В. И. Ухоботов, С. А. Никитина, Построение гарантированного управления в квазилинейных системах,
Тр. ИММ УрО РАН, 2005, том 11, номер 1, 201–211

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 11 № 1 2005

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

В. И. Ухоботов, С. А. Никитина

В работе рассматривается задача построения гарантированного управления квазилинейной системой, обеспечивающего удержание фазовой траектории вблизи заданного семейства замкнутых множеств $W(t)$. Отклонение фазовой траектории от этого семейства оценивается с помощью некоторой функции. Найдены условия, при выполнении которых обеспечивается удержание траектории в семействе множеств. Подробно разобран случай, когда вектограмма управления $U(t)$ и множества $W(t)$ являются многогранниками специального вида для каждого t. Приведены примеры.

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^n$ движение вектора z происходит по правилу

$$\dot{z} = -u + v + \gamma f(t,z), \quad t \le p. \tag{1.1}$$

Здесь u — вектор управления, v — вектор помехи, p — заданный момент окончания процесса управления, γ — малый параметр.

На возможные значения управления и помехи налагаются геометрические ограничения

$$u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^n, \quad v(t) \in V(t) \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Предположение 1.1. *Многозначная функция $V\colon (-\infty, p] \to 2^{\mathbb{R}^n}$ является измеримой по Лебегу, а ее значение $V(t)$ (вектограмма помехи) при каждом $t \le p$ является замкнутым ограниченным множеством, содержащимся в шаре $g(t)S$. Здесь $g(t) \ge 0$ — интегрируемая на каждом отрезке функция, а $S = \{z \in \mathbb{R}^n\colon \ \|z\| \le 1\}$ — евклидов шар единичного радиуса.*

Из этого предположения следует [1], что при любых τ, t, $\tau < t \le p$, интеграл $\int_\tau^t V(r)dr$ является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1. Допустимым управлением назовем всякую функцию $u\colon (-\infty,p] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, значения $u(t,z)$ которой при любых $t \le p$ и $z \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют включению

$$u(t,z) \in U(t). \tag{1.3}$$

Пусть выбрано допустимое управление (1.3) и задано начальное состояние $z(t_0), t_0 < p$. Возьмем разбиение

$$\omega\colon t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = p \tag{1.4}$$

с диаметром

$$d(\omega) = \max_{0 \le i \le k} (t_{i+1} - t_i).$$

Построим "ломаную"

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) + (t - t_i)\left(-u(t_i, z_\omega(t_i)) + \gamma f(t_i, z_\omega(t_i))\right) + \xi(t), \tag{1.5}$$

здесь $z_\omega(t_0) = z(t_0)$, а $\xi(t)$ — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\xi(t) \in \int\limits_{t_i}^{t} V(r)dr$$

при $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $i \in \overline{0,k}$.

Рассматривается следующая задача. При каждом $t \leq p$ задано непустое замкнутое множество $W(t) \subset \mathbb{R}^n$. Требуется построить управление (1.3), которое для любого начального состояния $z(t_0) \in W(t_0)$ и для любой ломаной (1.5) обеспечивает выполнение условия

$$\max_{0 \leq i \leq k+1} \rho\left(z_\omega(t_i), W(t_i)\right) \to 0 \quad \text{при} \quad d(\omega) \to 0, \quad \gamma \to 0. \tag{1.6}$$

Здесь символом $\rho(z, W)$ обозначено расстояние от точки z до множества W.

2. Построение управления

При построении управления (1.3), обеспечивающего выполнение условия (1.6), будем считать, что функция $f(t,z)$, вектограмма управления $U(t)$ и семейство множеств $W(t)$ удовлетворяют ряду ограничений.

Предположение 2.1. *Существует интегрируемая по Риману на каждом отрезке функция $F(t) \geq 0$ такая, что*

$$\|f(t,z)\| \leq F(t), \quad t \leq p, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Предположение 2.2. *При каждом $t \leq p$ множество $U(t)$ (1.2) является выпуклым, замкнутым и ограниченным.*

Предположение 2.3. *При всех t, τ, $t < \tau \leq p$, определена функция $D(t,\tau) \geq 0$ такая, что*

$$U(t) \subset U(\tau) + D(t,\tau)S. \tag{2.1}$$

З а м е ч а н и е 2.1. Обозначим символом $\langle x, z\rangle$ скалярное произведение двух векторов x и z из $\mathbb{R}^n$, а через

$$c(\psi; X) = \max_{x \in X} \langle \psi, x\rangle$$

— опорную функцию выпуклого, замкнутого и ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда включение (2.1) будет выполнено для функции

$$D(t,\tau) = \max\left(0; \max_{\|\psi\|=1} \left(c(\psi; U(t)) - c(\psi; U(\tau))\right)\right).$$

Предположение 2.4. *Для каждого момента времени $t_0 < p$ существует число $D > 0$ такое, что для любого разбиения ω (1.4) выполнено неравенство*

$$\sum_{j=0}^{k} D(t_j, t_{j+1}) \leq D.$$

Зафиксируем числа t, τ, $t < \tau \le p$, и через $\varphi(t,\tau)$ обозначим инфимум множества чисел $\varphi \ge 0$, для каждого из которых выполнено включение

$$W(\tau) + (\tau - t)U(\tau) + \varphi S \supset W(t) + \int\limits_t^\tau V(r)dr. \tag{2.2}$$

Из замкнутости множеств, фигурирующих во включении (2.2), следует, что оно будет выполнено и при $\varphi = \varphi(t,\tau)$. В определенном смысле эта функция характеризует меру отклонения семейства $W(t)$ от стабильного моста [2] для конфликтно-управляемой системы (1.1) при $\gamma = 0$.

Предположение 2.5. *Для любого момента времени $t_0 < p$ выполнено условие*

$$\sum_{j=0}^{k} \varphi(t_j, t_{j+1}) \to 0 \quad \text{\textit{при}} \;\; d(\omega) \to 0. \tag{2.3}$$

Управление (1.3), обеспечивающее выполнение условия (1.6), будем строить по схеме, предложенной в работе [3], применительно к рассматриваемому классу задач управления.

При любых $t \le p$ и $z \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\varepsilon(t,z) = \inf\left\{\varepsilon \ge 0\colon (z + \varepsilon U(t)) \cap (W(t) + \varepsilon U(t) + \varepsilon S) \ne \emptyset\right\}.$$

Из замкнутости множеств W, U и S следует, что при некоторых $u^*(t,z), u(t,z) \in U(t)$ выполнено включение

$$z + \varepsilon(t,z)u^*(t,z) \in W(t) + \varepsilon(t,z)u(t,z) + \varepsilon(t,z)S. \tag{2.4}$$

Функция $\varepsilon(t,z)$ используется для оценки сверху расстояния от точки z до множества $W(t)$. Из включения (2.4) следует неравенство

$$\rho(z; W(t)) \le (1 + 2Q(t))\varepsilon(t,z), \quad Q(t) = \max_{u \in U(t)} \|u\|. \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. *Пусть числа $a \ge 0$, $\;b \ge 0$, $\;\delta \ge 0$ таковы, что*

$$z + (a-b)u^{(3)} + bu^{(2)} - au^{(1)} \in W(t) + \delta S \tag{2.6}$$

при некоторых $u^{(i)} \in U(t)$, $i = 1,2,3$. Тогда

$$\varepsilon(t,z) \le \max(a; b; \delta). \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $m = \max(a; b)$. Покажем, что существуют u, u_* из множества $U(t)$ такие, что

$$z + mu_* \in W(t) + mu + \delta S. \tag{2.8}$$

Действительно, если $b = m$, то берем

$$u_* = u^{(2)}, \quad u = \frac{a}{b}u^{(1)} + \frac{b-a}{b}u^{(3)} \in U(t),$$

а если $a = m$, то

$$u_* = \frac{a-b}{a}u^{(3)} + \frac{b}{a}u^{(2)} \in U(t), \quad u = u^{(1)}.$$

Таким образом, включение (2.8) доказано. Тогда существуют $u, u_* \in U(t)$ такие, что

$$z + m'u_* \in W(t) + m'u + m'S,$$

где $m' = \max(a; b; \delta)$. Действительно, если $\delta \le m$, то берем те же u, u_*, что и в (2.8). Если же $m < \delta$, то возьмем то же u_*, а u заменим на

$$\frac{m}{\delta}u + \frac{\delta - m}{\delta}u_* \in U(t).$$

Таким образом, включение (2.8) будет выполнено при некоторых u, u_* из множества $U(t)$, если в нем заменить m и δ на m'. Отсюда и из определения функции $\varepsilon(t, z)$ следует требуемое неравенство (2.7).

Теорема 2.1. *Управление $u(t, z)$, удовлетворяющее включению* (2.4)*, обеспечивает выполнение условия* (1.6) *для любого начального состояния $z(t_0) \in W(t_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим управление $u(t, z)$ в формулу для ломаной (1.5). Обозначим $z_\omega(t_i) = z_i, \quad u(t_i, z_i) = u_i, \quad u^*(t_i, z_i) = u_i^*, \quad \varepsilon(t_i, z_i) = \varepsilon_i, \quad f(t_i, z_i) = f_i$.

Согласно включению (2.1) и предположению 2.4 значение функции Q (2.5) в точке t_i удовлетворяет неравенству $Q(t_i) \le Q(p) + D$. Поэтому из неравенства (2.5) следует, что условие (1.6) будет выполнено, если

$$\max_{0 \le i \le k+1} \varepsilon_i \to 0 \ \text{ при } \ d(\omega) \to 0, \gamma \to 0. \tag{2.9}$$

Покажем вначале, что при каждом $i = 0, 1, \ldots, k$ выполнено неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \le (1 + 2D(t_i, t_{i+1})) \max(\varepsilon_i; t_{i+1} - t_i) + \varphi(t_i, t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)\gamma F(t_i). \tag{2.10}$$

В самом деле, из формулы (2.4) следует включение

$$z_i - \varepsilon_i u_i \in W(t_i) - \varepsilon_i u_i^* + \varepsilon_i S.$$

Подставим сюда равенство

$$z_i = z_{i+1} + (t_{i+1} - t_i)u_i - v_i - (t_{i+1} - t_i)\gamma f_i,$$

которое следует из формулы (1.5). Получим

$$z_{i+1} + (t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u_i + \varepsilon_i u_i^* \in W(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} V(r)dr + (t_{i+1} - t_i)\gamma f_i + \varepsilon_i S.$$

Отсюда и из включений (2.2) и $f_i \in F(t_i)S$ имеем включение

$$z_{i+1} + (t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u_i + \varepsilon_i u_i^* - (t_{i+1} - t_i)u^{(1)} \in W(t_{i+1}) + (\varepsilon_i + \varphi(t_i, t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)\gamma F(t_i))\, S$$

при некотором $u^{(1)} \in U(t_{i+1})$.

Далее, используя включение (2.1), получаем $u_i^* = u^{(2)} + D(t_i, t_{i+1})s, \quad u_i = u^{(3)} + D(t_i, t_{i+1})s_*$. Здесь $u^{(3)}, u^{(2)} \in U(t_{i+1})$, а $s, s_* \in S$. Следовательно,

$$z_{i+1} + (t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i)u^{(3)} + \varepsilon_i u^{(2)} - (t_{i+1} - t_i)u^{(1)} \in W(t_{i+1}) + \delta_i S,$$

где

$$\delta_i = \varepsilon_i + D(t_i, t_{i+1})\,(|t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i| + \varepsilon_i) + \varphi(t_i, t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)\gamma F(t_i).$$

Применяя лемму 2.1, получаем неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \le \max(t_{i+1} - t_i; \varepsilon_i; \delta_i) = \max(t_{i+1} - t_i; \delta_i).$$

Отсюда и из неравенства

$$\max(c; a + b) \leq \max(c; a) + b \quad \text{при} \quad b \geq 0, \tag{2.11}$$

будем иметь

$$\varepsilon_{i+1} \leq \max(\varepsilon_i; t_{i+1} - t_i) + D(t_i, t_{i+1})(|t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i| + \varepsilon_i) + \varphi(t_i, t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)\gamma F(t_i).$$

В итоге, используя неравенство

$$\max(\varepsilon_i, t_{i+1} - t_i) + D(t_i, t_{i+1})\left(|t_{i+1} - t_i - \varepsilon_i| + \varepsilon_i\right) \leq \left(1 + 2D(t_i, t_{i+1})\right) \max(\varepsilon_i; t_{i+1} - t_i),$$

получим (2.10).

Учитывая неравенства (2.10), (2.11) и применяя математическую индукцию, получаем неравенство

$$\varepsilon_{i+1} \leq \left[\max\left(\varepsilon_0; \max_{0 \leq j \leq i}(t_{j+1} - t_j)\right) + \sum_{j=0}^{i} \varphi(t_j, t_{j+1}) + \gamma \sum_{j=0}^{i}(t_{j+1} - t_j)F(t_j)\right] e^{2\sum_{j=0}^{i} D(t_j, t_{j+1})}.$$

Отсюда, используя предположение 2.4 и равенство $\varepsilon_0 = 0$, получаем

$$\max_{0 \leq i \leq k+1} \varepsilon_i \leq \left[d(\omega) + \sum_{j=0}^{k} \varphi(t_j, t_{j+1}) + \gamma \sum_{j=0}^{k}(t_{j+1} - t_j)F(t_j)\right] e^{2D}.$$

Согласно предположениям 2.1 и 2.5 выражение, стоящее в правой части последнего неравенства, стремится к нулю при $d(\omega) \to 0$ и $\gamma \to 0$. Следовательно, условие (2.9), а вместе с ним и теорема доказаны.

З а м е ч а н и е 2.2. Пусть задано семейство множеств $\Phi(t, y) \subset \mathbb{R}^n$, $\quad t \leq p$, $\quad y \in \mathbb{R}^l$. Семейство множеств, удовлетворяющих условию (1.6), будем искать в виде $W(t) = \Phi(t, y(t))$, $t \leq p$. Тогда (2.3) служит условием для определения функции $y(t)$ такой, что порождаемая ею система множеств $W(t)$ образует стабильный мост [2].

3. Случай многогранной вектограммы управления

В этом параграфе исследуются задачи гарантированного управления, в которых вектограмма управления есть многогранник вида $C(t)A(y)$.

Здесь $C(t)$ — невырожденная $(n \times n)$-матрица с непрерывно-дифференцируемыми элементами; $A(y)$ — многогранник, задаваемый с помощью фиксированного набора векторов $x_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, l$, системой линейных неравенств

$$A(y) = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \langle x_j, z\rangle \leq y_j, \quad j = 1, \ldots, l\}. \tag{3.1}$$

Известно [4, теорема IV.1.13], что многогранник (3.1) непуст тогда и только тогда, когда $y \in K$, где K — конус,

$$K = \left\{y = (y_1, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \colon \sum_{j=1}^{l} \lambda_j y_j \geq 0 \quad \forall \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, l, \quad \sum_{j=1}^{l} \lambda_j x_j = 0\right\}. \tag{3.2}$$

Предположение 3.1. *Вектограмма $U(t)$ представлена в виде*

$$U(t) = C(t)A(\alpha(t)), \tag{3.3}$$

где функция $\alpha(t)$ удовлетворяет включению $\alpha(t) \in K$ при $t \leq p$ и условию Липшица на $[t_0, p]$.

Относительно многогранника (3.1) сделаем два предположения.

Предположение 3.2. *При каждом $y \in K$ множество $A(y)$ является ограниченным.*

Для этого [4, теорема IV.1.14] необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\{z \in \mathbb{R}^n\colon z = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j x_j, \quad \lambda_j \geq 0\right\} = \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

Предположение 3.3. *Для любых $y, y^* \in K$ выполнено равенство*

$$A(y + y^*) = A(y) + A(y^*). \tag{3.5}$$

Приведем два примера [6] многогранников, удовлетворяющих условиям ограниченности (3.4) и аддитивности (3.5).

П р и м е р 3.1. Пусть многогранник (3.1) является параллелепипедом,

$$A(y) = \{z \in \mathbb{R}^n\colon \langle x_j, z\rangle \leq y_j, \quad \langle -x_j, z\rangle \leq y_{n+j}, \quad j = 1, \ldots n\}.$$

Здесь векторы $x_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots n$, линейно независимы. Конус (3.2) имеет вид

$$K = \left\{y = (y_1, \ldots, y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}\colon y_j + y_{n+j} \geq 0, \quad j = 1, \ldots n\right\}.$$

П р и м е р 3.2. Пусть многогранник (3.1) является симплексом,

$$A(y) = \{z \in \mathbb{R}^n\colon \langle x_j, z\rangle \leq y_j, \quad j = 1, 2, \ldots n, n+1\}.$$

Здесь векторы $x_1, \ldots, x_n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$, а $x_{n+1} = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, причем все $a_i < 0$. Конус (3.2) в этом случае имеет вид

$$K = \left\{y = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} y_j a_j \geq 0\right\}.$$

Из предположения 3.2 следует [5], что существует число $P > 0$, определяемое векторами x_j, $j = 1, \ldots, l$, такое, что для любого $y \in K$ выполнено включение

$$A(y) \subset \sigma(y) PS, \quad \sigma(y) = \max_{1 \leq j \leq l} \max(0; y_j). \tag{3.6}$$

Из этого включения и условия (3.5) следует [5], что

$$y, y^* \in K \Rightarrow A(y) + \sigma(y^* - y) PS \supset A(y^*). \tag{3.7}$$

Ниже для произвольной матрицы $B = (b_{ij})$ обозначим $|B| = \left(\sum b_{ij}^2\right)^{1/2}$.

Лемма 3.1. *Для любых $y, y^* \in K$ и t, τ, $t \leq \tau \leq p$, выполнено включение*

$$C(t)A(y^*) \subset C(\tau)A(y) + \delta(t, \tau, y^*, y)S, \tag{3.8}$$

где

$$\delta(t, \tau, y^*, y) = \left(\sigma(y)\,|C(t) - C(\tau)| + \sigma(y^* - y) \cdot |C(t)|\right) P. \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим включение (3.7) на невырожденную матрицу $C(t)$. Тогда, учитывая включение $C(t)S \subset |C(t)|\, S$, получим

$$C(t)A(y^*) \subset C(t)A(y) + \sigma(y^* - y)P\,|C(t)|\, S$$

$$\subset C(\tau)A(y) + \left(C(t) - C(\tau)\right) A(y) + \sigma(y^* - y)P\,|C(t)|\, S.$$

Отсюда, используя включение (3.6), получим соотношения (3.8), (3.9).

Лемма 3.2. *Вектограмма* (3.3) *удовлетворяет условиям, сформулированным в предположениях* 2.2, 2.3 *и* 2.4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество (3.2) является выпуклым, замкнутым и, согласно предположению 3.2, ограниченным. Из леммы 3.1 следует включение (2.1) с функцией

$$D(t,\tau)=\left(\sigma(\alpha(t))\,|C(t)-C(\tau)|+\sigma(\alpha(\tau)-\alpha(t))\cdot|C(t)|\right)P.$$

Матрица $C(t)$ является непрерывно дифференцируемой. Следовательно, ее элементы удовлетворяют условию Липшица на отрезке $[t_0,p]$. По предположению 3.1 условию Липшица удовлетворяет и функция $\alpha(t)$. Поэтому существует число $L>0$ такое, что для любого разбиения ω (1.4) выполнено неравенство

$$\sum_{j=0}^{k} D(t_j,t_{j+1})\le (p-t_0)L.$$

Рассмотрим семейство непустых множеств $W(t)=C(t)A(y(t))$, где $y(\cdot)\colon [t_0,p]\to K$ — заданная функция.

При $y\in K$ и $j=1,\dots,l$ обозначим значения опорной функции множества $A(y)$ на векторах x_j через $m_j(y)$. Можем записать

$$m_j(y)=\max_z \langle x_j,z\rangle\,,\quad \langle x_i,z\rangle\le y_i,\quad i=1,\dots,l, \tag{3.10}$$

$$m(y)=(m_1(y),m_2(y),\dots,m_l(y)).$$

Лемма 3.3. *Выполнены соотношения*

$$m(y)\in K \Longleftrightarrow y\in K \quad \text{и} \quad A(m(y))=A(y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.10) следуют неравенства $m_j(y)\le y_j$, $j=1,\dots,l$. Отсюда и из формул (3.1) и (3.2) следует, что, если $m(y)\in K$, то $y\in K$ и $A(m(y))\subset A(y)$. Пусть $y\in K$. Возьмем любую точку $z\in A(y)$. Тогда, согласно формулам (3.10), $\langle x_j,z\rangle\le m_j(y)$, $j=1,\dots,l$. Стало быть, $z\in A(m(y))$ и, следовательно, $m(y)\in K$.

С учетом доказанной леммы семейство множеств W запишем в следующем виде:

$$W(t)=C(t)A(m(y(t))),\quad y\colon [t_0,p]\to K. \tag{3.11}$$

Теорема 3.1. *Пусть функция* $y\colon [t_0,p]\to K$ *такова, что* $m(y(t))\in \operatorname{int} K$. *Тогда для семейства множеств* (3.11) *функция* $\varphi(t,\tau)$ *удовлетворяет равенству*

$$\varphi(t,\tau)=(\tau-t)\chi(t,\tau), \tag{3.12}$$

где

$$\chi(t,\tau)=|C(\tau)|\,\sigma\!\left(\frac{m(t,\tau,y(t))-m(y(\tau))}{\tau-t}-\alpha(\tau)+\frac{1}{\tau-t}\int_t^\tau \beta(\tau;r)dr\right),$$

$m(t,\tau,y)$, $\beta(\tau;r)$ *— векторы с координатами*

$$m_j(t,\tau,y)=c\left(x_j;C^{-1}(\tau)C(t)A(y)\right),\qquad \beta_j(\tau;r)=c\left(x_j;C^{-1}(\tau)V(r)\right) \tag{3.13}$$

($t\le\tau\le p$, $y\in K$, $j=1,\dots,l$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Геометрическая разность

$$Z \overset{*}{-} X = \bigcap_{x \in X} (Z - x)$$

двух множеств $Z \subset \mathbb{R}^n$ и $X \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет [7] свойству $(Z + Y) \overset{*}{-} X \supset Z \overset{*}{-} X + Y$. Поэтому включение (2.2) будет выполнено, если

$$(W(\tau) + (\tau - t)U(\tau)) \overset{*}{-} \int_t^\tau V(r)dr + \varphi S \supset W(t). \tag{3.14}$$

Из формул (3.2) и (3.11), используя условие (3.5), получим

$$W(\tau) + (\tau - t)U(\tau) = C(\tau)A\left(m(y(\tau)) + (\tau - t)\alpha(\tau)\right). \tag{3.15}$$

В случае замкнутого ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ верна формула [6]

$$A(y) \overset{*}{-} X = A(y - y^*), \quad y_j^* = c(x_j; X), \quad j = 1, \ldots, l. \tag{3.16}$$

Поскольку $m(y(t)) \in \operatorname{int} K$, то существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $t, \tau \in [t_0, p]$, $t \le \tau \le t + \delta$, выполнено включение

$$m(y(\tau)) + (\tau - t)\alpha(\tau) - \int_t^\tau \beta(\tau; r)dr \in K.$$

Отсюда, используя формулы (3.15) и (3.16), запишем включение (3.14) в следующем виде:

$$C(\tau)A\left(m(y(\tau)) + (\tau - t)\alpha(\tau) - \int_t^\tau \beta(\tau; r)dr\right) + \varphi S \supset C(t)A(m(y(t))). \tag{3.17}$$

Покажем, что

$$A\left(m(t, \tau, y(t))\right) \supset C^{-1}(\tau)C(t)A(m(y(t))). \tag{3.18}$$

В самом деле, пусть точка z принадлежит множеству, стоящему в правой части включения. Тогда, используя лемму 3.3 и обозначение (3.13), получаем неравенства

$$\langle x_j, z\rangle \le m_j(t, \tau, y(t)), \quad j = 1, \ldots, l.$$

Отсюда следует, что точка z принадлежит множеству, стоящему в левой части, что доказывает включение (3.18).

Из (3.18) следует, что включение (3.17) и, следовательно, (3.14) будет выполнено, если

$$C(\tau)A\left(m(y(\tau)) + (\tau - t)\alpha(\tau) - \int_t^\tau \beta(\tau; r)dr\right) + \varphi S \supset C(\tau)A(m(t, \tau, y(t))). \tag{3.19}$$

Из включения (3.7) имеем

$$A(m(t, \tau, y(t))) \subset A\left(m(y(\tau)) + (\tau - t)\alpha(\tau) - \int_t^\tau \beta(\tau; r)dr\right)$$

$$+ \sigma\left(m(t, \tau, y(t)) - m(y(\tau)) - (\tau - t)\alpha(\tau) + \int_t^\tau \beta(\tau; r)dr\right)S.$$

Умножим это включение на матрицу $C(\tau)$ и учтем, что $C(\tau)S \subset |C(\tau)|\,S$. Получим, что включение (3.19) выполняется при $\varphi = (\tau - t)\chi(t,\tau)$. Таким образом, включение (2.2) и поэтому равенство (3.12) доказаны. □

Обозначим при $y \in K$, $t \le \tau \le p$ и $j = 1,\dots,l$

$$a_j(t,\tau,y) = \left\{ z \in A(y) \colon m_j(t,\tau,y) = \left\langle x_j, C^{-1}(\tau)C(t)z \right\rangle \right\}. \tag{3.20}$$

Теорема 3.2. *Пусть каждая из функций $\beta_j(\tau,r)$ непрерывно зависит от своих аргументов, а непрерывная функция $y\colon [t_0,p] \to K$ такова, что функции $m_j(y(t))$ являются непрерывно-дифференцируемыми и удовлетворяют при $t_0 \le t \le p$, $j = 1,\dots,l$ неравенствам*

$$-\frac{d}{dt}m_j(y(t)) - \min_{z \in a_j(y(t))} \left\langle x_j, \dot C(t)C^{-1}(t)z \right\rangle - \alpha_j(t) + \beta_j(t) \le 0, \tag{3.21}$$

где $a_j(y) = a_j(t,t,y)$, $\beta_j(t) = c\left(x_j; C^{-1}(t)V(t)\right)$. Тогда функция $\varphi(t,\tau)$ удовлетворяет условию (2.3).

Доказательство. Нужно доказать, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при всех t,τ, $t_0 \le t < \tau \le t+\delta$, $\tau \le p$, функция χ (3.12) удовлетворяет неравенству $\chi(t,\tau) < \varepsilon$.

Допустим противное. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и последовательности точек $\{t_i\}$ и $\{\tau_i\}$, $t_i < \tau_i$, из отрезка $[t_0,p]$, сходящиеся к некоторой точке $t \in [t_0,p]$, такие, что $\chi(t_i,\tau_i) \ge \varepsilon$. Поскольку $|C(\tau_i)| \to |C(t)| > 0$, то из формулы (3.12) следует, что существуют номер $j = 1,\dots,l$ и число $\varepsilon_1 > 0$ такие, что для бесконечного числа номеров выполнены неравенства

$$\frac{m_j(t_i,\tau_i,y(t_i)) - m_j(y(\tau_i))}{\tau_i - t_i} - \alpha_j(\tau_i) + \frac{1}{\tau_i - t_i}\int\limits_{t_i}^{\tau_i} \beta_j(\tau_i;r)dr \ge \varepsilon_1. \tag{3.22}$$

Поскольку матрица $C(t)$ является непрерывно дифференцируемой, то

$$C^{-1}(\tau_i)C(t_i) = E - (\tau_i - t_i)C^{-1}(t_i)\dot C(t_i) + (\tau_i - t_i)A(t_i,\tau_i),$$

где матрица $A(t_i,\tau_i) \to 0$ при $t_i \to t$, $\tau_i \to t$. Следовательно,

$$m_j(t_i,\tau_i,y(t_i)) = \left\langle x_j, C^{-1}(\tau_i)C(t_i)z_i \right\rangle$$

$$= \langle x_j, z_i\rangle - (\tau_i - t_i)\left\langle x_j, C^{-1}(t_i)\dot C(t_i)z_i \right\rangle + (\tau_i - t_i)\left\langle x_j, A(t_i,\tau_i)z_i \right\rangle. \tag{3.23}$$

Здесь $z_i \in a_j(t_i,\tau_i,y(t_i))$.

Из включения (3.7) следует, что расстояние по Хаусдорфу $h(A(y);A(y^*))$ удовлетворяет неравенству

$$h(A(y);A(y^*)) \le \left(\sum_{j=1}^{l}(y_j - y_j^*)^2\right)^{\frac12} P.$$

Отсюда следует [4, лемма V.3.1], что функция (3.13) непрерывно зависит от своих аргументов, а многозначное отображение $a_j(t,\tau,y)$ (3.20) полунепрерывно сверху относительно своих переменных.

Поэтому можно считать, что $z_i \to z \in a_j(t,t,y(t)) = a_j(y(t))$. Поскольку $\langle x_j, z_i\rangle \le m_j(y(t_i))$, то, учитывая равенство (3.23), получим, что выражение, стоящее в левой части неравенства (3.22), не превосходит

$$\frac{m_j(y(t_i)) - m_j(y(\tau_i))}{\tau_i - t_i} - \left\langle x_j, C^{-1}(t_i)\dot C(t_i)z_i \right\rangle + \langle x_j, A(t_i,\tau_i)z_i\rangle - \alpha(\tau_i) + \frac{1}{\tau_i - t_i}\int\limits_{t_i}^{\tau_i} \beta_j(\tau_i;r)dr.$$

Это выражение стремится к левой части неравенства (3.21). Получили противоречие.

З а м е ч а н и е 3.1. Неравенства (3.21) выполняются, если функция y: $[t_0, p] \to K$ является решением системы уравнений

$$\frac{d}{dt} m_j(y(t)) = -\min_{z \in A(y(t))} \langle G(t)x_j, z\rangle - \alpha_j(t) + \beta_j(t), \tag{3.24}$$

где $G(t)$ — результат транспонирования матрицы $\dot{C}(t)C^{-1}(t)$.

З а м е ч а н и е 3.2. Подставим $u = C(t)x, u^* = C(t)x^*$. Тогда процедуру построения управления (2.4) можно записать в виде решения следующей задачи на условный экстремум:

$$\varepsilon \to \min, \quad \varepsilon \geq 0, \quad \|s\| \leq 1, \quad \langle x_j, x^*\rangle \leq \alpha_j(t), \quad \langle x_j, x\rangle \leq \alpha_j(t),$$

$$\left\langle x_j, C^{-1}(t)z\right\rangle + \varepsilon \langle x_j, x^* - x\rangle + \varepsilon \left\langle x_j, C^{-1}(t)s\right\rangle \leq y_j(t), \quad j = 1, \ldots, l.$$

4. Примеры

Для базиса $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать через $x_1^+, \ldots, x_n^+$ его сопряженный, то есть

$$\left\langle x_i, x_j^+\right\rangle = 1 \text{ при } i = j \quad \text{и} \quad \left\langle x_i, x_j^+\right\rangle = 0 \text{ при } i \neq j.$$

П р и м е р 4.1. Параллелепипед из примера 3.1 представим в следующем виде:

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \colon z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i(y_i + y_{n+i}) + (y_i - y_{n+i})\right) x_i^+, \quad |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ значение опорной функции равно

$$c(x; A(y)) = \sum_{i=1}^{n} \left((y_i - y_{n+i}) \left\langle x, x_i^+\right\rangle\right) + \sum_{i=1}^{n} \left((y_i + y_{n+i}) \left|\left\langle x, x_i^+\right\rangle\right|\right).$$

Здесь учтено, что $y_i + y_{n+i} \geq 0$ при $y \in K$.

Отсюда следует, что $m_j(y) = y_j$ при $j = 1, \ldots, l$, а система уравнений (3.24) имеет вид

$$\dot{y}_s(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{si}(t)y_i(t) + b_{si}(t)y_{n+i}(t)\right) - a_s(t) + b_s(t),$$

$$\dot{y}_{n+s}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(b_{si}(t)y_i(t) + a_{si}(t)y_{n+i}(t)\right) - a_{n+s}(t) + b_{n+s}(t).$$

Здесь обозначено

$$a_{si}(t) = \left\langle G(t)x_s, x_i^+\right\rangle + \left|\left\langle G(t)x_s, x_i^+\right\rangle\right|,$$

$$b_{si}(t) = -\left\langle G(t)x_s, x_i^+\right\rangle + \left|\left\langle G(t)x_s, x_i^+\right\rangle\right|.$$

П р и м е р 4.2. Симплекс из примера 3.2 имеет $n+1$ крайнюю точку z_j, каждая из которых является решением системы уравнений [4, теорема I.4.2]

$$\langle z_j, x_1\rangle = y_1, \quad \ldots, \quad \langle z_j, x_{i-1}\rangle = y_{j-1}, \quad \langle z_j, x_{i+1}\rangle = y_{j+1}, \quad \ldots, \quad \langle z_j, x_{n+1}\rangle = y_{n+1}.$$

Решение этой системы имеет вид

$$z_j(y) = \sum_{s=1}^{n} \varphi_{js}(y) x_s^+, \quad j = 1, \ldots, n+1,$$

где

$$\varphi_{ss}(y) = (y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} y_i F_i + y_s F_s) F_s^{-1}, \quad s = 1, \ldots, n,$$

и $\varphi_{js}(y) = y_s$ во всех остальных случаях.

Представим симплекс в виде

$$A(y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \colon z = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \sum_{s=1}^{n} \varphi_{js}(y) x_s^+, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ значение опорной функции равно

$$c(x; A(y)) = \max_{1 \leq j \leq n+1} \sum_{s=1}^{n} \varphi_{js}(y) \left\langle x, x_s^+ \right\rangle.$$

Отсюда получим, что $m_j(y) = y_j$ при любом $j = 1, \ldots, n+1$, а система уравнений (3.24) примет вид

$$\dot{y_j}(t) = - \min_{1 \leq j \leq n+1} \sum_{s=1}^{n} \varphi_{is}(t) \left\langle G(t) x_j, x_s^+ \right\rangle - \alpha_j(t) + \beta_j(t).$$

Поступила 12.02.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 195–252.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Ухоботов В.И.** Непрерывная игра в пространстве с неполной линейной структурой // Теория и системы управления. 1997. № 2. С. 107–109.
4. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
5. **Ухоботов В.И., Титов О.Ю.** Моделирование гарантированного управления с многогранной областью значений // Вестн. Челяб. ун-та. Серия 3. Математика. Механика. Информатика. 2002. № 1(6). С. 155–164.
6. **Ухоботов В.И.** Построение цены игры в некоторых дифференциальных играх с фиксированным временем // Прикл. матем. и мех. 1981. Т. 45, вып. 6. С. 994–1000.
7. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. 1 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1280.