Х. Абдуваитов, Об отсутствии переодических режимов в системах регулирования с импульсными возмущениями,
Автомат. и телемех., 1985, выпуск 10, 5–9

https://www.mathnet.ru/at7563

УДК 62-527

ОБ ОТСУТСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В СИСТЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

АБДУВАИТОВ Х.

(Душанбе)

Предлагается модификация понятия периодического режима, полезная при изучении систем регулирования с малыми шумами. В двумерном случае получается критерий отсутствия таких режимов в терминах существования направляющих потенциалов [1], аналогичных функциям Ляпунова в теории устойчивости [2].

Введение

Вопрос о выделении систем, в которых не могут реализовываться автоколебательные или, в более общей постановке, произвольные периодические режимы, давно изучается специалистами по теории автоматического регулирования. В последнее время большое внимание уделяется анализу грубости таких систем. При этом приходится модифицировать само понятие периодического режима. В различных ситуациях полезны, конечно, различные модификации. Ниже обсуждается одна из них, основанная на понятии, являющемся естественным аналогом периодического режима в системе с малыми импульсными возмущениями.

Основные результаты

Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением

(1) $\dot{x}=F(x),\ x\in R^n,$

где $F(x)$ — непрерывная функция и удовлетворяет условиям теоремы единственности решения. Кроме того, будем предполагать, что точка $x=\theta$ является единственной особой точкой системы (1) и все ее решения определены при всех значениях $-\infty<t<\infty$.

Определение 1. Конечную упорядоченную совокупность ненулевых точек $\{y_1,\dots,y_k\}$ пространства R^n назовем цепью системы (1), если для любого $\sigma>0$ существуют решения $x_i(t)$, $i=1,\dots,k-1$ системы (1) и положительные числа $t_i=t_i(\sigma)$, $t_i(\sigma)\to\infty$ при $\sigma\to 0$, такие, что

$$|x_i(0)-y_i|<\sigma,\ |x_i(t_i)-y_{i+1}|<\sigma,\ i=1,\dots,k-1.$$

Точки $y_1,\dots,y_k$ будем называть вершинами цепи.

Определение 2. Совокупность точек $\{y_1,\dots,y_k\}$ назовем замкнутой цепью системы (1), если $\{y_1,\dots,y_k,\ y_1\}$ является цепью.

Простейшим примером системы, имеющей замкнутые цепи, является система вида (1), имеющая периодический режим, так как любая точка фазовой траектории, отвечающей периодическому режиму, является замкнутой цепью. Система

$$\dot{\xi}=\begin{cases}\xi(\xi^2-3\eta^2), & \xi\eta\geqslant 0,\\ \xi(\xi^2+\eta^2), & \xi\eta<0,\end{cases}\qquad \dot{\eta}=\begin{cases}\eta(3\xi^2-\eta^2), & \xi\eta\geqslant 0,\\ -\eta(\xi^2+\eta^2), & \xi\eta<0\end{cases}$$

является примером системы без периодических режимов, но имеющей замкнутые цепи. Действительно, каждая из координатных осей состоит из трех траекторий (состояния равновесия $x=\theta$ и двух полуосей). Поэтому любая траектория, отличная от этих траекторий, целиком лежит в одном из четырех квадрантов. Совокупность четырех точек $y_1=\{1,0\}$, $y_2=\{0,1\}$, $y_3=\{-1,0\}$, $y_4=\{0,-1\}$ является замкнутой цепью.

Таким образом, наличие периодического режима в системе (1) влечет наличие замкнутой цепи, но из наличия замкнутой цепи в системе (1) не вытекает существование периодического режима. Однако из определения цепи следует, что если в системе (1) имеется замкнутая цепь, то при сколь угодно малых импульсных возмущениях в окрестностях точек, являющихся вершинами цепи, могут появиться периодические режимы. Поэтому замкнутую цепь нужно рассматривать как естественное обобщение понятия периодического режима.

Ниже рассматривается задача об условиях отсутствия замкнутых цепей в системе (1). Для случая $n=2$ предлагаются необходимые и достаточные условия отсутствия замкнутых цепей в системе (1), формулируемые в терминах направляющих потенциалов.

Напомним (см. [1]), что направляющим потенциалом для системы (1) в области $|x|>0$ называется непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$(\operatorname{grad} V(x),\ F(x))>0,\quad |x|>0.$$

Основным геометрическим свойством направляющего потенциала является возрастание этой функции вдоль каждой ненулевой фазовой траектории системы (1) (при движении изображающей точки в направлении, соответствующем возрастанию переменной t). Это геометрическое соображение позволяет привлекать в качестве направляющего потенциала непрерывные (не обязательно гладкие) функции. Непрерывную в области $|x|>0$ функцию $V(x)$ будем называть непрерывным направляющим потенциалом для системы (1), если функция $V(x(t))$, где $x(t)$ – произвольное ненулевое решение системы (1), является возрастающей, т. е. $V(x(t_1))>V(x(t_0))$ для любых $t_1>t_0$.

В отличие от непрерывного направляющего потенциала, направляющий потенциал, обладающий свойством гладкости, будем называть гладким (или непрерывно дифференцируемым) направляющим потенциалом.

Теорема 1. Для того чтобы система (1) при $n=2$ не имела замкнутых цепей, необходимо и достаточно, чтобы для системы (1) в области $|x|>0$ существовал непрерывный направляющий потенциал.

Теорема 2. Пусть функция $F(x)$ непрерывно дифференцируема в области $|x|>0$. Тогда для того, чтобы система (1) при $n=2$ не имела замкнутых цепей, необходимо и достаточно, чтобы для системы (1) в области $|x|>0$ существовал непрерывно дифференцируемый направляющий потенциал.

Для случая $n=2$ ряд свойств замкнутых цепей указан в [3]. Интересны были бы аналоги теорем 1 и 2, относящиеся к более высоким размерностям. Было бы интересно знать, какую роль играет отсутствие замкнутых цепей в исходной системе для исследования вопроса об отсутствии периодического режима при более общих возмущениях (например, при любых возмущениях с малой амплитудой).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. *Вспомогательные леммы.* В этом пункте будем предполагать, что система (1) не имеет замкнутых цепей. Пусть $\Omega=R^2\setminus\{\theta\}$.

Лемма 1 [3]. Пусть система (1) не имеет замкнутых цепей. Тогда для любого ограниченного замкнутого множества $K\subset\Omega$ существует число $\delta>0$, такое, что если $\{y_1,\ldots,y_k\}$ – цепь системы (1) и $y_1\in K$, $y_k\in K$, то $|y_1-y_k|>\delta$.

Ниже используется понятие отрезка без контакта для траекторий системы (1) (см. [4]).

Лемма 2. Если система (1) не имеет замкнутых цепей, то для любого $x\neq\theta$ существует отрезок без контакта l с серединой в точке x, такой, что любая траектория системы (1) имеет с l не более одной общей точки.

Доказательство очевидно.

Пусть l – отрезок без контакта, целиком лежащий в некотором компакте $K\subset\Omega$. Можно считать, что отрезок l имеет с любой траекторией системы (1) не более одной общей точки, а его длина не превосходит числа $\delta>0$, выбранного в силу леммы 1. Рассмотрим открытое множество $G(l)$, состоящее из точек всех траекторий, имеющих общую точку с отрезком l, отличную от ее концов. Граница множества $G(l)$ состоит из траекторий системы (1). Среди траекторий системы (1), принадлежащих границе области $G(l)$, есть две траектории, проходящие через концы отрезка l. Кроме этих двух траекторий, граница области $G(l)$ может содержать другие траектории. Пусть L одна из них, причем L отлична от точки $x=\theta$, а M – точка на L. Обозначим через $x(t, y)$ решение системы (1), для которого $x(0, y)=y$. Тогда существуют точки $y_m\in l$ и числа t_m такие, что $x(t_m, y_m)\to M$ при $m\to\infty$. Очевидно $|t_m|\to\infty$. В силу выбора длины отрезка l либо $t_m\to\infty$, либо $t_m\to-\infty$. Если $t_m\to\infty$ $(t_m\to-\infty)$, то для любой точки M' траектории L из того, что $x(t_m', y_m')\to M'$, $y_m'\in l$, следует, что $t_m'\to\infty$ $(t_m'\to-\infty)$.

Через Γ обозначим границу области $G(l)$, а через Γ^+ – ту часть границы, которая состоит из точек всех траекторий L, отличных от $x=\theta$, для которых из $x(t_m, y_m)\to M\in L$ $(y_m\in l)$ следует, что $t_m\to+\infty$.

Пусть область $G\subset\Omega$ состоит из целых траекторий. Непрерывную функцию $W(x)$ $(x\in G)$ назовем возрастающей (неубывающей) в силу системы (1) в области G, если функция $W(x(t, y))$ растет (не убывает) по t при любом $y\in G$.

Лемма 3. Существует непрерывная на $\overline{G(l)}\setminus\{\theta\}$ функция $W(x)$, возрастающая в силу системы (1) в области $G(l)$, для которой $0\leqslant W(x)\leqslant 1$ при $x\in\overline{G(l)}$, $W(x)=1$ при $x\in\Gamma^+$ и $W(x)=0$ при $x\in\Gamma\setminus(\Gamma^+\cup\{\theta\})$.

Доказательство леммы 3 опускаем.

Траекторию L, соответствующую ненулевому решению $x(t)$ системы (1), будем называть параболической, если $|x(t)|\to 0$ при $t\to-\infty$ $(t\to+\infty)$ и $|x(t)|\to\infty$ при $t\to\infty$ $(t\to-\infty)$; траекторию L будем называть эллиптической, если $|x(t)|\to 0$ при $|t|\to\infty$; траекторию L будем называть гиперболической, если $|x(t)|\to\infty$ при $t\to\infty$. Так как система (1) не имеет замкнутых цепей, то она не имеет траекторий, отличных от гиперболической, параболической и эллиптической.

Рассмотрим область $\Omega\setminus\overline{G(l)}$; она состоит из непересекающихся связных открытых множеств, границы которых состоят из целых траекторий, являющихся также граничными для области $G(l)$. Рассмотрим одно из таких открытых множеств и обозначим его через D. Если граница ∂D множества D содержит эллиптическую или гиперболическую траекторию, то она не содержит никакой другой траектории. Поэтому, если ∂D содержит две и более целых траекторий, то все они параболические. Но область D связная и ее граница в Ω не может содержать более двух параболических траекторий. Таким образом, справедлива

Лемма 4. Пусть область $\Omega\setminus\overline{G(l)}$ представлена в виде объединения непересекающихся связных открытых областей и D – одна из этих областей. Тогда граница области D в Ω состоит либо из одной эллиптической траектории, либо из двух параболических траекторий.

Лемма 5. Если система (1) имеет более чем конечное число параболических траекторий, то существует отрезок без контакта l, такой, что все траектории, имеющие общую точку с l, являются параболическими.

Лемма 6. Пусть граница ∂D множества D состоит из двух параболических траекторий L_1, L_2 и точки $x=\theta$. Пусть внутри D лежит отрезок без контакта l, такой, что все траектории, имеющие общую точку с l, являются параболическими. Тогда на $\overline{D}\setminus\{\theta\}$ существует такая непрерывная неубывающая в силу системы (1) функция $W(x)$, что $0\leqslant W(x)\leqslant 1$ при $x\in D$, $W(x)=0$ при $x\in L_1$ и $W(x)=1$ при $x\in L_2$.

Лемма 5 очевидна, а доказательство леммы 6 опускаем.

Лемма 7. Пусть граница ∂D множества D состоит из двух параболических траекторий L_1, L_2 и состояния равновесия $x=\theta$. Пусть внутри D нет параболических траекторий и $M_1\in L_1$, $M_2\in L_2$. Если $\{M_2, M_1\}$ не является цепью, то на $\overline{D}\setminus\{\theta\}$ существует такая непрерывная неубывающая в силу системы (1) функция $W(x)$, что $0\leqslant W(x)\leqslant 1$ при $x\in D$, $W(x)=0$ при $x\in L_1$ и $W(x)=1$ при $x\in L_2$.

Доказательство. Пусть l – отрезок без контакта, один конец которого совпадает с точкой M_1, а все остальные точки принадлежат области D. В силу леммы 2 можно считать, что l имеет с любой траекторией не более одной общей точки. Рассмотрим область $G(l)$, состоящую из всех траекторий, имеющих общую точку с отрезком l, отличную от ее концов. Так как параболическая траектория L_1 принадлежит границе области $G(l)$, то в силу леммы 4 граница области $G(l)$ содержит по крайней мере еще одну параболическую траекторию. Далее, так как $G(l)\subset D$ и внутри D нет параболических траекторий, то траектория L_2 также принадлежит границе области $G(l)$. Так как отрезок l можно считать сколь угодно малым, то существует последовательность решений $\{x_k(t)\}$ и чисел $\{t_k\}$, $|t_k|\to\infty$, такие, что $x_k(0)\to M_1$ и $x_k(t_k)\to M_2$. Последовательность $\{t_k\}$ не содержит подпоследовательности из отрицательных чисел, так как в предположении противного пара точек $\{M_2, M_1\}$ была бы цепью. Поэтому $t_k\to\infty$ при $k\to\infty$. Но тогда точка M_2 (а вместе с ней и все точки траектории L_2) принадлежит той части границы области $G(l)$, которая выше обозначена через Γ^+. В силу леммы 3 существует непрерывная на $\overline{G(l)}\setminus\{\theta\}$ функция $W(x)$, возрастающая в силу системы (1) в области $G(l)$ и удовлетворяющая условиям: $0\leqslant W(x)\leqslant 1$, $x\in G(l)$; $W(x)=1$, $x\in L_2$; $W(x)=0$, $x\in L_1$.

Область $D\setminus\overline{G(l)}$ открытая и представляется в виде объединения непересекающихся открытых областей G_α, граница каждой из которых в Ω, в силу леммы 4 и отсутствия внутри D параболических траекторий, состоит из одной траектории. На этой траектории функция $W(x)$ принимает постоянное значение и ее мы продолжим с сохранением этого значения на все G_α. Лемма 7 доказана.

2. *Доказательство теоремы 1.* Ограничимся доказательством необходимости. Пусть $\Omega_k=\{x: 1/k<|x|<k\}$ и δ_k – положительное число, выбранное по компакту $\overline{\Omega}_k$ в силу леммы 1. Пусть $l(x)$ – отрезок без контакта, лежащий в Ω_{k+1}, с серединой в точке $x\in\overline{\Omega}_k$ и длины меньше δ_{k+1}. В силу леммы 2 можно считать, что отрезок

$l(x)$ имеет с любой траекторией не более одной общей точки. Пусть $G(l(x))$ – множество точек всех траекторий, имеющих общую точку с отрезком $l(x)$, отличную от ее концов. Открытые множества $G(l(x))$, $x\in\overline{\Omega}_k$ покрывают все $\overline{\Omega}_k$. Поэтому можно выделить конечное число отрезков $l(x_i)$, таких, что множества $G(l(x_i))$ также покрывают все $\overline{\Omega}_k$. Значит, существует не более счетного числа отрезков без контакта l_m, имеющих с любой траекторией не более одной общей точки, таких, что $\Omega=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G(l_m)$, причем если середина отрезка l_m лежит в $\overline{\Omega}_k\setminus\overline{\Omega}_{k-1}$, то $l_m\subset\Omega_{k+1}$ и длина отрезка l_m не превосходит δ_{k+1}.

При каждом m построим непрерывную в Ω функцию $W_m(x)$, $0\leqslant W_m(x)\leqslant 1$ ($x\in\Omega$), которая не убывает в силу системы (1) в области Ω и возрастает в силу системы (1) в области $G(l_m)$.

В силу леммы 3 существует непрерывная на $\overline{G(l_m)}\setminus\{\theta\}$ функция $W_m(x)$, $0\leqslant W_m(x)\leqslant 1$ ($x\in G(l_m)$), возрастающая в силу системы (1) в области $G(l_m)$, для которой $W_m(x)=1$ при $x\in\Gamma^+$ и $W_m(x)=0$ при $x\in\Gamma\setminus(\Gamma^+\cup\{\theta\})$.

Покажем, что функцию $W_m(x)$ можно продолжить на все Ω так, чтобы она была неубывающей в силу системы (1) в области Ω. Область $\Omega\setminus\overline{G(l_m)}$ открытая и представляется в виде объединения непересекающихся открытых областей D_α. Если граница ∂D_α области D_α в Ω состоит из одной траектории, то на этой траектории функция $W_m(x)$ принимает постоянное значение 1 или 0; тогда продолжим функцию $W_m(x)$ на D_α с сохранением этого значения. Если ∂D_α состоит более чем из одной траектории, то в силу леммы 4 ∂D_α состоит из двух параболических траекторий L_1 и L_2. На каждом из этих траекторий функция $W_m(x)$ принимает постоянное значение 1 или 0. Если на траекториях L_1 и L_2 функция $W_m(x)$ принимает одно и то же значение, то продолжим ее на D_α с сохранением этого значения.

Пусть функция $W_m(x)$ на траекториях L_1 и L_2 принимает различные значения и пусть для определенности $W_m(x)=0$ при $x\in L_2$ и $W_m(x)=1$ при $x\in L_1$. Тогда $L_1\subset\Gamma^+$, а $L_2\subset\Gamma\setminus(\Gamma^+\cup\{\theta\})$.

Если система (1) в D_α имеет бесконечное число параболических траекторий, то в силу леммы 5 существует отрезок без контакта l, такой, что все траектории, имеющие общую точку с l, являются параболическими. Тогда в силу леммы 6 на $\overline{D}_\alpha\setminus\{\theta\}$ существует непрерывная неубывающая в силу системы (1) функция $W_\alpha(x)$, удовлетворяющая условиям: $0\leqslant W_\alpha(x)\leqslant 1$ при $x\in D_\alpha$; $W_\alpha(x)=1$ при $x\in L_1$; $W_\alpha(x)=0$ при $x\in L_2$. Полагая $W_m(x)=W_\alpha(x)$ при $x\in\overline{D}_\alpha$, продолжим функцию $W_m(x)$ на D_α.

Пусть теперь на $\overline{D}_\alpha$ имеется лишь конечное число параболических траекторий $L_1=L^{(0)}, L^{(1)},\ldots,L^{(k)}=L_2$. Если из D_α отбросить эти траектории, то оставшаяся область будет объединением k непересекающихся открытых областей $D_\alpha^{(1)},\ldots,D_\alpha^{(k)}$, которые не содержат параболических траекторий. Области $D_\alpha^{(i)}$ и траектории $L^{(i)}$ можно считать так пронумерованными, что $\partial D_\alpha^{(i)}$ содержит траектории $L^{(i-1)}$ и $L^{(i)}$. Пусть M_i – точка траектории $L^{(i)}$. Если $\{M_0,\ldots,M_k\}$ – цепь, то в силу того, что $M_0\in L_1\subset\Gamma^+$, на l_m существует точка z_0, такая, что $\{z_0, M_0,\ldots,M_k\}$ является цепью. Если L_2 имеет общую точку z_1 с отрезком l_m, то в силу того, что $M_k\in L_2$, совокупность точек $\{z_0, M_0,\ldots,M_{k-1}, z_1\}$ также будет являться цепью. Но это невозможно в силу леммы 1 и выбора длины отрезка l_m. Если L_2 не имеет общей точки с отрезком l_m, то (так как $M_k\in L_2\subset\Gamma\setminus(\Gamma^+\cup\{\theta\})$) существует точка $z_1\in l_m$, такая, что $\{M_k, z_1\}$ является цепью. Но тогда и $\{z_0, M_0,\ldots,M_k, z_1\}$ является цепью. Это в силу леммы 1 снова противоречит выбору длины отрезка l_m.

Таким образом $\{M_0,\ldots,M_k\}$ не является цепью. Тогда для некоторого i_0, $1\leqslant i_0\leqslant k$ не является цепью и $\{M_{i_0-1}, M_{i_0}\}$. Но тогда в силу леммы 7 на $\overline{D_\alpha^{(i_0)}}\setminus\{\theta\}$ существует непрерывная неубывающая в силу системы (1) функция $W_\alpha^{(i_0)}(x)$, удовлетворяющая условиям: $0\leqslant W_\alpha^{(i_0)}(x)\leqslant 1$ при $x\in D_\alpha^{(i_0)}$; $W_\alpha^{(i_0)}(x)=0$ при $x\in L^{(i_0)}$ и $W_\alpha^{(i_0)}(x)=1$ при $x\in L^{(i_0-1)}$. Полагая $W_m(x)=1$ при $x\in\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{i_0-1} D_\alpha^{(i)}}\setminus\{\theta\}$, $W_m(x)=W_\alpha^{(i_0)}(x)$ при $x\in D_\alpha^{(i_0)}$ и $W_m(x)=0$ при $x\in\overline{\bigcup\limits_{i=i_0+1}^{k} D_\alpha^{(1)}}\setminus\{\theta\}$, продолжим функцию $W_m(x)$ на D_α.

Продолжив таким образом функцию $W_m(x)$ на все множества D_α, получим непрерывную в Ω функцию $W_m(x)$, $0\leqslant W_m(x)\leqslant 1$ ($x\in\Omega$), которая не убывает в силу системы (1) в области Ω и возрастает в силу системы (1) в области $G(l_m)$. Функция $V(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}(2^{-m}\cdot W_m(x))$ является непрерывным направляющим потенциалом для системы (1).

Теорема доказана.

3. *Доказательство теоремы 2.* В доказательстве нуждается лишь необходимость. В силу теоремы 1 для системы (1) в области $\Omega = R^2 \setminus \{\theta\}$ существует непрерывный направляющий потенциал $W(x)$. Пусть $z(t, x)$ – решение системы (1), удовлетворяющее условию $z(0, x) = x$ и $\varepsilon(x) = \min\{W(z(1, x)) - W(x), W(x) - W(z(-1, x))\}$. Очевидно, $\varepsilon(x) > 0$ при $x \in \Omega$. Поэтому существует функция $V_0(x) \in C^\infty(\Omega)$, такая, что $|W(x) - V_0(x)| < {}^1/_3 \varepsilon(x)$ $(x \in \Omega)$. Тогда $V_0(z(1, x)) - V_0(x) \geqslant {}^1/_3 [W(z(1, x)) - W(x)] > 0$. Функция $V(x) = \int_0^1 V_0(z(s, x))\, ds$ $(x \in \Omega)$ определена и непрерывно дифференцируема в области Ω, так как в этой области дифференцируема функция $F(x)$. Так как $V_t'(x(t, y)) > 0$ при $y \neq \theta$, то $(\operatorname{grad} V(x), F(x)) > 0$ при $x \neq \theta$. Теорема доказана.

Автор благодарит М. А. Красносельского и Э. Мухамадиева за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Абдуваитов Х.* О некоторых свойствах автономных динамических систем на плоскости.– Докл. АН ТаджССР, 1984, т. 27, № 7, с. 351–354.
4. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию
13.VIII.1984

ON ABSENCE OF PERIODIC MODES IN CONTROL SYSTEMS WITH PULSE DISTURBANCES

ABDUVAITOV Kh.

A modification of the notion of a periodic mode is proposed with is useful instudies of control systems with a low level of noise. In a two-dimensional case a criterion is obtained for absence of such modes in terms of existence of guiding potential [1] similar to Lyapunov functions in the stability theory [2].