L. A. Molotkov, A finite expression of characteristic matrices of slightly bent elastic layers, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 104, 156–169

Л.А.Молотков

# КОНЕЧНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ СЛАБО ИСКРИВЛЕННЫХ УПРУГИХ СЛОЕВ

Предлагаемая работа посвящена описанию двумерного распространения волн в слабо искривленном однородном изотропном упругом слое, в котором радиус кривизны во много раз больше доминирующей волны. Для этого слоя выводится выражение характеристической матрицы, связывающей нормальные и тангенциальные смещения и напряжения на границах слоя. В отличие от статьи [I] , где упомянутые матрицы представляют рядами, результаты настоящей работы выражаются в конечном виде.

Получение выражений для характеристических матриц слабо искривленных упругих слоев основано на использовании одноименных матриц в случае плоско-параллельного, цилиндрического и сферического слоев. Последние матрицы могут быть представлены или в виде рядов [2,3] , или в конечных матричных выражениях, элементы которых содержат гиперболические и цилиндрические функции. Первое из указанных представлений использовалось в статье [I] . В настоящей же работе применяются вторые выражения для характеристических матриц в трех случаях: I) волн вдоль образующей цилиндрического слоя, 2) азимутальных волн в цилиндрическом слое и 3) меридиональных волн в сферическом слое.

## § I. Характеристическая матрица слабо искривленного цилиндрического слоя в случае волн вдоль образующей

Пусть в цилиндрической системе координат $r, \theta, z$ задан однородный изотропный упругий слой $r_1 < r < r_2$ , характеризуемый плотностью $\rho$ и коэффициентами Ламе $\lambda$ и $\mu$ . Предполагается, что вектор смещения в этом слое не зависит от азимутальной координаты $\theta$ и не содержит составляющей вдоль этой координаты. Поле смещений и напряжений в таком слое представляется соотношениями

$$u_z = \int_0^{\infty} e^{-ikz} \frac{dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_z(k,\eta,r)\, e^{kt\eta}\, d\eta ,$$

$$u_r = \int_0^{\infty} e^{-ikz} \frac{dk}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_r(k,\eta,r)\, e^{kt\eta}\, d\eta ,$$

$$t_{rz}=\int_0^\infty e^{-ikz}\frac{k\,dk}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}T_{rz}(k,\eta,r)\,e^{kt\eta}\,d\eta,$$

$$t_{rr}=\int_0^\infty e^{-ikz}\frac{k\,dk}{2\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}T_{rr}(k,\eta,r)\,e^{kt\eta}\,d\eta. \qquad (I.I)$$

Связь между значениями матрицы

$$W=(U_z, U_r, T_{rz}, T_{rr})^T \qquad (I.2)$$

при $r=r_1$ и $r=r_2$ дается формулой

$$W(r_2)=CW(r_1), \qquad (I.3)$$

где $C$ – рассматриваемая характеристическая матрица, а значок $T$ выражает операцию транспонирования.

На основании уравнений Ламе и закона Гука характеристическая матрица представляется равенством

$$C=F(r_2)KF^{-1}(r_1), \qquad (I.4)$$

в котором

$$F(r_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-\frac{2\mu}{kr_2}&0&1\end{pmatrix},\quad F^{-1}(r_1)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&\frac{2\mu}{kr_1}&0&1\end{pmatrix}, \qquad (I.5)$$

а элементы матрицы $K$ имеют выражения

$$k_{11}=\chi\mu(2\alpha H_{01}^{x}-\beta g H_{01}^{y}),\quad k_{12}=-i\chi\mu(gH_{00}^{x}-2\beta^2H_{00}^{y}),$$

$$k_{13}=i\chi(H_{00}^{x}-\beta^2H_{00}^{y}),\quad k_{14}=-\chi(\alpha H_{01}^{x}-\beta H_{01}^{y}),$$

$$k_{21}=i\chi\mu(2\alpha^2H_{11}^{x}-gH_{11}^{y}),\quad k_{22}=\chi\mu(\alpha gH_{10}^{x}-2\beta H_{10}^{y}),$$

$$k_{23}=-\chi(\alpha H_{10}^{x}-\beta H_{10}^{y}),\quad k_{24}=-i\chi(\alpha^2H_{11}^{x}-H_{11}^{y}), \qquad (I.6)$$

$$k_{31}=i\chi\mu^2(4\alpha^2H_{11}^{x}-g^2H_{11}^{y}),\quad k_{32}=2\chi\mu^2g(\alpha H_{10}^{x}-\beta H_{10}^{y}),$$

$$k_{33}=-\chi\mu(2\alpha H_{10}^{x}-\beta gH_{10}^{y}),\quad k_{34}=-k_{21},$$

$$k_{41}=2\chi\mu^2 g(\alpha H_{01}^x-\beta H_{01}^y),\quad k_{42}=-i\chi\mu^2(g^2H_{00}^x-4\beta^2H_{00}^y),$$

$$k_{43}=-k_{12},\quad k_{44}=-\chi\mu(\alpha g H_{01}^x-2\beta H_{01}^y).$$

В формулах (I.6) использованы обозначения

$$\chi=\pi k r_1(4\varrho h^2)^{-1}, \tag{I.7}$$

$$\begin{aligned} H_{00}^x&=H_0^{(1)}(x_2)H_0^{(2)}(x_1)-H_0^{(2)}(x_2)H_0^{(1)}(x_1),\\ H_{01}^x&=H_0^{(1)}(x_2)H_1^{(2)}(x_1)-H_0^{(2)}(x_2)H_1^{(1)}(x_1),\\ H_{10}^x&=H_1^{(1)}(x_2)H_0^{(2)}(x_1)-H_1^{(2)}(x_2)H_0^{(1)}(x_1),\\ H_{11}^x&=H_1^{(1)}(x_2)H_1^{(2)}(x_1)-H_1^{(2)}(x_2)H_1^{(1)}(x_1), \end{aligned} \tag{I.8}$$

в которых $H_j^{(i)}(z)$ – $i$-ая функция Ханкеля со значком $j$ ($i=1,2$; $j=0,1$). Если в равенствах (I.8) заменить $x$ на $y$, то придем к аналогичным соотношениям для $H_{00}^y$, $H_{01}^y$, $H_{10}^y$, $H_{11}^y$. При этом $x_j$ и $y_j$ ($i=1,2$) выражаются формулами

$$x_j=-ikr_j\alpha,\quad y_j=-ikr_j\beta, \tag{I.9}$$

а входящие в (I.6) и (I.9) величины $\alpha,\beta$ и $g$ имеют выражения

$$\alpha=\sqrt{1+\varrho(\lambda+2\mu)^{-1}h^2},\quad \beta=\sqrt{1+\varrho\mu^{-1}h^2},\quad g=2+\varrho\mu^{-1}h^2. \tag{I.10}$$

Таким образом, характеристическая матрица в рассматриваемом случае представляется соотношениями (I.4)-(I.10).

Для получения приближенных формул этой матрицы при

$$kr_1>>1 \tag{I.11}$$

необходимо воспользоваться асимптотическими представлениями

$$H_n^{(1,2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{\pm i\left(z-\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1\pm i\,\frac{4n^2-1}{8z}\right] \tag{I.12}$$

для функций Ханкеля. С учетом соотношений (I.12) приходим к асимптотическим формулам

$$
\begin{aligned}
&r_1 H^x_{00} = r_1 H^x_{11} = \frac{i4}{\pi k\alpha}\left(1-\frac{h}{2r_1}\right) S_\alpha \,, \\
&r_1 H^x_{01} = -\frac{4}{\pi k\alpha}\left(C_\alpha + \frac{S_\alpha}{2kr_1\alpha} - \frac{hC_\alpha}{2r_1}\right), \\
&r_1 H^x_{10} = \frac{4}{\pi k\alpha}\left(C_\alpha - \frac{S_\alpha}{2kr_1\alpha} - \frac{hC_\alpha}{2r_1}\right).
\end{aligned}
\tag{I.13}
$$

Выражения для величин $r_1 H^y_{00}$, $r_1 H^y_{11}$, $r_1 H^y_{01}$ и $r_1 H^y_{10}$ получаются из соотношений (I.13) путем замены $x$ и $\alpha$ соответственно на $y$ и $\beta$. В последних выражениях, а также в равенствах (I.13) использованы обозначения

$$
S_\alpha = \operatorname{sh} kh\alpha, \quad S_\beta = \operatorname{sh} kh\beta, \quad C_\alpha = \operatorname{ch} kh\alpha, \quad C_\beta = \operatorname{ch} kh\beta. \tag{I.14}
$$

Полученные соотношения позволяют в области (I.11) представить характеристическую матрицу $C$ асимптотической формулой

$$
C = C' + A(kr_1)^{-1}\left[1 + O\left(k^{-1} r_1^{-1}\right)\right]. \tag{I.15}
$$

При этом $C'$ – характеристическая матрица плоско-параллельного слоя, а второй член описывает поправку на кривизну. Элементы $C'_{ik}$ матрицы $C'$ согласно работе [2] имеют выражения

$$
\begin{aligned}
&C'_{11} = C'_{33} = -\mu(\varrho\mathfrak{h}^2)^{-1}(2C_\alpha - gC_\beta), \\
&C'_{12} = -C'_{43} = \mu(\varrho\mathfrak{h}^2)^{-1}(\alpha^{-1} g S_\alpha - 2\beta S_\beta), \\
&C'_{13} = -(\varrho\mathfrak{h}^2)^{-1}(\alpha^{-1} S_\alpha - \beta S_\beta), \\
&C'_{14} = -C'_{23} = (\varrho\mathfrak{h}^2)^{-1}(C_\alpha - C_\beta), \\
&C'_{21} = -C'_{34} = -\mu(\varrho\mathfrak{h}^2)^{-1}(2\alpha S_\alpha - \beta^{-1} g S_\beta), \\
&C'_{22} = C'_{44} = \mu(\varrho\mathfrak{h}^2)^{-1}(gC_\alpha - 2C_\beta), \\
&C'_{24} = (\varrho\mathfrak{h}^2)^{-1}(\alpha S_\alpha - \beta^{-1} S_\beta), \\
&C'_{31} = -\mu^2(\varrho\mathfrak{h}^2)^{-1}(4\alpha S_\alpha - \beta^{-1} g^2 S_\beta), \\
&C'_{32} = -C'_{41} = 2\mu^2 g(\varrho\mathfrak{h}^2)^{-1}(C_\alpha - C_\beta), \\
&C'_{42} = \mu^2(\varrho\mathfrak{h}^2)^{-1}(\alpha^{-1} g^2 S_\alpha - 4\beta S_\beta).
\end{aligned}
\tag{I.16}
$$

Что касается матрицы $A$, то она представляется равенством

$$A = -\frac{kh}{2} C' + A', \tag{I.17}$$

а элементы $a'_{ik}$ матрицы $A'$ выражаются соотношениями

$$\begin{aligned}
&a'_{11} = -a'_{33} = -\mu(\varrho \gamma^2)^{-1}\left[\alpha^{-1} S_\alpha - (2\beta)^{-1} q\, S_\beta\right],\\
&a'_{12} = a'_{43} = 2\mu(\varrho\gamma^2)^{-1}\left[C_\alpha - C_\beta\right],\ a'_{13} = a'_{21} = a'_{24} = 0,\\
&a'_{14} = a'_{23} = (2\varrho\gamma^2)^{-1}\left[\alpha^{-1} S_\alpha - \beta^{-1} S_\beta\right],\\
&a'_{22} = -a'_{44} = \mu(\varrho\gamma^2)^{-1}\left[(2\alpha)^{-1}(4\alpha^2 - q) S_\alpha - \beta^{-1} S_\beta\right],\\
&a'_{31} = a'_{34} = a'_{42} = 0,\ a'_{32} = a'_{41} = \mu^2(\varrho\gamma^2)^{-1}\left[\alpha^{-1}(4\alpha^2 - q) S_\alpha - \beta^{-1} q\, S_\beta\right].
\end{aligned} \tag{I.18}$$

## § 2. Характеристическая матрица слабо искривленного цилиндрического слоя в случае азимутальных волн

Пусть в рассматриваемом цилиндрическом слое вектор смещений не зависит от координаты $z$ и не содержит составляющей вдоль этой координаты. Поле смещений и напряжений в этом случае представляется соотношениями

$$\begin{aligned}
&u_\theta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\theta} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} U_\theta(n, \gamma, r)\, e^{k\gamma t}\, d\gamma,\\
&u_r = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\theta} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} U_r(n, \gamma, r)\, e^{k\gamma t}\, d\gamma,\\
&t_{r\theta} = \frac{k}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\theta} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} T_{r\theta}(n, \gamma, r)\, e^{k\gamma t}\, d\gamma,\\
&t_{rr} = \frac{k}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\theta} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} T_{rr}(n, \gamma, r)\, e^{k\gamma t}\, d\gamma.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Связь между значениями матрицы

$$W = (U_\theta, U_r, T_{r\theta}, T_{rr})^T \tag{2.2}$$

при $r = r_1$ и $r = r_2$ дается по-прежнему формулой (I.3), где $C$ – – характеристическая матрица слоя.

На основании уравнений Ламе и закона Гука эта матрица также представится равенством (I.4), но $F(r_2)$ и $F^{-1}(r_1)$ будут заданы соотношениями

$$
F(r_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2\mu}{kr_2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2\mu}{kr_2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^{-1}(r_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{kr_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2\mu}{kr_1} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}
$$

Элементы матрицы $K$ имеют выражения

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= -\chi\left(2\mu N_1 N_2 x_1 H_{01}^{x} + \theta_1 y_1 H_{10}^{y}\right), \\
K_{12} &= -\chi\left(\varkappa^{-1}\theta_1 N_2 x_1 H_{00}^{x} + 2\mu N_1 \varepsilon y_1 H_{11}^{y}\right), \\
K_{13} &= \chi\left(N_1 N_2 \varkappa^{-1} x_1 H_{00}^{x} + \varepsilon y_1 H_{11}^{y}\right), \\
K_{14} &= \chi\left(N_2 x_1 H_{01}^{x} + N_1 y_1 H_{10}^{y}\right), \\
K_{21} &= -\chi\left(2\mu N_1 \varkappa x_1 H_{11}^{x} + \varepsilon^{-1}\theta_1 N_2 y_1 H_{00}^{y}\right), \\
K_{22} &= -\chi\left(\theta_1 x_1 H_{10}^{x} + 2\mu N_1 N_2 y_1 H_{01}^{y}\right), \\
K_{23} &= \chi\left(N_1 x_1 H_{10}^{x} + N_2 y_1 H_{01}^{y}\right), \\
K_{24} &= \chi\left(\varkappa x_1 H_{11}^{x} + N_1 N_2 \varepsilon^{-1} y_1 H_{00}^{y}\right), \\
K_{31} &= -\chi\left(4\mu^2 N_1 N_2 \varkappa x_1 H_{11}^{x} + \theta_1\theta_2 \varepsilon^{-1} y_1 H_{00}^{y}\right), \\
K_{32} &= -2\mu\chi\left(\theta_1 N_2 x_1 H_{10}^{x} + N_1\theta_2 y_1 H_{01}^{y}\right), \\
K_{33} &= \chi\left(2\mu N_1 N_2 x_1 H_{10}^{x} + \theta_2 y_1 H_{01}^{y}\right), \\
K_{34} &= \chi\left(2\mu N_2 \varkappa x_1 H_{11}^{x} + N_1 \varepsilon^{-1}\theta_2 y_1 H_{00}^{y}\right), \\
K_{41} &= -2\mu\chi\left(N_1\theta_2 x_1 H_{01}^{x} + N_2\theta_1 y_1 H_{10}^{y}\right), \\
K_{42} &= -\chi\left(\theta_1\theta_2 \varkappa^{-1} x_1 H_{00}^{x} + 4\mu^2 N_1 N_2 \varepsilon y_1 H_{11}^{y}\right),
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

$$K_{43}=\chi\left(N_1\varkappa^{-1}\theta_2 x_1 H_{00}^{x}+2\mu N_2\varepsilon y_1 H_{11}^{y}\right),$$

$$K_{44}=\chi\left(\theta_2 x_1 H_{01}^{x}+2\mu N_1 N_2 y_1 H_{10}^{y}\right),$$

в которых

$$N_i=n(kr_i)^{-1},\quad \theta_i=2\mu N_i+\varrho h^2,\quad x_i=-ikr_i h v_p^{-1},$$

$$y_i=-ikr_i h v_s^{-1}\quad (i=1,2),\quad v_p=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\varrho},\quad v_s=\sqrt{\mu/\varrho}, \tag{2.5}$$

$$\varkappa=-ihv_p^{-1},\quad \varepsilon=-ihv_s^{-1},\quad \chi=i\pi\left(4\varrho h^2\right)^{-1}.$$

Функции $H_{00}^{x}, H_{11}^{x}, H_{01}^{x}$ и $H_{10}^{x}$ представляются соотношениями

$$
\begin{aligned}
H_{00}^{x}&=H_n^{(1)}(x_2)H_n^{(2)}(x_1)-H_n^{(2)}(x_2)H_n^{(1)}(x_1),\\
H_{11}^{x}&=H_n^{(1)'}(x_2)H_n^{(2)'}(x_1)-H_n^{(2)'}(x_2)H_n^{(1)'}(x_1),\\
H_{01}^{x}&=H_n^{(1)}(x_2)H_n^{(2)'}(x_1)-H_n^{(2)}(x_2)H_n^{(1)'}(x_1),\\
H_{10}^{x}&=H_n^{(1)'}(x_2)H_n^{(2)}(x_1)-H_n^{(2)'}(x_2)H_n^{(1)}(x_1),
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

а выражения для $H_{00}^{y}, H_{11}^{y}, H_{01}^{y}$ и $H_{10}^{y}$ получаются из формул (2.6), если все $x$ заменить на $y$. Таким образом, характеристическая матрица $C$ в случае распространения азимутальных волн в цилиндрическом слое представляется формулами (I.4),(2.3)-(2.6).

Для перехода к слабо искривленному слою, удовлетворяющему условию (I.II), необходимо использовать соотношение $n=kr_1$, вытекающее из равенств (2.I), и асимптотические формулы

$$H_n^{(1,2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{z^2-n^2}}}\,\exp\left[\pm i\left(\sqrt{z^2-n^2}-n\arccos\frac{n}{z}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[1\mp i\,\frac{3z^2+2n^2}{24(z^2-n^2)^{3/2}}\right] \tag{2.7}$$

для функций Ханкеля при $n\gg 1$ и $z\gg 1$ [4]. Из равенств (2.5)-(2.7) следуют соотношения

$$x_1 H_{00}^{x}=\frac{4h}{\pi\alpha v_p}\left[S_\alpha-\frac{h(\alpha^2-1)S_\alpha}{2r_1\alpha^2}-\frac{kh^2C_\alpha}{2r_1\alpha}\right],$$

$$x_1H^{x}_{11}=\frac{4\alpha v_\rho}{\pi\eta}\left[S_\alpha-\frac{h(\alpha^2+1)S_\alpha}{2r_1\alpha^2}-\frac{kh^2C_\alpha}{2r_1\alpha}\right],$$

$$x_1H^{x}_{01}=-\frac{i4}{\pi}\left[C_\alpha+\frac{(\alpha^2-1)S_\alpha}{2kr_1\alpha^3}-\frac{h(\alpha^2-1)C_\alpha}{2r_1\alpha^2}-\frac{kh^2S_\alpha}{2r_1\alpha}\right], \qquad (2.8)$$

$$x_1H^{x}_{10}=\frac{i4}{\pi}\left[C_\alpha-\frac{(\alpha^2-1)S_\alpha}{2kr_1\alpha^3}-\frac{h(\alpha^2+1)C_\alpha}{2r_1\alpha^2}-\frac{kh^2S_\alpha}{2r_1\alpha}\right],$$

в которых использованы обозначения (I.I0) и (I.I4). Аналогичные выражения для $y_1H^{y}_{00}$, $y_1H^{y}_{11}$, $y_1H^{y}_{01}$ и $y_1H^{y}_{10}$ получаются из формул (2.8) путем замены $x$ и $\alpha$ соответственно на $y$ и $\beta$.

После подстановки соотношений (2.8) в (2.4) характеристическая матрица $C$ представится в области (I.II) асимптотическим равенством

$$C=C+\frac{B}{kr_1}\left[1+O\left(\frac{1}{kr_1}\right)\right], \qquad (2.9)$$

при этом $C'$ – характеристическая матрица плоско-параллельного слоя. Поправка на кривизну в этом случае будет определяться матрицей $B$, элементы которой выражаются соотношениями

$$b_{11}=\mu(\varrho\eta^2)^{-1}\Big[\alpha^{-3}(1-3\alpha^2)S_\alpha+\alpha^{-2}(3\alpha^2-1)khC_\alpha+\alpha^{-1}k^2h^2S_\alpha+$$
$$+(2\beta^3)^{-1}(g-g\beta^2+4\beta^4)S_\beta-(2\beta^2)^{-1}(1+\beta^2)gkhC_\beta-(2\beta)^{-1}gk^2h^2S_\beta\Big],$$

$$b_{12}=\mu(\varrho\eta^2)^{-1}\Big[2C_\alpha-(2\alpha^3)^{-1}(3\alpha^2-1)gkhS_\alpha-(2\alpha^2)^{-1}gk^2h^2C_\alpha-$$
$$-2C_\beta+\beta^{-1}(1+\beta^2)khS_\beta+k^2h^2C_\beta\Big],$$

$$b_{13}=(2\varrho\eta^2)^{-1}kh\Big[\alpha^{-3}(3\alpha^2-1)S_\alpha+\alpha^{-2}khC_\alpha-\beta^{-1}(1+\beta^2)S_\beta-khC_\beta\Big],$$

$$b_{14}=(2\varrho\eta^2)^{-1}\Big[\alpha^{-3}(\alpha^2-1)S_\alpha-\alpha^{-2}(3\alpha^2-1)khC_\alpha-\alpha^{-1}k^2h^2S_\alpha+$$
$$+\beta^{-3}(\beta^2-1)S_\beta+\beta^{-2}(1+\beta^2)khC_\beta+\beta^{-1}k^2h^2S_\beta\Big],$$

$$b_{21}=\mu(\varrho\eta^2)^{-1}\Big[-2C_\alpha+\alpha^{-1}(1+\alpha^2)khS_\alpha+k^2h^2C_\alpha+2C_\beta-$$
$$-(2\beta^3)^{-1}(3\beta^2-1)gkhS_\beta-(2\beta^2)^{-1}gk^2h^2C_\beta\Big],$$

$$b_{22}=\mu(\varrho\eta^2)^{-1}\Big[(2\alpha^3)^{-1}(g-g\alpha^2+4\alpha^4)S_\alpha-(2\alpha^2)^{-1}(1+\alpha^2)gkhC_\alpha-$$

$$-(2\alpha)^{-1} g k^2 h^2 S_\alpha - \beta^{-3}(3\beta^2-1)S_\beta - (2\alpha^2)^{-1}(1+\alpha^2) g kh C_\alpha -$$

$$-(2\alpha)^{-1} g k^2 h^2 S_\alpha],$$

$$b_{23} = (2\rho h^2)^{-1}\left[\alpha^{-3}(\alpha^2-1)S_\alpha + \alpha^{-2}(1+\alpha^2) kh C_\alpha + \alpha^{-1} k^2 h^2 S_\alpha + \right.$$

$$\left. + \beta^{-3}(\beta^2-1)S_\beta - \beta^{-2}(3\beta^2-1) kh C_\beta - \beta^{-1} k^2 h^2 S_\beta\right],$$

$$b_{24} = (2\rho h^2)^{-1} kh\left[-\alpha(1+\alpha^2)S_\alpha - kh C_\alpha + \beta^{-3}(3\beta^2-1)S_\beta + \beta^{-2} kh C_\beta\right],$$

$$b_{31} = \mu^2(\rho h^2)^{-1} kh\left[2\alpha^{-1}(1+3\alpha^2)S_\alpha + 2 kh C_\alpha - \right.$$

$$\left. -(2\beta^3)^{-1} g(8\beta^2+\beta^2 g - g) S_\beta - (2\beta^2)^{-1} g^2 K h C_\beta\right],$$

$$b_{32} = \mu^2(\rho h^2)^{-1}\left[\alpha^{-3}(g+4\alpha^4-3\alpha^2 g)S_\alpha - \alpha^{-2}(1+3\alpha^2) g kh C_\alpha - \right.$$

$$-\alpha^{-1} g k^2 h^2 S_\alpha + \beta^{-3}(g+4\beta^4-3\beta^2 g)S_\beta + \beta^{-2}(8\beta^2+\beta^2 g - g) kh C_\beta +$$

$$\left. + \beta^{-1} g k^2 h^2 S_\beta\right],$$

$$b_{33} = \mu(\rho h^2)^{-1}\left[\alpha^{-3}(3\alpha^2-1)S_\alpha + \alpha^{-2}(3\alpha^2+1) kh C_\alpha + \alpha^{-1} k^2 h^2 S_\alpha + \right.$$

$$\left. +(2\beta^3)^{-1}(g\beta^2 - g - 4\beta^4)S_\beta + (2\beta^2)^{-1}(g - g\beta^2 - 8\beta^3) kh C_\beta - (2\beta)^{-1} g k^2 h^2 S_\beta\right],$$

$$b_{34} = \mu(\rho h^2)^{-1}\left[-2C_\alpha - \alpha^{-1}(3\alpha^2+1) kh S_\alpha - k^2 h^2 C_\alpha + 2C_\beta - \right.$$

$$\left. -(2\beta^3)^{-1}(g - g\beta^2 - 8\beta^2) kh S_\beta + (2\beta^2)^{-1} g k^2 h^2 C_\beta\right],$$

$$b_{41} = \mu^2(\rho h^2)^{-1}\left[\alpha^{-3}(g+4\alpha^4-3\alpha^2 g)S_\alpha + \alpha^{-2}(\alpha^2 g - g + 8\alpha^2) kh C_\alpha + \right.$$

$$\left. + \alpha^{-1} g k^2 h^2 S_\alpha + \beta^{-3}(g+4\beta^4-3\beta^2 g)S_\beta - \beta^{-2} g(3\beta^2+1) kh C_\beta - \beta^{-1} g k^2 h^2 S_\beta\right],$$

$$b_{42} = \mu^2(\rho h^2)^{-1} kh\left[2\beta^{-1}(1+3\beta^2)S_\beta + 2kh C_\beta - (2\alpha^3)^{-1} g(8\alpha^2+\alpha^2 g - g)S_\alpha - \right.$$

$$\left. -(2\alpha^2)^{-1} g^2 kh C_\alpha\right],$$

$$b_{43}=\mu(\rho h^2)^{-1}\Big[2C_\alpha-(2\alpha^3)^{-1}(g-g\alpha^2-8\alpha^2)kh\,S_\alpha+$$
$$+(2\alpha^2)^{-1}gk^2h^2C_\alpha-2C_\beta-\beta^{-1}(3\beta^2+1)kh\,S_\beta-k^2h^2C_\beta\Big],$$
$$b_{44}=\mu(\rho h^2)^{-1}\Big[(2\alpha^3)^{-1}(g\alpha^2-g-4\alpha^4)S_\alpha+$$
$$+(2\alpha^2)^{-1}(g-g\alpha^2-8\alpha^2)khC_\alpha-(2\alpha)^{-1}gk^2h^2S_\alpha+$$
$$+\beta^{-3}(3\beta^2-1)S_\beta+\beta^{-2}(3\beta^2+1)khC_\beta+\beta^{-1}k^2h^2S_\beta\Big].$$

## § 3. Характеристическая матрица слабо искривленного сферического слоя в случае меридиональных волн

Пусть в сферической системе координат $r,\theta,\varphi$ задан однородный изотропный упругий слой $r_1<r<r_2$, который характеризуется плотностью $\rho$ и коэффициентами $\lambda$ и $\mu$. Предполагается, что вектор смещений в этом слое не зависит от азимутальной координаты $\varphi$ и не содержит азимутальной компоненты. Поле смещений и напряжений в таком слое представляется формулами

$$
\begin{aligned}
u_\theta&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}P_n^1(\cos\theta)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}U_\theta(n,h,r)\,e^{kth}\,dh,\\
u_r&=\frac{\sqrt{N}}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}U_r(n,h,r)\,e^{kth}\,dh,\\
t_{r\theta}&=\frac{k}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}P_n^1(\cos\theta)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}T_{r\theta}(n,h,r)\,e^{kth}\,dh,\\
t_{rr}&=\frac{k\sqrt{N}}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}T_{rr}(n,h,r)\,e^{kth}\,dh,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

в которых $P_n^i(\cos\theta)$ – функция Лежандра и $N=n(n+1)$. Связь между значениями матрицы

$$W=(U_\theta,U_r,T_{r\theta},T_{rr})^T \tag{3.2}$$

при $r=r_1$ и $r=r_2$ дается формулой (1.3), где $C$ – характеристическая матрица рассматриваемого сферического слоя.

Эта матрица на основании уравнения Ламе и закона Гука представляется равенством

$$C=\frac{i\pi v_p v_s}{\rho h^3}\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\,C_1C_2C_3, \tag{3.3}$$

в котором

$$C_1=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{N}}{k r_2} & 0 & \frac{1}{2kr_2} & -\frac{ih}{v_s} \\ -\frac{1}{2kr_2} & -\frac{ih}{v_p} & \frac{\sqrt{N}}{kr_2} & 0 \\ -\frac{3\mu\sqrt{N}}{k^2r_2^2} & -\frac{i2\mu h\sqrt{N}}{kr_2 v_p} & \rho h^2+\frac{\mu(2N-1)}{k^2r_2^2} & \frac{i2\mu h}{kr_2 v_s} \\ \rho h^2+\frac{2\mu(N+1)}{k^2r_2^2} & i\frac{4\mu h}{kr_2 v_p} & -\frac{3\mu\sqrt{N}}{k^2r_2^2} & -\frac{i2\mu h\sqrt{N}}{kr_2 v_s} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$C_2=\left[\begin{pmatrix} x_1H^x_{01}, & -x_1H^x_{00} \\ x_1H^x_{11}, & -x_1H^x_{10}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1H^y_{01}, & -y_1H^y_{00} \\ y_1H^y_{11}, & -y_1H^y_{10}\end{pmatrix}\right] \tag{3.5}$$

$$C_3=\begin{pmatrix} -\frac{2\mu h\sqrt{N}}{kr_1 v_p v_s} & \frac{4\mu h}{kr_1 v_p v_s} & 0 & \frac{h}{v_p v_s} \\ -\frac{i3\mu\sqrt{N}}{k^2r_1^2 v_s} & \frac{i}{v_s}\left[\rho h^2+\frac{2\mu(N+1)}{k^2r_1^2}\right] & -\frac{i\sqrt{N}}{v_s k r_1} & \frac{i}{2kr_1 v_s} \\ \frac{2\mu h}{kr_1 v_p v_s} & -\frac{2\mu h\sqrt{N}}{kr_1 v_p v_s} & \frac{h}{v_p v_s} & 0 \\ \frac{i}{v_p}\left[\rho h^2+\frac{\mu(2N-1)}{k^2r_1^2}\right] & -\frac{i3\mu\sqrt{N}}{k^2r_1^2 v_p} & -\frac{i}{2kr_1 v_p} & -\frac{i\sqrt{N}}{kr_1 v_p} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Входящие в (3.5) величины $H^x_{00}, H^x_{01}, H^x_{10}, H^x_{11}, H^y_{00}, H^y_{01}, H^y_{10}$ и $H^y_{11}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} H^x_{00}&=H^{(1)}_{n+0.5}(x_2)H^{(2)}_{n+0.5}(x_1)-H^{(2)}_{n+0.5}(x_2)H^{(1)}_{n+0.5}(x_1), \\ H^x_{01}&=H^{(1)}_{n+0.5}(x_2)H^{(2)\prime}_{n+0.5}(x_1)-H^{(2)}_{n+0.5}(x_2)H^{(1)\prime}_{n+0.5}(x_1), \\ H^x_{10}&=H^{(1)\prime}_{n+0.5}(x_2)H^{(2)}_{n+0.5}(x_1)-H^{(2)\prime}_{n+0.5}(x_2)H^{(1)}_{n+0.5}(x_1), \\ H^x_{11}&=H^{(1)\prime}_{n+0.5}(x_2)H^{(2)\prime}_{n+0.5}(x_1)-H^{(2)\prime}_{n+0.5}(x_2)H^{(1)\prime}_{n+0.5}(x_1), \end{aligned} \tag{3.7}$$

а также равенствами, которые получаются из формул (3.7) путем замены $x$ на $y$. Для величин $x_i, y_i (i=1,2)$, $v_p$ и $v_s$ справедливы выражения (2.5).

Чтобы перейти к слабо искривленному слою, удовлетворяющему условию (I.II), необходимо использовать асимптотическое равенство (2.7) и соотношение $n+0,5=\kappa r_1$ , вытекающее из асимптотической формулы

$$P_n^i(\cos\theta)=n^{-i-0,5}\sqrt{\frac{2}{\pi\cos\theta}}\cos\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]. \quad (3.8)$$

Равенства (2.5),(2.7) и (3.7) позволяют вывести соотношения (2.8), а также формулы, которые получаются из (2.8) путем замены $x$ и $\alpha$ соответственно на $y$ и $\beta$ .

С учетом формул (2.8) характеристическая матрица $C$ представляется в области (I.II) асимптотическим равенством

$$C=C'+\frac{A+B}{\kappa r_1}\left[1+O\left(\frac{1}{\kappa r_1}\right)\right], \quad (3.9)$$

в котором $C'$ – характеристическая матрица плоско-параллельного слоя, а матрицы $A$ и $B$ определяются формулами (I.I6)-(I.I8) и (2.I0).

## § 4. Характеристическая матрица произвольного слабо искривленного слоя

Сопоставление формул (I.I5),(2.9) и (3.9) для слабо искривленных цилиндрических и сферических слоев приводит, как и в работе [I] , к выводу, что характеристическая матрица слабо искривленного произвольного слоя определяется формулой

$$C=C'+\frac{A}{\kappa R_1}+\frac{B}{\kappa R_2}, \quad (4.I)$$

в которой $R_2$ и $R_1$ – радиусы кривизны слоев соответственно в направлении распространения волны и в перпендикулярном направлении. Выражения для характеристической матрицы $C'$ плоско-параллельного слоя и поправочных матриц $A$ и $B$ даются формулами (I.I6)-(I.I8) и (2.I0).

Условия применимости равенства (4.I) определяются неравенством (I.II) и условиями

$$h \ll R_1, \quad h \ll R_2 \quad (4.2)$$

тонкости слоя по сравнению с радиусами кривизны. Кроме того, следует отметить, что формула (4.I) соответствует двумерному распространению волн в слабо искривленном упругом слое, в котором производная от радиусов кривизны $R_1$ и $R_2$ вдоль границ порядка $(\kappa R_1)^{-1}$ и $(\kappa R_2)^{-1}$ [I] .

Сравнение равенства (4.I) настоящей работы и соотношения (3.7) статьи [I] дает возможность записать для поправочных матриц $A$ и $B$ также и другие соотношения

$$A = \frac{\bar{A}\kappa h}{1!} + \frac{\bar{A}\varkappa + \varkappa\bar{A}}{2!}\kappa^2 h^2 + $$
$$+ \frac{\bar{A}\varkappa^2 + \varkappa\bar{A}\varkappa + \varkappa^2\bar{A}}{3!}\kappa^3 h^3 + \dots ,$$
$$B = \frac{\bar{B}\kappa h}{1!} + \frac{\bar{B}\varkappa + \varkappa\bar{B}}{2!}\kappa^2 h^2 + \tag{4.3}$$
$$+ \frac{\bar{B}\varkappa^2 + \varkappa\bar{B}\varkappa + \varkappa^2\bar{B}}{3!}\kappa^3 h^3 + \dots +$$
$$+ \frac{H\kappa^2 h^2}{2!} + \frac{(\varkappa H + 2H\varkappa)\kappa^3 h^3}{3!} +$$
$$+ \frac{(\varkappa^2 H + 2\varkappa H\varkappa + 3H\varkappa^2)\kappa^4 h^4}{4!} + \dots ,$$

в которых

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & -g & -1 & 0 \\ -g & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & -a & -2 & 0 \\ -a & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix},$$
$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \varkappa = \begin{pmatrix} 0 & -1 & d & 0 \\ b & 0 & 0 & c \\ \rho\gamma^2 + a & 0 & 0 & -b \\ 0 & \rho\gamma^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$a = \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu},\ b = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu},\ c = \frac{1}{\lambda+2\mu},\ d = \frac{1}{\mu},\ g = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}. \tag{4.5}$$

Сравнение членов с низшими степенями $\kappa h$ в формулах (4.3) подтверждает справедливость равенств (4.3).

## Литература


1. Молотков Л.А. О характеристических матрицах слабо искривленных упругих слоев. - Зап.научн.сем.ЛОМИ, 1980, т.99, с.74-84.

2. М о л о т к о в Л.А. Об интерференционных волнах в свободном неоднородном упругом слое. - Зап.научн.сем.ЛОМИ, 1973, т.34, с.117-141.

3. М о л о т к о в Л.А. О низкочастотных волнах в неоднородных упругих цилиндрических и сферических слоях, окруженных средой. - Вопросы динам.теор.распр.сейсм.в., 1973, вып.13, с.15-39.

4. В а т с о н Г.Н. Теория бесселевых функций, ч.I, М., 1949, 799 с.

Molotkov L.A. A finite expression of characteristic matrices of slightly bent elastic layers.

The wave propagation in the two dimension medium is investigated in the case of the cylindrical and spherical homogeneous elastic layers. For these layers the finite expressions of characteristic matrices are deduced. The comparision of these expressions and the use of Hankel function asymptotics allow to derive the formulas for slightly bent elastic layers. These finite formulas correspond to the recently obtained expressions with matrix series [1] .