Х. Абдуваитов, Некоторые достаточные условия существования периодических и ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, *Дифференц. уравнения*, 1985, том 21, номер 12, 2027–2036

https://www.mathnet.ru/de5721

ДЕКАБРЬ 1985 г., ТОМ XXI, № 12

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93

Х. АБДУВАИТОВ

НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$x''=f(t, x, x'). \tag{1}$$

Функция f предполагается непрерывной по совокупности переменных (t, x, x') и удовлетворяющей условиям:

(i) существует непрерывная и дифференцируемая на интервалах (a, c) и (c, b) функция $\alpha(x)>r>0$, такая, что при всех $t\in R^1$, $x\in(a, b)$ и $x\neq c$

$$\left[\frac{d\alpha(x)}{dx}-\frac{f(t, x, \alpha(x))}{\alpha(x)}\right](x-c)<0;$$

(ii) существует непрерывная и дифференцируемая на интервалах (a, d) и (d, b) функция $\beta(x)<\rho<0$, такая, что при всех $t\in R^1$, $x\in(a, b)$ и $x\neq d$

$$\left[\frac{d\beta(x)}{dx}-\frac{f(t, x, \beta(x))}{\beta(x)}\right](x-d)>0.$$

В дальнейшем будет показано, что условия (i) и (ii) обеспечивают оценку сверху и снизу соответственно для производной ограниченного решения уравнения (1), удовлетворяющего неравенствам $a\leqslant x(t)\leqslant b$, $t\in R^1$. А именно $N\leqslant x'(t)\leqslant M$, где

$$N=\inf\{\beta(x) : x\in(a, b),\ x\neq d\},\quad M=\sup\{\alpha(x) : x\in(a, b),\ x\neq c\}.$$

Условие (i) будет выполнено, если, например, для некоторых чисел $y_0>0$ и $y_1>0$ $f(t, x, y_0)>0$ при $c<x<b$ и $f(t, x, y_1)<0$ при $a<x<c$, или если существует непрерывная на некотором промежутке $[A, B]$ $(0<A<B<\infty)$ функция $\varphi(y)>0$, такая, что

$$\int_A^B \frac{y}{\varphi(y)}\,dy>b-a \tag{2}$$

и при всех $A<y<B$ и $t\in R^1$

$$f(t, x, y)>-\varphi(y)\ (c<x<b) \text{ и } f(t, x, y)<\varphi(y)\quad (a<x<c). \tag{3}$$

Действительно, в первом случае в качестве функции $\alpha(x)$ можно взять функцию

$$\alpha(x)=\begin{cases} y_1, & a<x<c,\\ y_0, & c<x<b.\end{cases}$$

Во втором случае в качестве $\alpha(x)$ можно взять решение задачи $d\alpha/dx=-\varphi(\alpha)/\alpha$, $\alpha(c)=B$, если $c<x<b$, и решение задачи $d\alpha/dx=\varphi(\alpha)/\alpha$, $\alpha(c)=B$, если $a<x<c$. Используя условие (2), нетрудно проверить, что выбранная таким образом функция $\alpha(x)$ удовлетворяет неравенству $\alpha(x)>A>0$ при $x\in(a, b)$. Выполнение условия (i) следует из неравенств (3).

Аналогично можно указать примеры, когда выполнено условие (ii). В частности, условия (i) и (ii) будут выполнены, если рассмотреть частный случай уравнения (1) — обобщенное уравнение Льенара

$$x''+g(x)x'+f(t, x)=e(t). \tag{4}$$

Пусть правая часть уравнения (1) ω-периодическая по t и представлена в виде $f(t, x, x')=g(t, x, x')+e(t)$, где функции g и e ω-периодические по t.

Теорема 1. *Пусть заданы числа* $a<a_1<b_1<b$ *и* $c, d\in[a, b]$. *Пусть функции* $g(t, x, y)$ *и* $e(t)$ ω*-периодические по* t *и при всех* $0\leqslant\lambda\leqslant1$ *функции* $g(t, x, y)+\lambda e(t)$ *удовлетворяют условиям* (i) *и* (ii). *Пусть, кроме того, выполнены условия:*

1) *существуют функции* $\delta(x)\neq0$ *и* $\gamma(x)\neq0$, *непрерывные и дифференцируемые на отрезках* $[a, a_1]$ *и* $[b, b_1]$ *соответственно, такие, что*

$$\int_a^{a_1}\frac{dx}{|\delta(x)|}>\omega,\quad \int_{b_1}^{b}\frac{dx}{|\gamma(x)|}>\omega \text{ и при всех } 0\leqslant t\leqslant\omega \text{ и } 0\leqslant\lambda\leqslant1$$

$$\delta(x)\,\frac{d\delta(x)}{dx}>g(t, x, \delta(x))+\lambda e(t),\quad a\leqslant x\leqslant a_1,$$

$$\gamma(x)\,\frac{d\gamma(x)}{dx}<g(t, x, \gamma(x))+\lambda e(t),\quad b_1\leqslant x\leqslant b;$$

2) *функция* $g(t, x, 0)\neq0$ *при* $a\leqslant x\leqslant a_1$ *и* $b_1\leqslant x\leqslant b$, *выполнено неравенство* $g(t, a, 0)g(t, b, 0)<0$ *и уравнение*

$$x''=g(t, x, x')+\lambda e(t)$$

ни при каком $\lambda\in[0, 1]$ *не имеет* ω*-периодических решений, удовлетворяющих условию* $\min\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega} x(t)=a$ *и* $x(t)<a_1$, $t\in[0, \omega]$, *или условию* $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega} x(t)=b$ *и* $x(t)>b_1$, $t\in[0, \omega]$.

Тогда уравнение (1) имеет ω*-периодическое решение, которое удовлетворяет неравенствам*

$$a\leqslant x(t)\leqslant b,\quad N\leqslant x'(t)\leqslant M. \tag{5}$$

Рассмотрим уравнение (4), где функции $f(t, x)$ и $e(t)$ будем предполагать ω-периодическими по t и $\int\limits_0^{\omega} e(t)dt=0$. Применение теоремы 1 к уравнению (4) позволяет установить следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $f(t, x)$ *и* $e(t)$ — ω*-периодические по* t *и* $\int\limits_0^{\omega} e(t)dt=0$. *Пусть* $f(t, x)x\geqslant0$ *при* $|x|\geqslant K$ *и существуют числа* $p>k>0$, *такие, что при* $|x|\geqslant K$

$$|g(x)|>f(t, x)/kx+p. \tag{6}$$

Тогда уравнение (4) имеет ω*-периодическое решение.*

Теорема 2 обобщает результат работы [1], где доказано существование периодического решения уравнения (4) при дополнительных предположениях: $g(x)\equiv\text{const}$ и $f(t, x)/x\to0$ при $x\to\infty$. Она примыкает также к результату работы [2], где при $\omega=1$ доказано существование *1-*

периодического решения уравнения (4) при выполнении одного из следующих условий:

1) $f(t, x)x \geqslant 0$ при $|x| \geqslant K$ и $\lim\limits_{|x|\to\infty} \sup\limits_{t} \dfrac{f(t, x)}{x} < \dfrac{4\pi^2}{2\pi+1}$;

2) $f(t, x)x \leqslant 0$ при $|x| \geqslant K$.

Условия 1) и 2) теоремы 1 выполнены, если, например, $f(t, a, 0) < 0$ и $f(t, b, 0) > 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant \omega$. Поэтому теорема 1 остается верной и в том случае, если условия 1) и 2) заменить условиями $f(t, a, 0) < 0$ и $f(t, b, 0) > 0$, $0 \leqslant t \leqslant \omega$. Более того, справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть заданы числа $a < b$ и c, $d \in [a, b]$. Пусть функция f удовлетворяет условиям (i), (ii) и, кроме того, $f(t, a, 0) \leqslant 0$ и $f(t, b, 0) \geqslant 0$ при всех t.*

Тогда уравнение (1) имеет ограниченное на $(-\infty, \infty)$ решение, которое удовлетворяет неравенствам (5) при всех $t \in R^1$.

Если $f(t, x, y)$ — ω-периодическая по t, то уравнение (1) имеет ω-периодическое решение, удовлетворяющее неравенствам (5).

Применим теорему 3 к уравнению (4).

Теорема 4. *Пусть заданы числа a и b $(a < b)$. Пусть при всех $t \in R^1$ $e(t) \leqslant f(t, a)$ и $e(t) \geqslant f(t, b)$.*

Тогда уравнение (4) имеет ограниченное на $(-\infty, \infty)$ решение, удовлетворяющее неравенству

$$a \leqslant x(t) \leqslant b. \tag{7}$$

Если $f(t, x)$ и $e(t)$ ω-периодические по t, то уравнение (4) имеет ω-периодическое решение, удовлетворяющее неравенству (7).

Теорема 4 также примыкает к результатам работы [2]. Говоря о теореме 3, следует упомянуть работу [3], результат которой в скалярном случае следует из теоремы 3 и формулируется следующим образом: уравнение (1) имеет периодическое решение в предположении $f(t, x, y)x \geqslant 0$ при $|x| \geqslant K$ и всех $y \in R^1$ и функция $f(t, x, y)$ не более квадратичного роста относительно y.

2. Априорные оценки. Лемма 1. *Пусть выполнено условие (i). Пусть $x(t)$ — ограниченное решение уравнения (1), удовлетворяющее неравенству $a \leqslant x(t) \leqslant b$, $t \in R^1$.*

Тогда производная $x'(t)$ удовлетворяет оценке сверху

$$x'(t) \leqslant M, \quad t \in R^1, \tag{8}$$

где $M = \sup \{\alpha(x) : x \in (a, b), \ x \neq c\}$.

Доказательство. Предположим, что производная $x'(t)$ не удовлетворяет неравенству (8). Тогда существует t_0, такое, что $x'(t_0) > M$. Возможны два случая: $x(t_0) \geqslant c$ и $x(t_0) < c$.

Пусть сначала $x(t_0) \geqslant c$. Так как $x'(t) > M > 0$, то при $t > t_0$ и близких к t_0 $x(t) > x(t_0)$ и $x'(t) > \alpha(x(t))$. Пусть

$$t_1 = \sup \{t > t_0 : x(\tau) < b, \ x'(\tau) > \alpha(x(\tau)), \ t_0 < \tau < t\}.$$

Очевидно $t_1 < \infty$, так как при $t_0 < t < t_1$ $x'(t) > \alpha(x(t)) > r > 0$. В интервале (t_0, t_1) функция $x(t)$ строго возрастает, поэтому система

$$x = x(t), \quad y = x'(t) \tag{9}$$

определяет y в интервале $x(t_0) < x < x(t_1)$ как однозначную дифференцируемую функцию от $x : y = \gamma(x)$. Причем производная этой функции может быть найдена по формуле

$$\left.\frac{d\gamma}{dx}\right|_{x=x(t)} = f(t, x(t), x'(t))/x'(t). \tag{10}$$

Так как $x'(t) > \alpha(x(t))$ при $t_0 < t < t_1$, то $\gamma(x) > \alpha(x)$ при $x(t_0) < x < x(t_1)$. Поэтому если $x'(t_1) = \alpha(x(t_1))$, то $\left.\dfrac{d\gamma}{dx}\right|_{x=x(t_1)} \leqslant \left.\dfrac{d\alpha}{dx}\right|_{x=x(t_1)}$.

С другой стороны, в силу условия (i)

$$\left.\frac{d\gamma}{dx}\right|_{x=x(t_1)}-\frac{f(t_1,\, x(t_1),\, \alpha(x(t_1)))}{\alpha(x(t_1))}>\left.\frac{d\alpha}{dx}\right|_{x=x(t_1)}.$$

Следовательно, $x'(t_1)\neq\alpha(x(t_1))$ и поэтому $x(t_1)=b$ и $x'(t_1)>r>0$. Но тогда при $t>t_1$ и близких к t_1 $x(t)>b$. Это противоречит условию леммы.

Пусть теперь $x(t_0)<c$. Пусть $t_2=\inf\{t<t_0 : x(\tau)>a,\ x'(\tau)>\alpha(x(\tau)),\ t<\tau<t_0\}$. Очевидно $t_2>-\infty$. В интервале $(t_2,\, t_0)$ функция $x(t)$ строго возрастает, поэтому система (9) определяет y как однозначную дифференцируемую функцию от $x : y=\gamma(x)$. Причем производная этой функции может быть найдена по формуле (10). Так как $x'(t)>\alpha(x(t))$ при $t_2<t<t_0$, то $\gamma(x)>\alpha(x)$ при $x(t_2)<x<x(t_0)$. Поэтому если $x'(t_2)=$ $=\alpha(x(t_2))$, то $\left.\frac{d\gamma}{dx}\right|_{x=x(t_2)}\geqslant\left.\frac{d\alpha}{dx}\right|_{x=x(t_2)}$. С другой стороны, в силу условия (i)

$$\left.\frac{d\gamma}{dx}\right|_{x=x(t_2)}=\frac{f(t_2,\, x(t_2),\, \alpha(x(t_2)))}{\alpha(x(t_2))}<\left.\frac{d\alpha}{dx}\right|_{x=x(t_2)}.$$

Следовательно, $x'(t_2)\neq\alpha(x(t_2))$ и поэтому $x(t_2)=a$ и $x'(t_2)\geqslant r>0$, что невозможно, так как $x(t)\geqslant a$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие (ii). Пусть $x(t)$ — ограниченное решение уравнения (1), удовлетворяющее неравенству $a\leqslant x(t)\leqslant b$, $t\in R^1$.*

Тогда производная $x'(t)$ удовлетворяет оценке снизу $x'(t)\geqslant N$, $t\in R^1$, где $N=\inf\{\beta(x) : x\in(a,\, b),\, x\neq d\}$.

Доказательство основано на лемме 1. Пусть $x(t)$ — указанное в условии леммы ограниченное решение уравнения (1). Тогда $z(t)=x(-t)$ есть ограниченное решение уравнения $z''=g(t,\, z,\, z')$, где $g(t,\, z,\, z')=$ $=f(-t,\, z,\, -z')$. Полагая $c=d$, $r=-p$, $\alpha(z)=-\beta(z)$, $M=-N$, нетрудно проверить, что функция $g(t,\, z,\, z')$ удовлетворяет всем условиям леммы 1. Поэтому $z'(t)\leqslant -N$, $t\in R^1$. Отсюда $x'(t)\geqslant N$, $t\in R^1$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть существует непрерывная и дифференцируемая на отрезке $[b_1,\, b]$ функция $\gamma(x)\neq 0$, такая, что $\int\limits_{b_1}^{b}\frac{dx}{|\gamma(x)|}>\omega$ и при всех t*

$$\gamma(x)\,\frac{d\gamma(x)}{dx}<f(t,\, x,\, \gamma(x)),\quad b_1<x<b. \tag{11}$$

Тогда ω-периодическое решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega} x(t)=b$, удовлетворяет неравенству $x(t)>b_1$, $0\leqslant t\leqslant\omega$.

Доказательство. Допустим, что $x(t)$ — такое ω-периодическое решение уравнения (1), что $x(t_0)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega} x(t)=b$ и $x(t_1)=b_1$. Очевидно, точки t_1 и t_0 можно считать такими, что $t_1<t_0$ и $b_1<x(t)<b$ при $t_1<$ $<t<t_0$.

Пусть сначала $\gamma(x)>0$ $(b_1\leqslant x\leqslant b)$. Тогда $x'(t_0)=0<\gamma(x(t_0))$. Покажем, что $x'(t)<\gamma(x(t))$ при всех $t_1<t<t_0$.

Пусть при некотором $t_2\in(t_1,\, t_0)$ $x'(t_2)=\gamma(x(t_2))$. Можно считать t_2 таким, что $x'(t)<\gamma(x(t))$ при $t_2<t<t_0$. Так как $x'(t_2)>0$, то в некоторой окрестности $(\tau_1,\, \tau_2)\subset[t_1,\, t_0]$ точки t_2 $x'(t)>0$. Поэтому система $x=x(t)$, $y=x'(t)$ определяет y в интервале $x(\tau_1)<x<x(\tau_2)$ как однозначную дифференцируемую функцию от $x : y=\alpha(x)$. Причем производная этой функции может быть найдена по формуле

$$\left.\frac{d\alpha}{dx}\right|_{x=x(t)}=\frac{f(t,\, x(t),\, x'(t))}{x'(t)}.$$

Так как $x'(t)<\gamma(x(t))$ при $t_2<t<t_0$ и $x'(t_2)=\gamma(x(t_2))$, то $\alpha(x)<<\gamma(x)$ при $x(t_2)<x<x(\tau_2)$ и $\alpha(x(t_2))=\gamma(x(t_2))$. Поэтому $\left.\frac{d\alpha}{dx}\right|_{x=x(t_2)}\leqslant\left.\frac{d\gamma}{dx}\right|_{x=x(t_2)}$. С другой стороны, в силу условия (11)

$$\left.\frac{d\gamma}{dx}\right|_{x=x(t_2)}=\frac{f(t_2,\ x(t_2),\ \gamma(x(t_2)))}{\gamma(x(t_2))}>\left.\frac{d\gamma}{dx}\right|_{x=x(t_2)}.$$

Следовательно, $x'(t_2)\neq\gamma(x(t_2))$ ни при каком $t_2 \in (t_1,\ t_0)$. Поэтому

$$x'(t)<\gamma(x(t)),\quad t_1<t<t_0. \tag{12}$$

Заметим, что правая часть последнего неравенства положительна. Поэтому, разделив обе части неравенства (12) на $\gamma(x(t))$ и проинтегрировав от t_1 до t_0, получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_0}\frac{x'(t)dt}{\gamma(x(t))}<t_0-t_1.$$

Или, учитывая, что $x(t_1)=b_1$, $x(t_0)=b$ и $t_0-t_1<\omega$, получим $\int\limits_{b_1}^{b}\frac{dx}{\gamma(x)}<\omega$. Это неравенство противоречит условию леммы.

Случай $\gamma(x)<0$ $(b_1\leqslant x\leqslant b)$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть существует непрерывная и дифференцируемая на некотором отрезке $[a,\ a_1]$ функция $\delta(x)\neq 0$, такая, что $\int\limits_{a}^{a_1}\frac{dx}{|\delta(x)|}>\omega$ и при всех t*

$$\delta(x)\,\frac{d\delta(x)}{dx}>f(t,\ x,\ \delta(x)),\quad a<x<a_1.$$

Тогда ω-периодическое решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $\min\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}x(t)=a$, удовлетворяет неравенству $x(t)<a_1$.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — указанное в условии ω-периодическое решение. Тогда $z(t)=-x(t)$ — ω-периодическое решение уравнения $z''=g(t,\ z,\ z')$, где $g(t,\ z,\ z')=-f(t,\ -z,\ -z')$. Очевидно, $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}z(t)=-a$. Полагая $b_1=-a_1$, $b=-a$ и $\gamma(z)=-\delta(-z)$, нетрудно проверить, что функция $g(t,\ z,\ z')$ удовлетворяет условию леммы 3. Поэтому $z(t)>b_1$ при $0\leqslant t\leqslant\omega$. Следовательно, $x(t)<a_1$ при всех $0\leqslant t\leqslant\omega$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $f(t,\ x,\ 0)\neq 0$ при $c\leqslant x\leqslant d$. Тогда уравнение (1) не имеет ω-периодического решения, удовлетворяющего неравенству*

$$c\leqslant x(t)\leqslant d,\quad 0\leqslant t\leqslant\omega. \tag{13}$$

Доказательство. Предположим, что $x(t)$ — периодическое решение уравнения (1), удовлетворяющее неравенству (13). Пусть t_0 и t_1 такие, что $x(t_0)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}x(t)$ и $x(t_1)=\min\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}x(t)$. Тогда $x''(t_0)\leqslant 0$ и $x''(t_1)\geqslant 0$. С другой стороны, так как $x'(t_0)=x'(t_1)=0$, имеем $x''(t_0)==f(t_0,\ x(t_0),\ 0)\neq 0$ и $x''(t_1)=f(t_1,\ x(t_1),\ 0)\neq 0$. Причем $x''(t_0)$ и $x''(t_1)$ одного знака, так как $f(t,\ x,\ 0)\neq 0$ при $c\leqslant x\leqslant d$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

3. Вычисление вращения векторного поля. Пусть $C_{[0,\,\omega]}$ — пространство непрерывных на $[0,\ \omega]$ вектор-функций $\{x(t),\ y(t)\}$; $G=\{(x,\ y):a<x<b,\ |y|<M-N\}$; $\dot{G}$ — граница области G; $\bar{G}$ — замыкание области G; $\Omega=\{\{x(t),\ y(t)\}\in C_{[0,\,\omega]}:\{x(t),\ y(t)\}\in G,\ 0\leqslant t\leqslant\omega\}$; $\dot{\Omega}$ — граница области Ω в пространстве $C_{[0,\,\omega]}$.

В данном пункте будем считать выполненными все условия теоремы 1. Запишем уравнение (1) в виде системы

$$x'=y, \quad y'=g(t, x, y)+e(t), \tag{14}$$

где функции g и e те же, что и в формулировке теоремы 1. Отыскание ω-периодических решений системы (14) эквивалентно нахождению решений на отрезке $[0, \omega]$ системы

$$\begin{aligned} x(t) &= x(\omega)+\int_0^t y(s)\,ds, \\ y(t) &= y(\omega)+\int_0^t [g(s, x(s), y(s))+e(s)]\,ds. \end{aligned} \tag{15}$$

Обозначим $z(t)=\{x(t), y(t)\}$ и $F_0(t, z)=\{y, g(t, x, y)+e(t)\}$. Тогда система (15) запишется в виде $z(t)=z(\omega)+\int_0^t F_0(s, z(s))\,ds$.

Пусть $\{x(t), y(t)\}$ — ω-периодическое решение системы (14), такое, что $\{x(t), y(t)\}\in\bar{G}$ при всех t. Тогда $a\leqslant x(t)\leqslant b$ и в силу лемм 1 и 2 $N\leqslant y(t)\leqslant M$. Отсюда $|y(t)|<M-N$ при всех t. Если при некотором t_0 $x(t_0)=b$, то в силу леммы 3 $x(t)>b_1$ при всех t. Но в силу условия теоремы 1 уравнение (1), или, что то же самое, система (14), не имеет ω-периодических решений, удовлетворяющих условию $x(t_0)=b$ и $b_1<x(t)\leqslant b$ при всех t. Следовательно, $x(t)<b$ при всех t. Аналогично, используя лемму 4, можно показать, что $x(t)>a$ при всех t.

Таким образом, мы показали, что $\{x(t), y(t)\}\in G$ при всех t. Следовательно, система (14) не имеет ω-периодических решений, удовлетворяющих условиям $\{x(t), y(t)\}\in\bar{G}$ и $\{x(t_0), y(t_0)\}\in\dot{G}$ для некоторого t_0. Это равносильно тому, что система (15) не имеет решений на границе $\dot{\Omega}$ области Ω. Следовательно, на границе $\dot{\Omega}$ области Ω определено вращение векторного поля (см. [4])

$$\Phi_0 z(t)=z(t)-z(\omega)-\int_0^t F_0(s, z(s))\,ds. \tag{16}$$

Вычислим вращение поля (16) на $\dot{\Omega}$. Рассмотрим семейство систем

$$x'=y, \quad y'=g(t, x, y)+\lambda e(t), \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1, \tag{17}$$

и соответствующее ему семейство векторных полей

$$\Phi_\lambda z(t)=z(t)-z(\omega)-\int_0^t F_\lambda(s, z(s))\,ds, \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1, \tag{18}$$

где $F_\lambda(t, z)=\{y, g(t, x, y)+(1-\lambda)e(t)\}$. При $\lambda=0$ поле (18) совпадает с полем (16), а при $\lambda=1$ оно совпадает с полем

$$\Phi_1 z(t)=z(t)-z(\omega)-\int_0^t F_1(s, z(s))\,ds, \tag{19}$$

где $F_1(t, z)=\{y, g(t, x, y)\}$.

Так как условия теоремы 1 выполнены, то в силу лемм 1—4 система (17) ни при каком $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ не имеет ω-периодических решений, удовлетворяющих условиям: $\{x(t), y(t)\}\in\bar{G}$ и при некотором t_0 $\{x(t_0), y(t_0)\}\in\dot{G}$. Следовательно, на границе области Ω невырождено семейство векторных полей (18). Поэтому (см. [4]) поле (16) на $\dot{\Omega}$ гомотопно полю (19).

Рассмотрим семейство систем

$$x'=y,\ \ y'=g_\lambda(t,\ x,\ y),\ \ 1\leqslant\lambda\leqslant 2, \tag{20}$$

где $g_\lambda(t,\ x,\ y)=(2-\lambda)g(t,\ x,\ y)+(\lambda-1)g(0,\ x,\ y)$, и соответствующее ему семейство векторных полей

$$\Phi_\lambda z(t)=z(t)-z(\omega)-\int\limits_0^t F_\lambda(s,\ z(s))ds,\ \ 1\leqslant\lambda\leqslant 2, \tag{21}$$

где $F_\lambda(t,\ z)=\{y,\ g_\lambda(t,\ x,\ y)\}$.

Пусть $\{x_\lambda(t),\ y_\lambda(t)\}$ — ω-периодическое решение системы (20) при некотором $1\leqslant\lambda\leqslant 2$, такое, что $\{x_\lambda(t),\ y_\lambda(t)\}\in\bar{G}$ при всех t. Так как функция $g(t,\ x,\ y)$ удовлетворяет условиям (i) и (ii), то нетрудно проверить, что функция $g_\lambda(t,\ x,\ y)$ также удовлетворяет условиям (i) и (ii). Поэтому в силу лемм 1 и 2 $|y(t)|<M-N$ при всех t. Далее, так как функция $g(t,\ x,\ y)$ удовлетворяет условиям лемм 3, 4 и условию леммы 5 при $a\leqslant x\leqslant a_1$ и $b_1\leqslant x\leqslant b$, то нетрудно проверить, что функция $g_\lambda(t,\ x,\ y)$ также удовлетворяет условиям этих лемм. Поэтому если при некотором t_0 $x_\lambda(t_0)=b$, то в силу леммы 3 $x_\lambda(t)>b_1$ при всех t. С другой стороны, в силу леммы 5 система (20) не может иметь такого решения. Следовательно, $x_\lambda(t)<b$ при всех t. Аналогично можно показать, что $x_\lambda(t)>a$.

Таким образом, мы показали, что $\{x_\lambda(t),\ y_\lambda(t)\}\in G$ при всех t. Следовательно, система (20) ни при каком $1\leqslant\lambda\leqslant 2$ не имеет ω-периодических решений, удовлетворяющих условиям $\{x_\lambda(t),\ y_\lambda(t)\}\in\bar{G}$ и $\{x_\lambda(t_0),\ y_\lambda(t_0)\}\in\dot{G}$ при некотором t_0. Поэтому семейство полей (21) невырождено на $\dot{\Omega}$. А значит, поле (19) гомотопно полю

$$\Phi_2 z(t)=z(t)-z(\omega)-\int\limits_0^t F_2(s,\ z(s))ds. \tag{22}$$

Заметим, что функция F_2 не зависит от t. Поэтому $F_2(t,\ z)=F_2(z)$. Рассмотрим семейство полей $(2\leqslant\lambda\leqslant 3)$

$$\Phi_\lambda z(t)=z(t)-z(\omega)-(3-\lambda)\int\limits_0^t F_2(z(s))ds-(\lambda-2)\int\limits_0^\omega F_2(z(s))ds. \tag{23}$$

Пусть для некоторого $2\leqslant\lambda_0<3$ и $z_0(t)\in\dot{\Omega}$ $\Phi_{\lambda_0}z_0(t)\equiv 0$. Тогда при $t=\omega$ из (23) имеем $\int\limits_0^\omega F_2(z_0(s))ds=0$. Поэтому, полагая $t=0$, получим $z(0)=z(\omega)$. Считая продолженной функцию $z_0(t)$ ω-периодически на всю прямую, получим ω-периодическое решение уравнения $z'=(3-\lambda_0)F_2(z)$. Но тогда функция $z_1(t)=z_0(t/(3-\lambda_0))$ является $\omega(3-\lambda_0)$-периодическим решением уравнения $z'=F_2(z)$, или, что то же самое, системы

$$x'=y,\ \ y'=g(0,\ x,\ y). \tag{24}$$

Причем $z_1(t)=\{x_1(t),\ y_1(t)\}$ — такое решение системы (24), что $\{x_1(t),\ y_1(t)\}\in\bar{G}$ и при некотором t_0 $\{x_1(t_0),\ y_1(t_0)\}\in\dot{G}$. С другой стороны, так как функция $g(0,\ x,\ y)$ удовлетворяет условиям лемм 1 и 2, то $|y_1(t)|<M-N$. Далее, функция $g(0,\ x,\ y)$ удовлетворяет также условиям лемм 3 и 4, так как $\omega(3-\lambda_0)\leqslant\omega$, и условию леммы 5 при $a\leqslant x\leqslant a_1$ и $b_1\leqslant x\leqslant b$. Поэтому $a<x(t_1)<b$ при всех $0\leqslant t\leqslant\omega(3-\lambda_0)$. Мы получили противоречие тому, что $\{x_1(t_0),\ y_1(t_0)\}\in\dot{G}$. Следовательно, при $2\leqslant\lambda<3$ поле (23) невырождено на $\dot{\Omega}$.

Пусть теперь при $\lambda_0=3$ и $z_0(t)\in\dot{\Omega}$ $\Phi_{\lambda_0}z_0(t)\equiv 0$. Тогда из (23) имеем $z_0(t)-z_0(\omega)-(\lambda-2)\int\limits_0^\omega F_2(z(s))ds=0$. Полагая $t=\omega$, получим

$\int\limits_0^\omega F_2(z(s))ds=0$. Следовательно, $z_0(t)\equiv z_0(\omega)$. Значит, $F_2(z_0(\omega))=0$, причем $z_0(\omega)\in\dot G$, так как $z_0(t)\in\dot\Omega$. С другой стороны, вектор $\{y, g(0, x, y)\}$ на границе $\dot G$ не равен нулю, так как по условию теоремы 1 $g(0, a, 0)\neq 0$ и $g(0, b, 0)\neq 0$.

Таким образом, на $\dot\Omega$ ни одно из полей (23) невырождено. Поэтому поле (23) гомотопно полю

$$\Phi_3 z(t)=z(t)-z(\omega)-\int\limits_0^\omega F_2(z(s))ds. \tag{25}$$

Пусть $K_{[0,\omega]}$ — подпространство пространства $C_{[0,\omega]}$, состоящее из всех постоянных вектор-функций. Пусть оператор A определен формулой $Az(t)=z(\omega)+\int\limits_0^\omega F_2(z(s))ds$. Очевидно A действует из $C_{[0,\omega]}$ в $K_{[0,\omega]}$. Поэтому в силу известного свойства векторных полей (см. [4]) вращение поля (25) на $\dot\Omega$ равно вращению двумерного поля

$$\Phi_4 z=-\omega F_2(z),\quad z\in\dot G. \tag{26}$$

Вращение поля (26) на $\dot G$ отлично от нуля, так как по условию теоремы 1 $g(0, a, 0)\cdot g(0, b, 0)<0$. Следовательно, отлично от нуля вращение поля (16).

4. Доказательства теорем. Доказательство теоремы 1. В предыдущем пункте было показано, что на границе $\dot\Omega$ области Ω определено векторное поле (16). Показано также, что вращение поля (16) отлично от нуля. Теперь достаточно воспользоваться следующим принципом (см. [5]): если на замыкании $\overline{\Omega}$ некоторой области Ω определен вполне непрерывный оператор A без неподвижных точек на границе $\dot\Omega$ и вращение векторного поля $\Phi z=z-Az$ на $\dot\Omega$ отлично от нуля, то уравнение $z=Az$ имеет по крайней мере одно решение в области Ω. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем сначала теорему 2 в предположении $f(t, x)x>0$ при $|x|\geqslant K$. Покажем, что все условия теоремы 1 выполнены.

Пусть числа $b>b_1>K$ выбраны так, что $|\lambda e(t)/kx|<p-k$ при $x>b_1$ и $\int\limits_{b_1}^b \frac{dx}{kx}>\omega$. Положим $a=-b$ и $a_1=-b_1$. Числа c и d можно считать совпадающими с числом a или b. Условия (i) и (ii) очевидно выполнены. Полагая $\gamma(x)=-kx$, если $g(x)>0$ при $x>K$, и $\gamma(x)=kx$, если $g(x)<0$ при $x>K$, а также $\delta(x)=-kx$, если $g(x)>0$ при $x<-K$, и $\delta(x)=kx$, если $g(x)<0$ при $x<-K$, легко убедиться, что условие 1) теоремы 1 выполнено.

Чтобы убедиться в выполнимости условия 2) теоремы 1, достаточно проверить, что уравнение

$$x''+g(x)x'+f(t, x)=\lambda e(t) \tag{27}$$

ни при каком $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ не имеет ω-периодических решений, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x(t)\leqslant a_1$ или $b_1\leqslant x(t)\leqslant b$. Пусть ω-периодическая функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (27) и неравенству $b_1\leqslant$ $\leqslant x(t)\leqslant b$. Тогда, подставив $x(t)$ в (27) и проинтегрировав полученное тождество от 0 до ω, получим $\int\limits_0^\omega f(t, x(t))dt=0$. Это невозможно, так как при $x>M$ функция $f(t, x)>0$. Такое же противоречие можно получить, если $a\leqslant x(t)\leqslant a_1$. Следовательно, условие 2) теоремы 1 выполнено. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1. Следовательно, если $f(t, x)x>0$ при $|x|>K$, то уравнение (4) имеет ω-периодическое решение $x(t)$, удовлетворяющее неравенствам (5).

Пусть теперь $f(t, x)x\geqslant 0$ при $|x|\geqslant K$. Рассмотрим уравнение

$$x''+g(x)x'+f(t, x)+\varepsilon x=e(t), \tag{28}$$

где $0<\varepsilon<(p-k)k$. Пусть $p_1=p-\varepsilon/k$. Тогда $p_1>k$ и

$$|g(x)|>(f(t, x)+\varepsilon x)/kx+p_1 \tag{29}$$

при $|x|>K$, т. е. условие (6) выполнено и, кроме того, $f(t, x)x+\varepsilon x^2>0$. Поэтому уравнение (28) имеет ω-периодическое решение, удовлетворяющее неравенствам (5). Причем числа a и b при выполнении неравенства (29) зависят от k и не зависят от ε. Нетрудно видеть, что числа N и M можно считать также не зависящими от ε, так как ε ограничено сверху. Теперь, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ в уравнении (28), легко видеть, что уравнение (4) также имеет ω-периодическое решение. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть функция $f(t, x, y)$ ω-периодическая по t. Покажем, что условия 1) и 2) теоремы 1 выполнены, если $f(t, a, 0)<0$ и $f(t, b, 0)>0$ при всех $0\leqslant t\leqslant\omega$. Действительно, в этом случае для некоторого $\varepsilon>0$ $f(t, x, y)>0$ при $b-\varepsilon\leqslant x\leqslant b+\varepsilon$ и $-\varepsilon\leqslant y\leqslant\varepsilon$ и $f(t, x, y)<0$ при $a-\varepsilon\leqslant x\leqslant a+\varepsilon$ и $-\varepsilon\leqslant y\leqslant\varepsilon$. Полагая $b_1=b-\varepsilon$, $a_1=a+\varepsilon$, $\gamma(x)=\sigma<\min\{\varepsilon, \varepsilon/\omega\}$, $\delta(x)=\sigma$, $g(t, x, y)=f(t, x, y)$ и $e(t)\equiv 0$, легко видеть, что условие 1) выполнено. Выполнимость условия 2) теоремы 1 следует из леммы 5. Таким образом, теорема 1 остается верной и в том случае, если условия 1) и 2) заменить условиями $f(t, a, 0)<0$ и $f(t, b, 0)>0$.

Пусть теперь $f(t, a, 0)\leqslant 0$ и $f(t, b, 0)\geqslant 0$. Пусть r и ρ — числа, упомянутые в условиях (i) и (ii). Пусть $0<\varepsilon<\min\{r, |\rho|, (b-a)/2\}$ и $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$ — непрерывные функции, такие, что $h_1(x, y)<0$ при $(x-a)^2+y^2<\varepsilon$, $h_1(x, y)=0$ при $(x-a)^2+y^2\geqslant\varepsilon$ и $h_2(x, y)>0$ при $(x-b)^2+y^2<\varepsilon$, $h_2(x, y)=0$ при $(x-b)^2+y^2\geqslant\varepsilon$.

Рассмотрим уравнение

$$x''=f(t, x, x')+\lambda h(x, x'), \tag{30}$$

где $h(x, y)=h_1(x, y)+h_2(x, y)$. Так как $h(x, \alpha(x))=0$ и $h(x, \beta(x))=0$, то правая часть уравнения (30) удовлетворяет условиям (i) и (ii). Кроме того, при $\lambda>0$ $f(t, a, 0)+\lambda h(a, 0)<0$ и $f(t, b, 0)+\lambda h(b, 0)>0$. Следовательно, уравнение (30) при всех $\lambda>0$ имеет ω-периодическое решение, удовлетворяющее неравенствам (5). Так как неравенства (5) не зависят от λ, то, переходя в уравнении (30) к пределу при $\lambda\to 0$, получим, что уравнение (1) также имеет ω-периодическое решение, удовлетворяющее неравенствам (5). Таким образом, теорема 3 в случае ω-периодичности по t функции $f(t, x, y)$ доказана.

Пусть теперь функция $f(t, x, y)$ непериодическая по t. Построим функции

$$f_k(t, x, y)=\begin{cases}(-k+1-t)f(0, x, y)+(k+t)f(-k+1, x, y), \\ -k\leqslant t\leqslant -k+1; \\ f(t, x, y), \ -k+1<t<k-1; \\ (-k+1+t)f(0, x, y)+(k-t)f(k-1, x, y), \\ k-1\leqslant t\leqslant k.\end{cases}$$

Будем считать функцию $f_k(t, x, y)$ продолженной по t на $(-\infty, \infty)$ периодически с периодом, равным $2k$ (это возможно в силу равенства $f_k(-k, x, y) = f_k(k, x, y)$). Рассмотрим уравнения

$$x'' = f_k(t, x, x'), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{31}$$

Так как $f(t, x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то функции $f_k(t, x, y)$ также удовлетворяют условиям теоремы 3. Поэтому каждое из уравнений (31) имеет $2k$-периодическое решение, удовлетворяющее неравенствам (5). Причем неравенства (5) не зависят от k. Поэтому последовательности функций $\{x_k(t)\}$ и $\{x'_k(t)\}$ равномерно ограничены. А так как функции $f_k(t, x, y)$ равномерно ограничены на каждом ограниченном множестве, то равномерно ограничена на каждом отрезке и последовательность функций $\{x''_k(t)\}$. Поэтому из последовательности $\{x_k(t)\}$ можно выделить такую подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом отрезке к некоторой дифференцируемой на $(-\infty, \infty)$ функции $x(t)$, что соответствующая подпоследовательность из производных будет равномерно сходиться на каждом отрезке к производной $x'(t)$ функции $x(t)$. Очевидно, соответствующая подпоследовательность функций $f_k(t, x_k(t), x'_k(t))$ на каждом отрезке будет равномерно сходиться к функции $f(t, x(t), x'(t))$, а, значит, подпоследовательность из вторых производных будет равномерно на каждом отрезке сходиться к функции $x''(t)$. Поэтому функция $x(t)$ будет являться решением уравнения (1), и, очевидно, удовлетворять неравенствам (5). Теорема 3 доказана.

Литература

1. Ghang S. H.— J. Math. Anal. Appl., 1975, vol. 49, p. 263—266.
2. Martelli M.— J. Math. Anal. Appl., 1979, vol. 69, p. 496—504.
3. Bebernes J.— Proc. Amer. Math. Soc., 1974, vol. 42, p. 121—127.
4. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.—392 с.
5. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа.—М.: Наука, 1975.—512 с.

Таджикский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 23 июля 1985 г.

УДК 517.923

Б. А. ВОЛОДИН, А. М. ХАПАЕВ

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРОЙ ЗАДАЧИ КОШИ, СВЯЗАННОЙ С ДВИЖЕНИЕМ ЭЛЕКТРОНА В ПЛОСКОЙ ВОЛНЕ

Как известно, обыкновенные дифференциальные уравнения, для которых разработаны методы получения точных решений, охватывают только малую часть возникающих на практике задач. Причем аналитические решения нелинейных дифференциальных уравнений чаще удается записать только в параметрическом виде, что, конечно, усложняет анализ задачи. С другой стороны, численное интегрирование дифференциальных уравнений не позволяет провести достаточно полное исследование и установить влияние всех параметров. Это обусловливает особый интерес к получению аналитических решений. Рассмотрим подробно получение и исследование решения одной конкретной задачи Коши.

Работа многих радиофизических устройств основана на длительном взаимодействии электронов с бегущей электромагнитной волной с произвольной фазовой скоростью. Для осуществления длительного взаимодействия необходимо соблюдение условия фазового синхронизма, т. е.