечным $(n - r - 1)$ -циклом γ , то теперь нам приходится считать, что r -форма $\Phi(c)$, играющая аналогичную роль на M , порождена некоторой конечной $(n - r)$ -цепью c , причем $\Phi(c)$ оказывается гармонической вне границы bc цепи c ; формы $\Phi(c)$, $\Phi(c')$, отвечающие цепям c общей границей $bc = bc'$, вообще говоря, различны. Аналогичных изменений требует и определение форм Кулона.

Доказательства теоремы Рунге, данные в [1, 2], существенно использовали двойственность Александра–Понтрягина пространств компактных сингулярных гомологий $H_r(K)$ и $H_{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus K)$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — „правильный“ компакт. На многообразии мы вынуждены ограничиться изоморфизмом пространств $H_{n-r}(M, M \setminus K)$ (относительных $(n - r)$ -мерных компактных сингулярных гомологий пары $(M, M \setminus K)$) и $\bar{H}^r(K)$ (r -мерных когомологий Де Рама компакта K).

Как и в работах [1, 4], наши аппроксимационные теоремы выводятся с помощью теоремы Хана–Банаха из некоторых теорем единственности. Но на этот раз теорема единственности, соответствующая теореме Рунге, есть очень глубокий результат об исчезновении гармонической формы с нулем бесконечного порядка [5]. По этой причине сколько-нибудь явное построение приближающих форм в теореме Рунге (как, например, в работе [2]) становится весьма затруднительным. Такое построение, по-видимому, привело бы к принципиально новому доказательству упомянутой теоремы единственности.

Изменяется по сравнению с работой [1] и доказательство теоремы Гартогса–Розенталя. Теперь большую роль в доказательстве играет свойство (sd_p) , определенное для $M = \mathbb{R}^n$ в работе [2]. При обобщении этого свойства в очередной раз приходится учитывать возможную нетривиальность пространств гомологий данного многообразия. Отдельный пункт посвящен доказательству того, что внешний дифференциал потенциала поливекторного заряда представим локально суммируемой формой. Этот факт совершенно очевиден, если $M = \mathbb{R}^n$.

Отсутствие явных формул в теореме разложения вынуждает нас использовать индекс Кронекера пар потоков (вместо интегральных формул). Этот инструмент оказывается очень удобным и позволяет придать смысл некоторым интегралам, которые в классическом смысле не существуют даже в \mathbb{R}^n .

Статья состоит из пяти параграфов. Первые два содержат подготовительные сведения. Наша цель здесь — определить элементарные гармонические формы (§1) и установить некоторые изоморфизмы пространств (ко)гомологий, используя удобный для нас язык потоков и дифференциальных форм (§2). Факты, сообщаемые в §1–2, в основном известны.

Основные результаты работы содержатся в §3 (теорема Рунге) и §4 (теорема Гартогса–Розенталя). Теорема Рунге доказывается в трех вариантах: в первом устанавливается принципиальная возможность приблизить форму, гар-

моническую вблизи компакта, элементарными формами; во втором доказано, что (после вычитания некоторых „периодов“ и „копериодов“) особенности приближающих элементарных форм можно поместить в произвольно малые окрестности некоторых заранее предписанных точек („вывод полюсов“); наконец, в третьем речь идет об аппроксимационных свойствах гармонических форм с чисто точечными особенностями. Доказанные нами варианты теоремы Рунге обобщают теоремы Рунге для гармонических форм в \mathbb{R}^n (см. [1, 2, 4]). Но в отличие от работ [1, 2, 4], где элементарные (простейшие, [4]) формы определялись с помощью явных формул, в этой статье их определение основано на неконструктивной „теореме существования“.

В четвертом параграфе обсуждается вопрос о равномерном приближении непрерывных форм гармоническими на данном компактном подмножестве K многообразия M . В частности, сформулировано геометрическое условие для множества K , при котором аппроксимация возможна. Доказанная в п. 4.3 теорема обобщает классическую теорему Гартогса–Розенталя о приближении непрерывных функций аналитическими на компактном множестве нулевой меры Лебега.

Замечания об эффективном построении ядер, участвующих в определении элементарных гармонических форм, собраны в заключительном §5. Там же еще раз обсуждаются особенности определения форм Био–Савара и Кулона на многообразиях.

Я искренне признательна В. П. Хавину за постоянное научное руководство, постановку задач и многочисленные обсуждения данной работы. Эта работа была подготовлена к печати во время моего пребывания на математическом факультете университета в Тронхейме; мне приятно поблагодарить факультет за гостеприимство.

§1. Предварительные сведения

1.1. Гармонические дифференциальные формы. Всюду в дальнейшем M будет обозначать n -мерное ($n \geq 3$) связное ориентированное риманово многообразие класса C^∞ . Для открытого подмножества O многообразия M и целого числа p , $0 \leq p \leq n$, обозначим через $\mathcal{E}_p(O)$ пространство бесконечно дифференцируемых на O дифференциальных форм степени p (p -форм), а через $\mathcal{D}_p(O)$ — подпространство в $\mathcal{E}_p(O)$, состоящее из форм с компактными носителями. В пространствах $\mathcal{E}_p(O)$ и $\mathcal{D}_p(O)$ заданы обычные семейства полунорм [6]. Мы полагаем $\mathcal{D}_p := \mathcal{D}_p(M)$ и $\mathcal{E}_p := \mathcal{E}_p(M)$.

Оператор внешнего дифференцирования d сопоставляет p -форме класса C^1 форму степени $p + 1$. На римановом многообразии M действует *оператор Ходжа*. Он переводит p -форму φ в $(n - p)$ -форму, обозначаемую $*\varphi$, причем $*(*\varphi) = (-1)^{p(n-p)}\varphi$. *Кодифференциал* δp -формы φ класса C^1 определяется сле-

дующим образом: $\delta\varphi = (-1)^{np+n+1} * d*\varphi$. Оператор $\Delta := -(\delta d + d\delta)$ называется оператором Лапласа-Бельтрами на M . Нетрудно проверить, что оператор Δ коммутирует с операторами $d, *$ и δ . Форма $\varphi \in \mathcal{E}_p(O)$ называется гармонической в открытом множестве $O \subset M$, если $d\varphi = 0$ и $\delta\varphi = 0$ в O . Ясно, что если φ гармоническая в O форма, то $\Delta\varphi = 0$ в O .

1.2. Потоки. Мы будем использовать понятия и результаты изложенной в книге Де Рама [6] теории потоков. Пусть O — открытое подмножество многообразия M . Пространство p -мерных потоков в O (т. е. линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}_p(O)$) обозначается через $\mathcal{D}'_p(O)$; пространство $\mathcal{E}'_p(O)$ состоит из потоков с компактными носителями в O .

Гладкое отображение многообразий $f: U \rightarrow V$ естественным образом индуцирует отображения $f^*: \mathcal{E}_p(V) \rightarrow \mathcal{E}_p(U)$ и $f_*: \mathcal{E}'_p(U) \rightarrow \mathcal{D}'_p(V)$. Если отображение f собственное, то f_* определено на $\mathcal{D}'_p(U)$.

Каждой $(n-p)$ -форме ψ , локально суммируемой в открытом множестве $O \subset M$, соответствует поток $T_\psi \in \mathcal{D}'_p(O)$, действующий следующим образом:

$$T_\psi[\varphi] := \int_M \psi \wedge \varphi = \int_O \psi \wedge \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_p(O).$$

Множества p -мерных цепей в O и конечных p -мерных цепей в O обозначим через $\text{Ch}_p(O)$ и $\text{Ch}_p^f(O)$ соответственно; $\text{Ch}_p := \text{Ch}_p(M)$ и $\text{Ch}_p^f := \text{Ch}_p^f(M)$. Каждой цепи $c \in \text{Ch}_p(O)$ сопоставим поток из $\mathcal{D}'_p(O)$, обозначаемый \tilde{c} ,

$$\tilde{c}[\varphi] := \int_c \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_p(O).$$

Если $c \in \text{Ch}_p^f(O)$, то $\tilde{c} \in \mathcal{E}'_p(O)$.

Борелевское подмножество A многообразия M порождает n -мерный поток I_A , определяемый равенством

$$I_A[\varphi] := \int_M \chi_A \varphi = \int_A \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}_n.$$

Пусть $T \in \mathcal{D}'_p(O)$, а W — открытое подмножество в O ; сужение T на W обозначается $T|W$, $T|W \in \mathcal{D}'_p(W)$.

Произведение потока $T \in \mathcal{D}'_p(O)$ на форму $\alpha \in \mathcal{E}_q(O)$, $q \leq p$, определяется как поток размерности $p-q$, действующий по правилу

$$(T \wedge \alpha)[\varphi] := T[\alpha \wedge \varphi], \quad \varphi \in \mathcal{D}_{p-q}(O).$$

Для каждого потока $T \in \mathcal{D}'_p(O)$ естественным образом определены потоки $dT \in \mathcal{D}'_{p-1}(O)$, $*T \in \mathcal{D}'_{n-p}(O)$, $\delta T \in \mathcal{D}'_{p+1}(O)$ и $\Delta T \in \mathcal{D}'_p(O)$, а именно

$$dT[\varphi] := (-1)^{n+p+1}T[d\varphi], \quad \varphi \in \mathcal{D}_{p-1}(O);$$

$$*T[\varphi] := (-1)^{p(n-p)}T[*\varphi], \quad \varphi \in \mathcal{D}_{n-p}(O);$$

$$\delta T := (-1)^{np+1} * d * T \quad \text{и} \quad \Delta T := -(\delta d + d\delta)T.$$

Нетрудно проверить, что для потоков, соответствующих дифференциальным формам, справедливы равенства $LT_\psi = T_L\psi$, где $L \in \{d, *, \delta, \Delta\}$.

Пусть $c \in \text{Ch}_p$, тогда для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}_{p-1}$

$$d\tilde{c}[\varphi] = (-1)^{n-p+1}\tilde{c}[d\varphi] = (-1)^{n-p+1}\tilde{b}c[\varphi]$$

(последнее равенство следует из формулы Стокса), т. е. $d\tilde{c} = (-1)^{n-p+1}\tilde{b}c$. Цепи из Ch_p с нулевой границей будем называть *циклами*; множество всех p -мерных циклов будем обозначать через Z_p ; $Z_p^f := Z_p \cap \text{Ch}_p^f$ будет обозначать множество всех конечных циклов. Для открытого подмножества O многообразия M положим $Z_p(O) := Z_p \cap \text{Ch}_p(O)$ и $Z_p^f(O) := Z_p \cap \text{Ch}_p^f(O)$.

Пусть $T \in \mathcal{D}'_p$, $O \subset M$ — открытое подмножество. Будем говорить, что $T \in C^\infty(O)$, если существует форма $\psi \in \mathcal{E}_{n-p}(O)$, для которой $T = T_\psi$ в O . *Сингулярным носителем* потока T , $\text{singspt } T$, будем называть дополнение наибольшего открытого множества $O \subset M$, для которого $T \in C^\infty(O)$. Хорошо известна следующая лемма Вейля о гладкости (см., например, [6]).

Лемма. Если $T \in \mathcal{D}'_p$ и $\Delta T = 0$ в O , то $T \in C^\infty(O)$.

1.3. Индекс Кронекера пар потоков. На некоторых парах потоков с суммой размерностей n определена функция $\{\cdot, \cdot\}$, которую мы будем называть индексом Кронекера. Она обладает следующими свойствами (см. [6, §20]):

- 1) индекс Кронекера линеен по каждому аргументу;
- 2) если $S \in \mathcal{E}'_p$, $\psi \in \mathcal{E}_p$ (или если $S \in \mathcal{D}'_p$, $\psi \in \mathcal{D}_p$), то индекс Кронекера $\{S, T_\psi\}$ определен и $\{S, T_\psi\} = S[\psi]$;
- 3) если $\text{spt } S \cap \text{spt } T = \emptyset$, то $\{S, T\} = 0$;
- 4) если одно из множеств $\text{spt } S$ и $\text{spt } T$ компактно и $\text{singspt } S \cap \text{singspt } T = \emptyset$, то индекс Кронекера $\{S, T\}$ определен;
- 5) если $S \in \mathcal{D}'_{p+1}$, $T \in \mathcal{D}'_{n-p}$, один из потоков S и T имеет компактный носитель и определен индекс Кронекера $\{S, dT\}$, то определен и индекс Кронекера $\{dS, T\}$, причем $\{dS, T\} = (-1)^{n-p}\{S, dT\}$;
- 6) если $\text{singspt } T \cap \text{spt } dS = \emptyset$, $\text{singspt } S \cap \text{spt } dT = \emptyset$ и один из потоков S и T имеет компактный носитель, то индекс Кронекера $\{S, T\}$ определен.

Отметим также, что из определения индекса Кронекера (см. [6]) следует, что если $f: U \rightarrow V$ — диффеоморфизм гладких многообразий и для потоков $T \in \mathcal{E}'_p(U)$, $S \in \mathcal{D}'_{n-p}(U)$ определен индекс Кронекера $\{T, S\}_U$, то определен и индекс Кронекера $\{f_*(T), f_*(S)\}_V$, причем $\{f_*(T), f_*(S)\}_V = \{T, S\}_U$. (Значки U и V указывают, в каком многообразии рассматриваются потоки и вычисляется индекс Кронекера).

Индекс Кронекера конечного цикла и цепи имеет простой геометрический смысл: он равен так называемому индексу пересечения цикла и цепи (см. [6]).

1.4. Разложение Ходжа–Вейля–Кодаиры–Де Рама. Рассмотрим пространство CL^2_p всех гладких p -форм, суммируемых с квадратом, $0 \leq p \leq n$,

$$CL^2_p := \left\{ \varphi \in \mathcal{E}_p : Q(\varphi) := \int_M \varphi \wedge * \varphi < \infty \right\}.$$

Определим пространство $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{D}'_p$ следующим образом:

$T \in \mathcal{F}_p$, если для каждого множества форм $\Phi \subset \mathcal{D}_p$, ограниченного в \mathcal{E}_p , и такого, что $\sup\{Q(\varphi) : \varphi \in \Phi\} < \infty$, множество $\{T[\varphi] : \varphi \in \Phi\}$ ограничено.

Очевидно, что $\mathcal{E}'_p \subset \mathcal{F}_p$. Потоки из \mathcal{F}_p можно применять к формам из CL^2_p . Будем говорить, что поток $R \in \mathcal{F}_p$ ортогонален форме $\omega \in CL^2_p$, если $R[\omega] = 0$. Пусть h_p обозначает подпространство в CL^2_p , состоящее из гармонических форм. В книге [6] доказана следующая теорема о разложении.

Теорема (Вейль, Ходж, Кодаира, Де Рама). *Существуют линейные отображения $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2: \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}_p$ и $\mathcal{H}_3: \mathcal{F}_p \rightarrow h_p$ такие, что для любого $S \in \mathcal{F}_p$ потоки $\mathcal{H}_1 S$ и $\mathcal{H}_2 S$ ортогональны h_p , поток $\mathcal{H}_1 S$ гомологичен нулю, поток $\mathcal{H}_2 S$ когомологичен нулю и выполнено равенство*

$$S = \mathcal{H}_1 S + \mathcal{H}_2 S + T_{\mathcal{H}_3 S}. \quad (1)$$

Поток $T_{\mathcal{H}_3 S}$ мы также будем обозначать через $\mathcal{H} S$. Из разложения (1) следует, что $\Delta \mathcal{H}_1 S = d\delta S$ и $\Delta \mathcal{H}_2 S = \delta dS$. Тогда по лемме Вейля (п. 1.2)

$$\begin{aligned} \text{singspt } \mathcal{H}_1 S &\subset \text{spt } d\delta S \subset \text{spt } S, \\ \text{singspt } \mathcal{H}_2 S &\subset \text{spt } \delta dS \subset \text{spt } S. \end{aligned} \quad (2)$$

Отображения \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 переводят потоки, соответствующие формам из CL^2_{n-p} , в такие же потоки (см. [6]). Мы обозначаем теми же буквами $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ и \mathcal{H} отображения из CL^2_{n-p} в CL^2_{n-p} , для которых $L T_\psi = T_{L\psi}$, где $L \in \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}\}$,

а $\psi \in CL_{n-p}^2$. Если $S \in \mathcal{F}_q$ и $\varphi \in CL_q^2$, то $\mathcal{H}S[\varphi] = S[\mathcal{H}\varphi]$, $\mathcal{H}_1S[\varphi] = S[\mathcal{H}_2\varphi]$ и $\mathcal{H}_2S[\varphi] = S[\mathcal{H}_1\varphi]$. Последнее равенство можно переписать таким образом:

$$\{\mathcal{H}_2S, T_\varphi\} = \{S, \mathcal{H}_1T_\varphi\}. \quad (3)$$

Докажем, что для потоков $S \in \mathcal{E}'_q, T \in \mathcal{E}'_{n-q}$ с непересекающимися носителями выполнено равенство

$$\{\mathcal{H}_2S, T\} = \{S, \mathcal{H}_1T\}. \quad (4)$$

Индексы Кронекера $\{\mathcal{H}_2, T\}$ и $\{S, \mathcal{H}_1T\}$ определены в силу (2) и свойства 6, п. 1.3. Чтобы доказать равенство (4), выберем последовательность форм $\{\varphi_m\}$ из CL_q^2 , для которой последовательность потоков $T_m = T_{\varphi_m}$ сходится к T в \mathcal{E}'_{n-q} и существует такая окрестность U множества $\text{spt } S$, что формы $\mathcal{H}_1\varphi_m$ сходятся в U к форме, соответствующей \mathcal{H}_1T , по норме L^2 . Мы также можем считать, что $\text{spt } \varphi_m \cap U = \emptyset$ для любого $m \geq 1$. Остается воспользоваться равенством (3), заметив, что $\mathcal{H}_2S \in C^\infty$ в окрестности $\text{spt } T \cup \bigcup_m \text{spt } T_m$.

1.5. Формы Био-Савара и Кулона. При работе с гармоническими дифференциальными формами в \mathbb{R}^n заметную роль играют так называемые потоки (и формы) Био-Савара и Кулона. Рассмотрим $(n-r)$ -мерный поток Био-Савара, отвечающий потоку $T \in \mathcal{E}'_{n-r-1}(\mathbb{R}^n)$:

$$BS^T := c_n^{-1} \delta U^T,$$

где U^T — ньютоновский потенциал потока T [1, с. 123]. Поток BS^T можно определить как козамкнутое решение X уравнения $dX = T$, ограниченное (или квадратично суммируемое) в окрестности бесконечности. Это уравнение вместе с уравнением $\delta X = 0$ и леммой Вейля обеспечивают гладкость потока $X = BS^T$ вне $\text{spt } T$, так что BS^T оказывается гармонической r -формой в $\mathbb{R}^n \setminus \text{spt } T$.

Чтобы естественным образом обобщить понятие потоков Био-Савара на случай риманова многообразия M , мы рассмотрим уравнение $dX = S$, где $S \in \mathcal{D}'_q, 0 \leq q \leq n$. Если оно разрешимо в \mathcal{F}_{q+1} , то решение X можно выбрать козамкнутым в M .

Действительно, пусть $d\tilde{X} = S$, для некоторого потока $\tilde{X} \in \mathcal{F}_{q+1}$. Положим $X := \mathcal{H}_2\tilde{X} + \mathcal{H}\tilde{X} = \tilde{X} - \mathcal{H}_1\tilde{X}$. Тогда $\delta X = 0$ (так как $\delta\mathcal{H}_2\tilde{X} = \delta\mathcal{H}\tilde{X} = 0$), и $dX = d\tilde{X} - d\mathcal{H}_1\tilde{X} = d\tilde{X} = S$. Определенный таким образом поток X является гармоническим в $M \setminus \text{spt } S$.

Рассмотрим частный случай $S = d\tilde{c}$, где $c \in \text{Ch}_{q+1}^f$ (так что $\tilde{c} \in \mathcal{F}_{q+1}$). Поток $\beta(c) := \tilde{c} - \mathcal{H}_1\tilde{c}$ соответствует вне $\text{spt } d\tilde{c} = \text{spt } bc$ гармонической форме, которую

мы будем обозначать через $\Phi(c)$ и называть *формой Био-Савара, отвечающей цепи c* .

В п. 5.2 мы обсуждаем некоторые подробности, связанные с формами $\Phi(c)$ и, в частности, объясняем, чем вызваны различия между определениями форм Био-Савара в \mathbb{R}^n и на римановом многообразии. Сейчас мы отметим лишь, что в случае $M = \mathbb{R}^n$ (в обозначениях работы [1]) $\Phi(c) = (-1)^{n-q} BS^{bc}$ в $\mathbb{R}^n \setminus \text{spt } bc$.

Для открытого подмножества O многообразия M определим множество p -форм Био-Савара в O

$$BS_p(O) := \{\Phi(c) : c \in \text{Ch}_{n-p}^f, \text{spt } bc \cap O = \emptyset\}.$$

Аналогично обобщается понятие потоков и форм Кулона. Рассмотрим уравнение $\delta Y = T$, $T \in \mathcal{D}'_{n-p}$. Если оно разрешимо в \mathcal{F}_{n-q-1} , то в качестве решения можно выбрать поток, замкнутый в M . Пусть $\delta \tilde{Y} = T$, $\tilde{Y} \in \mathcal{F}_{n-q-1}$; положим $Y := \tilde{Y} - \mathcal{H}_2 \tilde{Y} = \mathcal{H}_1 \tilde{Y} + \mathcal{H} \tilde{Y}$. Поток Y замкнут в M , $\delta Y = \delta \tilde{Y} = T$, и, следовательно, вне $\text{spt } T$ поток Y задается некоторой гармонической формой. Пусть $e \in \text{Ch}_{q+1}^f$. Тогда $*\tilde{e} \in \mathcal{F}_{n-q-1}$. Поток $\gamma(e) := *\tilde{e} - \mathcal{H}_2(*\tilde{e})$ соответствует в $M \setminus \text{spt } be$ гармонической форме, которую мы будем называть *формой Кулона, отвечающей цепи e* , и обозначать символом $\Psi(e)$. Отметим, что $\Psi(e) = *\Phi(e)$.

Множество p -форм Кулона в O определим следующим образом:

$$\text{Coul}_p(O) := \{\Psi(e) : e \in \text{Ch}_p^f, \text{spt } be \cap O = \emptyset\}.$$

Формы Био-Савара и Кулона будем называть *элементарными гармоническими формами*.

1.6. Теорема разложения на компактном многообразии. На протяжении этого пункта будем считать, что M — компактное многообразие. Тогда $\mathcal{E}_p = \mathcal{D}_p$, и все формы из \mathcal{E}_p суммируемы с квадратом. Пространство \mathcal{F}_p совпадает с \mathcal{D}'_p , а пространство h_p конечномерно (см. [6, 7, 8]). Теорема Вейля-Ходжа-Кодаиры-Де Рама в случае компактного многообразия допускает следующее уточнение: *существует линейный оператор $G_p: \mathcal{D}'_{n-p} \rightarrow \mathcal{D}'_{n-p}$ перестановочный с операторами $d, \delta, *$ и \mathcal{H} , и такой, что $\mathcal{H}_1 T = d\delta G_p T$, $\mathcal{H}_2 T = \delta d G_p T$ для любого $T \in \mathcal{D}'_{n-p}$.*

Оператор G_p называется *оператором Грина*. Он переводит поток, соответствующий гладкой дифференциальной форме, в такой же поток. Мы сохраним обозначение G_p за оператором, действующим из \mathcal{D}_p в \mathcal{D}_p , для которого

$$G_p T_\psi = T_{G_p \psi}, \quad \text{при } \psi \in \mathcal{D}_p.$$

Оператор G_p — интегральный оператор с некоторым ядром g_p . Это означает следующее. Вне диагонали многообразия $M \times M$ определена двойная форма $g_p(x, y)$ класса C^∞ . Степень формы по каждой переменной равна p . Для любой $\varphi \in \mathcal{D}_p$

$$(G_p \varphi)(y) = \int_M *_x g(x, y) \wedge \varphi(x).$$

Если $T \in \mathcal{D}'_{n-p}$, то вне множества $\text{spt } T$ поток $G_p T$ соответствует p -форме $\psi(y) = T_x [*_x g(x, y)]$ (индекс x здесь обозначает, что поток T применяется по переменной x).

Некоторые известные нам сведения об операторах G_p и \mathcal{H} на конкретных многообразиях собраны в п. 5.1.

§2. Изоморфизм некоторых пространств гомологий и когомологий на римановом многообразии

2.1. Сингулярные относительные гомологии и относительные гомологии Де Рама. Рассмотрим многообразие V класса C^∞ и его открытое подмножество U . Для пары (V, U) определены пространства $H_p^s(V, U)$ относительных (компактных) p -мерных сингулярных гомологий (см., например, [9]). Напомним, что

$$H_p^s(V, U) = Z_p^s(V, U) / B_p^s(V, U),$$

где $Z_p^s(V, U) = \{c \in \text{Ch}_p^f(V) : \text{spt } bc \subset U\}$, а

$$B_p^s(V, U) = \{c \in \text{Ch}_p^f(V) : \exists c_1 \in \text{Ch}_p^f(U), c_2 \in \text{Ch}_{p+1}^f(V) : c = c_1 + bc_2\}.$$

Пространства $H_p^s(V, U)$ вместе с пространствами сингулярных гомологий множеств V и U образуют точную последовательность пары (V, U) :

$$\dots \rightarrow H_p^s(U) \xrightarrow{i_p} H_p^s(V) \xrightarrow{j_p} H_p^s(V, U) \xrightarrow{b_p} H_{p-1}^s(U) \xrightarrow{i_{p-1}} H_{p-1}^s(V) \rightarrow \dots$$

Гомоморфизм i_q индуцирован вложением $U \hookrightarrow V$; гомоморфизм j_q переводит класс в $H_q^s(V)$, содержащий цикл $c \in Z_q^f(V) \subset Z_q^f(V, U)$, в класс в $H_q^s(V, U)$, содержащий c ; b_q — оператор взятия границы.

Наряду с „цепными“ пространствами $H_q^s(V, U)$ нам понадобятся их „поточные“ аналоги $H_p(V, U)$, определяемые следующим образом. Положим

$$Z_p(V, U) := \{T \in \mathcal{E}'_p(V) : \text{spt } dT \subset U\},$$

$$B_p(V, U) := \{T \in \mathcal{E}'_p(V) : \exists T_1 \in \mathcal{E}'_p(U), T_2 \in \mathcal{E}'_{p+1}(V) : T = T_1 + dT_2\}.$$

Другими словами, пространство $Z_p(V, U)$ состоит из потоков с компактными носителями, которые замкнуты вблизи $V \setminus U$. Поток с компактным носителем принадлежит пространству $B_p(V, U)$, если в некоторой окрестности множества $V \setminus U$ он совпадает с потоком, компактно гомологичным нулю. Очевидно, что $B_p(V, U)$ — линейное подпространство в $Z_p(V, U)$, так что определено фактор пространство

$$H_p(V, U) := Z_p(V, U)/B_p(V, U).$$

Определение относительных компактных гомологий с помощью пространств потоков в намного более общей ситуации содержится в книге Федерера [10, с. 491]. Непосредственно из определения пространств $H_p(V, U)$ следует, что последовательность

$$\dots \rightarrow H_p(U) \xrightarrow{i_p} H_p(V) \xrightarrow{j_p} H_p(V, U) \xrightarrow{b_p} H_{p-1}(U) \xrightarrow{i_{p-1}} H_{p-1}(V) \rightarrow \dots$$

точна. Здесь оператор b_p соответствует оператору взятия границы потока, $bT = (-1)^{n-p+1}dT$, $T \in \mathcal{E}'_p$. Естественное вложение $\text{Ch}_p^f \rightarrow \mathcal{E}'_p$, $c \mapsto \tilde{c}$, индуцирует отображения J_p пространств (относительных) гомологий. При этом диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} H_p^s(U) & \xrightarrow{i_p} & H_p^s(V) & \xrightarrow{j_p} & H_p^s(V, U) & \xrightarrow{b_p} & H_{p-1}^s(U) & \xrightarrow{i_{p-1}} & H_{p-1}^s(V) \\ \downarrow J_p & & \downarrow J_p & & \downarrow J_p & & \downarrow J_{p-1} & & \downarrow J_{p-1} \\ H_p(U) & \xrightarrow{i_p} & H_p(V) & \xrightarrow{j_p} & H_p(V, U) & \xrightarrow{b_p} & H_{p-1}(U) & \xrightarrow{i_{p-1}} & H_{p-1}(V) \end{array}$$

коммутативна. По теореме Де Рама отображения

$$J_q: H_q^s(U) \rightarrow H_q(U) \quad \text{и} \quad J_q: H_q^s(V) \rightarrow H_q(V)$$

являются изоморфизмами для любого q , $0 \leq q \leq n$. Следовательно, отображение J_p осуществляет изоморфизм пространства $H_p^s(V, U)$ на пространство $H_p(V, U)$.

2.2. Когомологии Де Рама компактного подмножества. Пусть, как и раньше, V — многообразие класса C^∞ . Определим пространства когомологий Де Рама компактного подмножества K многообразия V . Для каждого целого q , $0 \leq q \leq n = \dim V$, $\bar{Z}^q(K)$ есть пространство $\bigcup_{K \subset O} \{\varphi \in \mathcal{E}_q(O) : d\varphi = 0\}$ (объединение берется по всем открытым множествам O , содержащим K), профакторизованное по отношению эквивалентности: $\varphi_1 \sim \varphi_2$, если существует окрестность O множества K , для которой φ_1 и φ_2 определены и равны в O .

Элемент пространства $\bar{Z}^q(K)$, соответствующий форме φ , будем обозначать через $\{\varphi\}$. Далее, пусть $\bar{B}^q(K)$ — подпространство в $\bar{Z}^q(K)$, состоящее из классов эквивалентности, имеющих точного представителя:

$$\bar{B}^q(K) := \{\beta \in \bar{Z}^q(K) : \exists \varphi \in \mathcal{E}_{q-1}(O), K \subset O, \{d\varphi\} = \beta\}.$$

Тогда

$$\bar{H}^q(K) := \bar{Z}^q(K) / \bar{B}^q(K).$$

Пространство $\bar{H}^q(K)$ есть не что иное, как индуктивный предел пространств $H^q(O)$ по направлению, образованному открытыми множествами, содержащими K .

2.3. Изоморфизм $H_{n-q}(M, M \setminus K) \simeq \bar{H}^q(K)$. Пусть M — риманово многообразие, K — его компактное подмножество. Мы построим изоморфизм между пространствами $H_{n-q}(M, M \setminus K)$ и $\bar{H}^q(K)$. Подобный изоморфизм установлен, например, в [11]. Однако нам понадобится явная формула для отображения $H_{n-q}(M, M \setminus K) \rightarrow \bar{H}^q(K)$ на языке потоков и дифференциальных форм. Определим сначала отображение $A_q: \bar{H}^q(K) \rightarrow H_{n-q}(M, M \setminus K)$. Мы будем использовать квадратные скобки для обозначения классов эквивалентности в пространствах гомологий и когомологий. Пусть $\{\varphi\} \in \bar{Z}^q(K)$, q -форма φ замкнута в некоторой окрестности U множества K . Рассмотрим поток $I_U \wedge \varphi$ (см. обозначения в п. 1.2). Ясно, что $d(I_U \wedge \varphi) = dI_U \wedge \varphi + I_U \wedge d\varphi$, так что $\text{spt } d(I_U \wedge \varphi) \subset M \setminus K$ и $I_U \wedge \varphi \in Z_{n-q}(M, M \setminus K)$. Положим

$$A_q\{\varphi\} := [I_U \wedge \varphi] \in H_{n-q}(M, M \setminus K).$$

Определение не зависит от замены φ на эквивалентную и от изменения окрестности W множества K . Если $\varphi \in \bar{B}^q(K)$, φ точна в $U_1 \subset \text{clos } U$, то

$$I_U \wedge \varphi = I_U \wedge d\varphi_1 = d(I_U \wedge \varphi_1) - dI_U \wedge \varphi_1 \in B_{n-q}(M, M \setminus K).$$

Таким образом, определено отображение

$$A_q: \bar{H}^q(K) \rightarrow H_{n-q}(M, M \setminus K), \quad A_q[\{\varphi\}] = [I_U \wedge \varphi].$$

Опишем отображение $B_q: H_{n-q}(M, M \setminus K) \rightarrow \bar{H}^q(K)$. Для каждого потока $T \in Z_{n-q}(M, M \setminus K)$ рассмотрим поток $\mathcal{H}_2 T + \mathcal{H} T$. Он гармоничен в некоторой окрестности U множества K (действительно, $\delta(\mathcal{H}_2 T + \mathcal{H} T) = 0$,

$d(\mathcal{H}_2T + \mathcal{H}T) = dT$, а $\text{spt } dT \subset M \setminus K$). Следовательно, существует гармоническая в U форма ψ , для которой $\mathcal{H}_2T + \mathcal{H}T = T_\psi$ в U . Положим $B_q[T] = [\{\psi\}]$. Проверим корректность такого определения. Если $T \in B_{n-q}(M, M \setminus K)$, то $T = T_1 + dT_2$, где $\text{spt } T_1 \subset M \setminus K$. Тогда верно равенство $\mathcal{H}_2T + \mathcal{H}T = T_1 + dT_2 - \mathcal{H}_1T$, и вблизи K поток $\mathcal{H}_2T + \mathcal{H}T$ совпадает с гомологичным нулю потоком $dT_2 - \mathcal{H}_1T$. Следовательно, по теореме Де Рама форма ψ гомологична нулю вблизи K и $\{\psi\} \in \overline{B}_q(K)$.

Лемма. *Отображения A_q и B_q — взаимно-обратные изоморфизмы.*

Доказательство. Пусть $[T] \in H_{n-q}(M, M \setminus K)$ и $\mathcal{H}_2T + \mathcal{H}T = T_\psi$ вблизи K . Тогда $A_q \circ B_q[T] = [I_U \wedge \varphi]$, где U — некоторая окрестность множества K . Вблизи K верно равенство $I_U \wedge \psi = T_\psi = T - \mathcal{H}_1T$. Следовательно, $[I_U \wedge \psi] = [T]$, так как поток \mathcal{H}_1T гомологичен нулю (ясно, что вблизи K поток, гомологичный нулю, совпадает с потоком, компактно гомологичным нулю). Итак, отображение $A_q \circ B_q$ тождественное.

Обратно, пусть $[\{\varphi\}] \in \overline{H}^q(K)$ и $B_q \circ A_q[\{\varphi\}] = [\{\psi\}]$. Тогда поток T_ψ вблизи K совпадает с потоком $I_U \wedge \varphi - \mathcal{H}_1(I_U \wedge \varphi)$, где U — некоторая окрестность множества K . Следовательно, поток $T_\varphi - T_\psi$ совпадает вблизи K с потоком, гомологичным нулю. Из теоремы Де Рама следует, что форма $\psi - \varphi$ совпадает вблизи K с некоторой точной формой и $[\{\varphi\}] = [\{\psi\}]$. •

2.4. Два замечания. Из результатов, изложенных в п. 2.1–2.3, следует, что отображение

$$B_q \circ J_{n-q}: H_{n-q}^s(M, M \setminus K) \rightarrow \overline{H}^q(K)$$

есть изоморфизм. В частности, верно следующее утверждение, которое мы будем использовать при доказательстве теоремы Рунге.

Если q -форма φ замкнута в некоторой окрестности множества K , то существует $c \in \text{Ch}_{n-q}^f(M)$, для которой $\text{spt } bc \subset M \setminus K$, и вблизи K верно равенство $\varphi = \Phi(c) + d\psi$, где $\psi \in \mathcal{D}_{q-1}$.

Действительно, пусть $c = (B_q \circ J_{n-q})^{-1}[\{\varphi\}]$. Тогда $\text{spt } bc \subset M \setminus K$, и из определения оператора B_q следует, что $B_q \circ J_{n-q}[c] = [\{\Phi(c)\}]$. Таким образом, разность $\varphi - \Phi(c)$ точна вблизи K .

Отметим, что в случае, когда $V = \mathbb{R}^n$, а K — правильное компактное подмножество в \mathbb{R}^n (см. [2]), $\overline{H}^q(K) \simeq H^q(\text{int } K) \simeq H_q^s(\text{int } K)$. При этом граничный гомоморфизм

$$b_{n-q}: H_{n-q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \rightarrow H_{n-q-1}^s(\mathbb{R}^n \setminus K)$$

является изоморфизмом (это сразу следует из рассмотрения точной последовательности пары $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ и тривиальности гомологий пространства \mathbb{R}^n).

Таким образом,

$$H_q^s(\text{int } K) \simeq \bar{H}^q(K) \simeq H_{n-q}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \simeq H_{n-q-1}^s(\mathbb{R}^n \setminus K).$$

Мы получили двойственность Александра–Понтрягина.

Роль, которую играет двойственность Александра–Понтрягина в доказательстве теоремы Рунге для гармонических форм в \mathbb{R}^n (см. [1, 2]), в случае риманова многообразия выполняет изоморфизм пространств $H_{n-q}^s(M, M \setminus K)$ и $\bar{H}^q(K)$.

§3. Теорема Рунге для гармонических дифференциальных форм

3.1. Приближение элементарными гармоническими формами. Пусть K — компактное подмножество в M , $K \neq M$. Определим следующие множества p -форм ($1 \leq p \leq n$), заданных на K . Положим $BS_p(K) := \bigcup_{K \subset O} BS_p(O) \mid K$ — множество следов на K форм классов $BS_p(O)$, отвечающих всевозможным открытым $O \supset K$; $\text{Coul}_p(K) := \bigcup_{K \subset O} \text{Coul}_p(O) \mid K$. Элементы пространства $BS_p(K) + \text{Coul}_p(K)$ будем называть *элементарными гармоническими p -формами с особенностями вне K* .

Теорема. Любую p -форму, гармоническую вблизи K , можно равномерно на K приблизить элементарными гармоническими p -формами с особенностями вне K .

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{E}'_p$, $\text{spt } T \subset K$ и T ортогонален всем элементарным гармоническим p -формам с особенностями вне K . Тогда, в частности, $T[\Phi(c)] = 0$ для любой цепи $c \in \text{Ch}_{n-p}^f(M \setminus K)$. Следовательно,

$$0 = \{T, \tilde{c}\} = \{T, \mathcal{H}_1 \tilde{c} + (\mathcal{H}_2 \tilde{c} + \mathcal{H} \tilde{c})\} = \{T, \mathcal{H}_1 \tilde{c}\} = \{\mathcal{H}_2 T, \tilde{c}\}.$$

Первое равенство следует из того, что носители T и \tilde{c} не пересекаются, а последнее доказано в п. 1.4 (4). Поток $\mathcal{H}_2 T$ принадлежит классу C^∞ в $M \setminus K$, и тот факт, что $\{\mathcal{H}_2 T, \tilde{c}\} = 0$ для любой цепи $c \in \text{Ch}_{n-p}^f(M \setminus K)$, означает, что $\text{spt}(\mathcal{H}_2 T) \subset K$. Аналогично, используя равенство $T[\Psi(e)] = 0$, выполненное для любой цепи $e \in \text{Ch}_p^f(M \setminus K)$, получим, что

$$0 = \{T, * \tilde{e}\} = \{T, \mathcal{H}_2(* \tilde{e})\} = \{\mathcal{H}_1 T, * \tilde{e}\}$$

и $\text{spt}(\mathcal{H}_1 T) \subset K$. Таким образом, поток $\mathcal{H} T = T - \mathcal{H}_1 T - \mathcal{H}_2 T$ сосредоточен на K , т.е. гармоническая на всем многообразии форма $\mathcal{H}_3 T$ равна нулю в $M \setminus K$. Из теоремы единственности для гармонических дифференциальных форм на римановых многообразиях [5] следует, что $\mathcal{H}_3 T \equiv 0$.

Убедимся в том, что $T[\varphi] = 0$ для любой p -формы φ , гармонической вблизи K (тем самым доказательство будет завершено). Можно считать, что $\varphi \in \mathcal{D}_p$. Напишем разложение (1) для потока T :

$$T[\varphi] = \mathcal{H}_1 T[\varphi] + \mathcal{H}_2 T[\varphi] + \mathcal{H} T[\varphi]. \quad (5)$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $\mathcal{H} T = 0$. Докажем, что второе слагаемое равно нулю. Форма $*\varphi$ замкнута вблизи K . Следовательно (см. п. 2.4), существует цепь $e \in \text{Ch}_p^f(M)$, для которой $\text{spt } be \subset M \setminus K$ и форма $*\varphi - \Phi(e)$ точна вблизи K . Другими словами, в некоторой окрестности множества K верно равенство $(-1)^{p(n-p)}\varphi - \Psi(e) = \delta\varphi_1$, где $\varphi_1 \in \mathcal{D}_{p+1}$. (Мы воспользовались равенством $*\Phi(e) = \Psi(e)$). Как было доказано выше, $\text{spt } \mathcal{H}_2 T \subset K$. Тогда

$$\mathcal{H}_2 T[\varphi] = (-1)^{p(n-p)} \mathcal{H}_2 T[\Psi(e)] - (-1)^{p(n-p)} \mathcal{H}_2 T[\delta\varphi_1].$$

Из козамкнутости потока $\mathcal{H}_2 T$ немедленно следует, что $\mathcal{H}_2 T[\delta\varphi_1] = 0$. Проверим, что $\mathcal{H}_2 T[\Phi(e)] = 0$. Действительно, $\text{spt } \mathcal{H}_1 T \subset K$, и поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 T[\Phi(e)] &= T[\Phi(e)] - \mathcal{H}_1 T[\Phi(e)] = -\mathcal{H}_1 T[\Phi(e)] \\ &= -\{\mathcal{H}_1 T, \mathcal{H}_1(*\bar{e}) + \mathcal{H}(*\bar{e})\} = -\{\mathcal{H}_1 T, \mathcal{H}_1(*\bar{e})\} = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из свойства 5, п. 1.3, так как поток $\mathcal{H}_1 T$ замкнут и имеет компактный носитель, а поток $\mathcal{H}_1 * \bar{e}$ гомологичен нулю.

Аналогично доказывается, что первое слагаемое в правой части равенства (5) равно нулю. Вблизи K форма φ представима в виде $\varphi = \Phi(c) + d\varphi_2$, где $c \in \text{Ch}_{n-p}^f(M)$, $\text{spt } bc \subset M \setminus K$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_{p-1}$. Тогда

$$\mathcal{H}_1 T[\varphi] = \mathcal{H}_1 T[\Phi(c)] = -\{\mathcal{H}_2 T, \mathcal{H}_2 \bar{c}\} = 0.$$

Итак, каждый поток с носителем в K , ортогональный элементарным гармоническим p -формам с особенностями вне K , обращается в нуль на форме φ . Применяя теорему Хана-Банаха, получаем утверждение теоремы. •

3.2. Вывод полюсов. Теперь мы уточним доказанную в предыдущем пункте теорему Рунге, описав расположение особенностей приближающих форм.

Компактное множество K мы будем называть *правильным*, если для каждого q , $0 \leq q \leq n$, $\dim \bar{H}^q(K) < \infty$. Примером правильного компактного множества служит гладкое n -мерное подмногообразие с краем. В частности, для любого

компактного множества K и любой его окрестности O найдется правильное компактное множество K_1 , $K \subset K_1 \subset O$. Из изложенных в §2 результатов следует, что пространства $H_q(M, M \setminus K)$, $0 \leq q \leq n$, конечномерны, если K — правильное компактное подмножество многообразия M .

Пусть U — открытое подмножество многообразия M . Введем обозначения для пространств p -форм Био-Савара и Кулона с особенностями, гомологичными нулю в U :

$$\begin{aligned} \text{bs}_p(M \setminus U) &:= \{\Phi(c) : c \in \text{Ch}_{n-p}^f(U)\}, \\ \text{coul}_p(M \setminus U) &:= \{\Psi(e) : e \in \text{Ch}_p^f(U)\}. \end{aligned}$$

Теорема. Пусть K — правильное компактное подмножество многообразия M , $1 \leq p \leq n-1$, c_1, \dots, c_L — p -цепи, классы эквивалентности которых образуют базис в $H_p^s(M, M \setminus K)$, e_1, \dots, e_N — $(n-p)$ -цепи, классы которых образуют базис в $H_{n-p}^s(M, M \setminus K)$. Пусть $U \subset M \setminus K$ — открытое множество, пересекающееся с каждой компонентой связности множества $M \setminus K$. Тогда для любой p -формы φ , гармонической вблизи K , существуют числа a_1, \dots, a_L и b_1, \dots, b_N , такие что форму

$$\varphi_0 := \varphi - \sum_{j=1}^L a_j \Phi(c_j) - \sum_{k=1}^N b_k \Psi(e_k) \quad (6)$$

можно приблизить формами из пространства $\text{bs}_p(M \setminus U) + \text{coul}_p(M \setminus U)$ равномерно на K .

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{E}'_p$, $\text{spt } T \subset K$ и T ортогонален всем формам из $\text{bs}_p(M \setminus U) + \text{coul}_p(M \setminus U)$. Тогда, рассуждая так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, получим равенства $\mathcal{H}_2 T = 0$ в U и $\mathcal{H}_1 T = 0$ в U . Потоки $\mathcal{H}_2 T$ и $\mathcal{H}_1 T$ гармоничны в открытом множестве $M \setminus K$, а U пересекается с каждой компонентой связности $M \setminus K$. Следовательно, по теореме единственности [5], $\text{spt } \mathcal{H}_2 T \subset K$ и $\text{spt } \mathcal{H}_1 T \subset K$. Как и в п. 3.1, заключаем, что $\mathcal{H}T = 0$.

Далее, существуют цепи $c = \sum_{j=1}^L a_j c_j$ и $e = \sum_{k=1}^N b_k e_k$, для которых форма $\varphi - \Phi(c)$ гомологична, а форма $\varphi - \Psi(e)$ когомологична нулю вблизи K (см. п. 2.4). Положим $\varphi_0 := \varphi - \Phi(c) - \Psi(e)$. Тогда в некоторой окрестности множества K выполнены равенства $\varphi_0 = d\varphi_1 - \Psi(e)$ и $\varphi_0 = \delta\varphi_2 - \Phi(c)$, где $\varphi_1 \in \mathcal{D}_{p-1}$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}_{p+1}$. Проверим, что $T[\varphi_0] = 0$. Это следует из того, что $\mathcal{H}_1 T[\varphi_0] = 0$ и $\mathcal{H}_2 T[\varphi_0] = 0$. Докажем, например, первое равенство:

$$\mathcal{H}_1 T[\varphi_0] = \mathcal{H}_1 T[d\varphi_1] - \mathcal{H}_1 T[\Psi(e)] = -\mathcal{H}_1 T[\Psi(e)]$$

$$= -\{\mathcal{H}_1 T, \mathcal{H}_1(*\tilde{e}) + \mathcal{H}(*\tilde{e})\} = -\{\mathcal{H}_1 T, \mathcal{H}_1(*\tilde{e})\} = 0.$$

Теорема доказана. •

Заметим, что пространство $bs_p(M \setminus U) + \text{coul}_p(M \setminus U)$ в формулировке теоремы можно заменить на пространство $bs_p(M \setminus U) + h_p$ или $\text{coul}_p(M \setminus U) + h_p$.

3.3. Приближение формы φ_0 гармоническими формами с точечными особенностями. Отказавшись от приближения элементарными (в определенном нами смысле) гармоническими формами, мы можем приблизить форму φ_0 , определенную в (6), гармоническими формами с точечными особенностями. В евклидовом пространстве приближение „простейшими“ гармоническими формами с точечными особенностями изучалось в работе [4].

Нам понадобится следующий вариант теоремы единственности для гармонических дифференциальных форм, который все еще является частным случаем доказанного в [5] результата:

Если O — открытое связное подмножество многообразия M , $x \in O$, и гармоническая в O форма φ имеет в точке x нуль бесконечного порядка, то $\varphi \equiv 0$ в O .

Говорят, что форма φ , заданная на многообразии M , имеет в точке x нуль бесконечного порядка, если для любой карты $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow U \ni x$ все коэффициенты формы $\pi^*\varphi$ и все их частные производные всех порядков обращаются в нуль в точке $\pi^{-1}(x)$. Используя сформулированную теорему единственности, мы докажем следующее утверждение.

Пусть K — правильное компактное подмножество многообразия M , а множество $X \subset M \setminus K$ пересекается с каждой компонентой связности $M \setminus K$ (например, X содержит по одной точке каждой компоненты), тогда в условиях теоремы п. 3.2 форму φ_0 можно равномерно на K приблизить формами, гармоническими в $M \setminus X$.

Доказательство. Рассмотрим поток $T \in \mathcal{E}'_p$, $\text{spt } T \subset K$, который обращается в нуль на всех формах, гармонических в $M \setminus X$. Мы докажем, что $T[\varphi_0] = 0$. Во-первых, заметим, что $T\{\mathcal{H}\psi\} = 0$ для любой формы $\psi \in \mathcal{D}_p$, поскольку форма $\mathcal{H}\psi$ гармонична на M . Следовательно, $\mathcal{H}T \equiv 0$. Далее, если $S \in \mathcal{E}'_{n-p}$ и $\text{spt } S \subset X$, то поток $\mathcal{H}_1 S$ соответствует в $M \setminus X$ гармонической форме. Таким образом, (см. п. 1.4 (3)), $\{\mathcal{H}_2 T, S\} = \{T, \mathcal{H}_1 S\} = 0$.

Выберем некоторую компоненту связности W множества $M \setminus K$. На множестве W поток $\mathcal{H}_2 T$ задается некоторой гармонической формой ψ . Пусть $x \in X \cap W$. Тот факт, что для любого потока S , сосредоточенного в точке x , выполнено равенство $\{\mathcal{H}_2 T, S\} = 0$, означает, что форма ψ имеет в точке x нуль бесконечного порядка. Тогда из теоремы единственности следует, что $\psi \equiv 0$ в W . Поступая таким же образом с остальными компонентами связности

$M \setminus K$, получим, что $\text{spt } \mathcal{H}_2 T \subset K$. Теперь мы можем закончить доказательство так же, как в предыдущем пункте. •

§4. Теорема Гартогса–Розенталя для гармонических дифференциальных форм

В этом параграфе мы докажем теорему Гартогса–Розенталя. Будет описан некоторый класс компактных подмножеств многообразия M , на которых любую непрерывную форму можно равномерно приблизить гармоническими. В доказательствах будут использованы идеи и результаты работ [1, §7] и [2, §4.4].

4.1. Свойство (d_p) . Пусть $0 \leq p < n$. Будем говорить, что компактное множество $K \subset M$ обладает свойством (d_p) , если для любой локально суммируемой p -формы ψ и любого открытого множества O , содержащего K , из того, что $\psi \in C^\infty(O \setminus K)$ и ψ точна в $O \setminus K$, следует, что $dT_\psi = 0$ в O .

Теорема. *Предположим, что компактное подмножество K многообразия M обладает свойством (d_p) . Тогда любую $(p+1)$ -форму, замкнутую вблизи K , можно равномерно на K приблизить формами, гармоническими вблизи K .*

Доказательство. Пусть O — относительно компактная окрестность множества K . Существует компактное риманово многообразие M_1 , для которого O с метрикой из M является римановым подмногообразием.

Рассмотрим $(n-p-1)$ -ковекторный заряд μ , ортогональный всем $(p+1)$ -формам, гармоническим вблизи K , $\text{spt } \mu \subset K$. Мы докажем, что μ ортогонален всем формам, замкнутым вблизи K . На многообразии M_1 поток, порождаемый μ , имеет вид $\mu = d\delta G\mu + \delta dG\mu + \mathcal{H}\mu$. Ясно, что $\mathcal{H}\mu[\varphi] = \mu[\mathcal{H}\varphi] = 0$ для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}_{p+1}(M_1)$ (так как форма $\mathcal{H}\varphi$ гармонична вблизи K). Следовательно, $\mathcal{H}\mu = 0$. Рассмотрим поток $*dG\mu$. Как будет доказано в п. 4.4, он соответствует некоторой p -форме ψ класса L^1 . При этом для $y \notin \text{spt } \mu$ имеем (см. п. 1.6)

$$\psi(y) = *d \int_K *_x g_{n-p-1}(x, y) \wedge d\mu(x).$$

Вне множества K форма ψ бесконечно дифференцируема. Проверим, что она точна в $O \setminus K$. По теореме Де Рама для этого достаточно доказать, что $\int_e \psi = 0$

для любого $e \in Z_p^f(O \setminus K)$. Запишем этот интеграл в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_e \psi(y) &= \int_e \int_K *_y d_y *_x g_{n-p-1}(x, y) \wedge d\mu(x) \\ &= \int_K \left(\int_e *_y d_y *_x g_{n-p-1}(x, y) \right) \wedge d\mu(x) = \int_K \omega(x) \wedge d\mu(x) \\ &= \mu[\omega]. \end{aligned} \quad (7)$$

Форма ω определена равенством $\omega(x) = \int_e *_y d_y *_x g_{n-p-1}(x, y)$ вне $\text{spt } e$. Из равенства $Gd\varphi = dG\varphi$, выполненного для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}_{n-p-1}(M_1)$, следует, что $*_x d_y g_{n-p-1}(x, y) = (-1)^{p+1} d_x *_x g_{n-p}(x, y)$. Используя это равенство, мы можем переписать $\omega(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (-1)^{p+1} \int_e *_y d_x *_x g_{n-p}(x, y) \\ &= (-1)^{p+1} d * G e(x), \quad x \in M_1 \setminus \text{spt } e. \end{aligned}$$

Ясно, что $d\omega = 0$ и $\delta\omega = 0$ в $M_1 \setminus \text{spt } e$. В частности, ω гармонична вблизи K , и из равенства (7) следует, что $\int_e \psi(y) = \mu[\omega] = 0$. Итак, форма ψ точна в $O \setminus K$. Тогда в силу свойства (d_p) имеем $d(*dG\mu) = dT_\psi = 0$ в O , т.е. $\delta dG\mu = 0$ в O , и $\mu = d\delta G\mu$ в O . Пусть $\varphi \in \mathcal{D}_{p+1}(O)$ и $d\varphi = 0$ вблизи K . Тогда $\mu[\varphi] = d\delta G\mu[\varphi] = (-1)^{n-p+p+1} \mu[\delta dG\varphi]$. Форма $\delta dG\varphi$ гармонична вблизи K , так как $d(\delta dG\varphi) = d\varphi$, поэтому $\mu[\varphi] = 0$. Доказательство закончено. •

4.2. Свойство (sd_p) . Наряду со свойством (d_p) мы рассмотрим более сильное свойство (sd_p) . Будет описана некоторая геометрическая характеристика компактного множества, достаточная для выполнения условия (sd_p) .

Пусть $0 \leq p < n$, $U \subset M$ — открытое подмножество. Рассмотрим гомологичные нулю (в M) цепи, лежащие в U ; положим

$$R_p(U) = \{bc : c \in \text{Ch}_{p+1}^f(M), \text{spt } bc \subset U\}.$$

Будем говорить, что компактное множество $K \subset M$ обладает свойством (sd_p) , если для любой локально суммируемой p -формы ψ и любого открытого множества $G \subset M$ из условий:

- 1) T_ψ замкнут в $G \setminus K$,
- 2) $\{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G \setminus K)$

следует, что T_ψ замкнут в G , и $\{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G)$.

Отметим, что если $dT_\psi = 0$ в U и $e \in R_p(U)$, то индекс Кронекера $\{\tilde{e}, T_\psi\}$ определен (см. свойство 6 п. 1.3). Кроме этого, ясно, что $R_p(U) \subset Z_p^f(U)$, и если множество K обладает свойством (sd_p) , то оно обладает свойством (d_p) .

Напомним, что множество $K \in \mathbb{R}^n$ называется r -невидимым (в стандартном базисе), если проекция K на любую r -мерную координатную плоскость имеет нулевую r -мерную меру Лебега (см. [1]). Мы будем все время считать, что базис в \mathbb{R}^n фиксирован. Через B^n мы обозначаем единичный шар в пространстве \mathbb{R}^n и полагаем $B_\delta^n := \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq \delta\}$.

Лемма 1. Пусть $\pi: U \rightarrow B^n$ — карта на M , $U \subset M$. Если $k \subset U$ — компактное множество, образ которого $(n-p)$ -невидим, то k обладает свойством (sd_p) .

Доказательство. Пусть $\psi \in L_{loc}^1$ — p -форма на M , G — открытое подмножество M , для которых выполнены условия 1) и 2). Докажем сначала, что поток T_ψ замкнут в G . Рассмотрим в B^n локально суммируемую форму $(\pi^{-1})^*\psi$ и обозначим через T соответствующий ей поток. Для любого цикла $c \in Z_p^f(\pi(G \cap U) \setminus \pi(k))$ найдется цепь $c_1 \in Ch_{p+1}^f(B^n)$, такая что $c = bc_1$ (так как любой цикл в B^n гомологичен нулю). Тогда

$$\{\tilde{c}, T\} = \{\widetilde{bc_1}, T\} = \{\pi_*^{-1}(\widetilde{bc_1}), T_\psi\} = \{\widetilde{bg}, T_\psi\} = 0,$$

где $g = \pi_*^{-1}c_1$ (см. п. 1.3). Следовательно, форма $(\pi^{-1})^*\psi$ точна в $\pi(G \cap U) \setminus \pi(k)$. Из $(n-p)$ -невидимости множества $\pi(k)$ следует, что поток T замкнут в $\pi(G \cap U)$ (см. [2, §4.4В]). Значит, $dT_\psi = 0$ в $G \cap U$ и поток T_ψ замкнут в G (в $G \setminus k$ он замкнут по условию).

Рассмотрим некоторый цикл $c \in R_p(G)$. Если мы докажем, что существует компактно гомологичный ему в G цикл $e \in R_p(G \setminus k)$, то из замкнутости потока T_ψ в G будет следовать, что $\{\tilde{c}, T_\psi\} = \{\tilde{e}, T_\psi\} = 0$.

Выберем открытые множества U_1 и G_1 , компактно содержащиеся в U и G соответственно, и такие, что $k \subset U_1$, $\text{spt } c \subset G_1$. Рассмотрим достаточно мелкое полиэдральное разбиение F открытого множества $\pi(G \cap U)$ на полиэдры с ребрами, параллельными координатным осям. Диффеоморфизм π^{-1} переводит это разбиение в полиэдральное разбиение F_1 множества $G \cap U$. Если разбиение F было достаточно мелким, то существует разбиение E множества G , совпадающее с F_1 вблизи множества $G_1 \cap U_1$ (см. [12, с. 354–356]). Кроме того, мы можем считать, что все клетки разбиения E , пересекающиеся с $\text{spt } c$, содержатся в G_1 . Тогда по теореме Де Рама (см. [6, с. 157]) цикл c компактно гомологичен в G некоторому циклу e_1 разбиения E , причем $\text{spt } e_1 \subset G_1$.

Далее, существуют $\delta > 0$ и отображение $s: B_\delta^n \times M \rightarrow M$ класса C^∞ такое, что

$$1) s(0, x) = x,$$

2) $s(\eta, y) = \pi^{-1}(\pi(y) + \eta)$, при $y \in U_1$, и

3) $s(\eta, y) = y$ в некоторой окрестности множества $M \setminus U$.

При этом для любого $\eta \in B_\delta^n$ отображение $s_\eta = s(\eta, \cdot): M \rightarrow M$ является диффеоморфизмом. (Конструкция отображения s содержится в книге Де Рама [6, §15]). Из формулы гомотопии (см. [6, 10]) сразу следует, что цикл $s_\eta(e_1)$ компактно гомологичен циклу e_1 в G при достаточно маленьком $|\eta|$ (таком, что $s(B_{|\eta|}^n \times G_1) \subset G$). Кроме того, при достаточно маленьком $|\eta|$ верно включение $s_\eta^{-1}(k) \subset U_1$ и $\pi(s_\eta(e_1) \cap k) = \pi(s_\eta(e_1) \cap U_1) \cap \pi(k) = (\pi(e_1 \cap U_1) + \eta) \cap \pi(k)$. Но из $(n-p)$ -невидимости множества $\pi(k)$ и из выбора полиэдрального разбиения следует, что $(\pi(e_1 \cap U_1) + \eta) \cap \pi(k) = \emptyset$ для почти всех $\eta \in B_\delta^n$. Следовательно, существует $\bar{\eta} \in B_\delta^n$, для которого $s_{\bar{\eta}}(e_1) \cap k = \emptyset$. Положим $e := s_{\bar{\eta}}(e_1)$. Доказательство леммы закончено. •

Лемма 2. *Объединение конечного числа компактных множеств, обладающих свойством (sd_p) , обладает этим свойством.*

Доказательство. Пусть K_1 и K_2 обладают свойством (sd_p) . Пусть $G \subset M$ — открытое множество и $\psi \in L_{loc}^1$ — p -форма. Зная, что поток T_ψ замкнут в $G \setminus K_1 \cup K_2$, $\{\bar{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G \setminus K_1 \cup K_2)$, и используя свойство (sd_p) множества K_2 , заключаем, что поток T_ψ замкнут в $G \setminus K_1$, а $\{\bar{e}, T_\psi\} = 0$ для любого $e \in R_p(G \setminus K_1)$. Остается воспользоваться свойством (sd_p) для множества K_1 . •

4.3. Теорема Гартогса-Розенталя. Назовем компактное подмножество K многообразия M r -почти невидимым, если K представимо в виде конечного объединения компактных множеств, содержащихся в носителях карт и имеющих r -невидимый в \mathbb{R}^n образ.

Теорема. Пусть $0 < r < n$, $r' = \min\{r+1, n-r+1\}$, K — r' -почти невидимое компактное подмножество многообразия M . Тогда любую r -форму, непрерывную на K , можно равномерно на K приблизить формами, гармоническими вблизи K .

Доказательство. Пусть задана r -форма, непрерывная на K . Ее можно равномерно на K приблизить формой $\varphi \in \mathcal{D}_r(M)$. Рассмотрим разложение этой формы $\varphi = \mathcal{H}_1\varphi + \mathcal{H}_2\varphi + \mathcal{H}\varphi$. Форма $\mathcal{H}\varphi$ гармонична на всем многообразии. Форма $\mathcal{H}_1\varphi$ замкнута, а множество K по леммам 1 и 2 удовлетворяет условию (sd_{r-1}) , поэтому из п. 4.1 следует, что $\mathcal{H}_1\varphi$ можно равномерно на K приблизить формами, гармоническими вблизи K . Аналогично из условия (sd_{n-r-1}) , выполненного для множества K , следует, что замкнутую форму $*\mathcal{H}_2\varphi$ можно равномерно на K приблизить гармоническими. •

4.4. Об операторе dG . Пусть M — компактное риманово многообразие. В п. 4.1 мы воспользовались следующим утверждением:

Если μ — конечный q -ковекторный заряд на M ($\mu \in \mathcal{D}'_{n-q}$), то существует $(q+1)$ -форма $\varphi \in L^1$, для которой $dG\mu = T_\varphi$.

Оператор G является классическим псевдодифференциальным оператором на M порядка -2 (см., например, [8, 13]). Следовательно, dG — псевдодифференциальный оператор порядка -1 . Достаточно доказать сформулированное утверждение для заряда μ , сосредоточенного в некоторой координатной области U на M . Пусть $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow U$ — диффеоморфизм, определим оператор $A: \mathcal{D}'_{n-q}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'_{n-q}(\mathbb{R}^n)$ равенством $A(T) = \pi^{-1}(dG(\pi T))$. Это псевдодифференциальный оператор в \mathbb{R}^n порядка -1 . Обозначим его ядро через $a(x, y)$. Тогда

$$|a(x, y)| \leq C|x - y|^{-n+1}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq y$$

(см. [14, с. 49, 326]). Следовательно, ковекторный заряд $\pi^{-1}(\mu)$ переводится оператором A в поток, представимый формой класса $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что $dG\mu = \pi(A(\pi^{-1}(\mu)))$ в U . Таким образом, в U поток $dG\mu$ представим формой класса L^1_{loc} , но вне $\text{spt } \mu$ поток $dG\mu$ соответствует C^∞ -форме. Утверждение доказано.

§5. Заключительные замечания

5.1. Операторы G и \mathcal{H} . Вернемся к теореме разложения на компактном многообразии M (п. 1.6). Оператор \mathcal{H} проектирует p -форму (поток) в пространство гармонических p -форм h_p . Пространство h_p конечномерно; положим $s = \dim h_p$. Рассмотрим оператор Лапласа-Бельтрами Δ , действующий на p -формы (см., например, [7]). Он имеет дискретный спектр $0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_s > \lambda_{s+1} \geq \lambda_{s+2} \geq \dots$. В пространстве квадратично суммируемых p -форм можно выбрать ортонормальный базис $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$, состоящий из собственных форм оператора Δ . Мы считаем, что $\Delta\beta_k = \lambda_k\beta_k$. Таким образом, $\{\beta_k\}_{k=1}^s$ — базис пространства h_p . Ядро $h(x, y)$ оператора \mathcal{H} есть двойная форма на $M \times M$, определенная равенством $h(x, y) = \sum_{k=1}^s \beta_k(x)\beta_k(y)$. Рассмотрим форму $\psi \in L^2_p$ и ее разложение в данном базисе, $\psi = \sum_{k=1}^\infty a_k\beta_k$. Тогда естественно

$$\mathcal{H}\psi = \sum_{k=1}^s a_k\beta_k, \quad G\psi = \sum_{k=s+1}^\infty -(a_k)/(\lambda_k)\beta_k.$$

(Форма $G\psi$ определена, когда последний ряд сходится).

Отметим также, что $L^2_p = h_p + h_p^1 + h_p^2$, где h_p^1 и h_p^2 — замыкания в L^2_p пространств точных и коточных форм соответственно. Слагаемые в этом разложении попарно ортогональны и являются инвариантными подпространствами

оператора Δ . Если $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ — ортогональные базисы из собственных форм оператора Δ в h_p^1 и h_p^2 , то $\{*\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{*\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ — ортогональные базисы в h_{n-p}^2 и h_{n-p}^1 соответственно. Кроме того, $\{\delta\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в h_{p-1}^2 , а $\{d\gamma_l\}_{l=1}^{\infty}$ — ортогональный базис в h_{p+1}^1 .

Оператор Грина существует и на некоторых некомпактных многообразиях. Например, в случае $M = \mathbb{R}^n$ роль оператора G выполняет ньютонский потенциал. Пространство h_p ($0 < p < n$) тривиально, и разложение Ходжа-Вейля-Кодайры-Де Рама превращается в формулу Коши-Грина

$$c_n S = d\delta U^S + \delta dU^S$$

(см. [1]). Вопрос о наличии оператора Грина на данном некомпактном многообразии, по-видимому, является достаточно сложным.

О спектральном разложении оператора Лапласа-Бельтрами на p -формах на n -мерной сфере известно следующее. Вычислены собственные числа и их кратности (см., например, [15]). Некоторое описание собственных форм содержится в работе [16]. В качестве другого примера рассмотрим n -мерный тор. Введем на торе обычную систему координат. Оператор Лапласа-Бельтрами действует на формы по коэффициентно. Пространство h_p состоит из форм с постоянными коэффициентами, $\dim h_p = C_n^p$. Собственные числа оператора $-\Delta$ — квадраты длин векторов в \mathbb{Z}^n . Оператор Грина так же, как в пространстве \mathbb{R}^n , порождается сверткой с некоторым ядром $g(x)$. Функция $g(x)$ определяется своим рядом Фурье $\sum_{|m|>0} |m|^{-2} e^{2\pi i m \cdot x}$. О вопросах сходимости и свойствах ядра $g(x)$ см. [17, VII, §3].

5.2. О формах Био-Савара. Напомним, что каждой цепи $c \in \text{Ch}_{n-q}^f$ мы сопоставили поток $\beta(c) = \tilde{c} - \mathcal{H}_1 \tilde{c}$ (см. п. 1.5), который вне $\text{spt } bc$ соответствует гармонической q -форме $\Phi(c)$. Таким образом, форма Био-Савара степени q определяется $(n-q)$ -цепью, а ее „особенности“ заключены в границе этой цепи. Множество „особенностей“ определяет форму Био-Савара, вообще говоря, неоднозначно. Нетрудно видеть, что равенство $\beta(c) = \beta(c_1)$ равносильно равенству $c - c_1 = be$, $e \in \text{Ch}_{n-q+1}^f$. Из совпадения границ bc и bc_1 следует лишь, что $\beta(c) = \beta(c_1) + \varphi$, где $\varphi \in h_q$. В случае, когда пространство h_q тривиально, как, например, в случае $M = \mathbb{R}^n$, форма Био-Савара полностью определяется множеством своих особенностей. Если при этом на многообразии определен оператор Грина, то $\Phi(c) = \mathcal{H}_2 \tilde{c} = \delta dG(c) = (-1)^{q+1} \delta G(bc)$. Таким образом, в этом случае q -форма Био-Савара сопоставляется $(n-q-1)$ -циклу. В обозначениях работы [1] для $M = \mathbb{R}^n$ мы получаем

$$\Phi(c) = (-1)^{q+1} BS^{bc}, \quad \text{где } c \in \text{Ch}_{n-q}^f.$$

Докажем, что определенные нами формы сохраняют следующее свойство форм Био-Савара в \mathbb{R}^n (см. [1, с. 125]).

Если $c \in \text{Ch}_{n-q}^f$, $e \in Z_q^f$ и $\text{spt } e \cap \text{spt } bc = \emptyset$, то

$$\int_e \Phi(c) = \{\tilde{e}, \tilde{c}\}.$$

Доказательство. Индекс Кронекера $\{\tilde{e}, \tilde{c}\}$ определен, так как $be = 0$ и $\text{spt } e \cap \text{spt } bc = \emptyset$ (см. свойство 6 п. 1.3)). Поток $\mathcal{H}_2 \tilde{c} + \mathcal{H} \tilde{c}$ принадлежит классу C^∞ в окрестности $\text{spt } e$, так что определен индекс Кронекера пары потоков \tilde{e} и $\mathcal{H}_2 \tilde{c} + \mathcal{H} \tilde{c}$, $\{\tilde{e}, \mathcal{H}_2 \tilde{c} + \mathcal{H} \tilde{c}\} = \int_e \Phi(c)$. Следовательно,

$$\{\tilde{e}, \tilde{c}\} - \int_e \Phi(c) = \{\tilde{e}, \tilde{c} - \mathcal{H}_2 \tilde{c} - \mathcal{H} \tilde{c}\} = \{\tilde{e}, \mathcal{H}_1 \tilde{c}\}.$$

Поток $\mathcal{H}_1 \tilde{c}$ гомологичен нулю, а поток \tilde{e} имеет компактный носитель и замкнут. Таким образом, индекс Кронекера этой пары потоков равен нулю и требуемое равенство доказано. •

Зная ядра g_p и h операторов G и \mathcal{H} , мы без труда получим следующие формулы для форм Био-Савара и Кулона. Если $c \in \text{Ch}_{n-p}^f$, $e \in \text{Ch}_p^f$, то

$$\Phi(c)(y) = \int_{bc} \delta_x *_x g_p(x, y) + \int_c *_x h(x, y), \quad y \notin \text{spt } bc;$$

$$\Psi(e)(y) = \int_{be} *_x d_x *_x g_p(x, y) + \int_e h(x, y), \quad y \notin \text{spt } be.$$

Список литературы

- [1] Преса Саре А., Хавин В. П., *Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами в евклидовом пространстве*, Алгебра и анализ 7 (1995), № 6, 104–152.
- [2] Малинникова Е. В., Хавин В. П., *Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами. Конструктивный подход*, Алгебра и анализ 9 (1997), № 6, 156–196.
- [3] Bagby T., Blanchet P., *Uniform harmonic approximation on Riemannian manifolds*, J. Anal. Math. 62 (1994), 47–76.
- [4] Дагер С. Р., Преса С. А., *Об одном аналоге теоремы Рунге для гармонических дифференциальных форм*, Зап. науч. семин. ПОМИ 232 (1996), 109–117.

- [5] Aronszajn N., Krzywicki A., Szarski J., *A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds*, Ark. Mat. 4 (1962), 417–453.
- [6] Рам Ж. де, *Дифференцируемые многообразия*, ИЛ, М., 1956.
- [7] Warner F., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Grad. Texts in Math., vol. 94, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1983.
- [8] Уэллс Р., *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях*, Мир, М., 1976.
- [9] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б., *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.
- [10] Федерер Г., *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.
- [11] Хьюзмоллер Д., *Расслоенные пространства*, Мир, М., 1970.
- [12] Манкрс Дж., *Элементарная дифференциальная топология*, Милнор Дж, Сташев Дж., Характеристические классы, Мир, М., 1979, сс. 270–358.
- [13] Трев Ф., *Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 2. Интегральные операторы Фурье*, Мир, М., 1984.
- [14] Тейлор М., *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1985.
- [15] Iwasaki I., Katase K., *On the spectra of Laplace operator on $\Lambda^*(S^n)$* , Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 55 (1979), no. 4, 141–145.
- [16] Paquet L., *Méthode de séparation des variables et calcul du spectre d'opérateurs sur les formes différentielles*, Bull. Sci. Math. (2) 105 (1981), no. 1, 85–112.
- [17] Стейн И., Вейс Г., *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

С.-Петербургский государственный
университет
математико-механический факультет
198904, Санкт-Петербург
Петродворец, Библиотечная пл., 2

Поступило 16 ноября 1998 г.