



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Ерзин, Т. Б. Мордвинова, Одна задача построения оптимального дерева, *Управляемые системы*, 1983, выпуск 23, 44–54

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

18 января 2025 г., 08:13:50



ОДНА ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ДЕРЕВА

А.И.Ерзин, Т.Б.Мордвинова

Рассматривается следующая задача. Пусть задан $(n+1)$ -вершинный неориентированный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{0, 1, \dots, n\}$ и множеством ребер E . Припишем ребру $(i, j) \in E$ два действительных числа (веса): $a_{ij} \geq 0$ и $b_{ij} \geq 0$. Обозначим через \mathcal{F} множество остовных деревьев в графе G . Требуется построить дерево $T^* \in \mathcal{F}$, для которого

$$W(T^*) = \min_{T \in \mathcal{F}} W(T) = \min_{T \in \mathcal{F}} \left\{ \sum_{(i,j) \in T} a_{ij} + \sum_{k=1}^n \sum_{(i,j) \in C_k(T)} b_{ij} \right\}$$

(здесь $C_k(T) = C_{k0}(T)$, где через $C_{kj}(T)$ обозначим цепь из вершины k в вершину j в дереве $T \in \mathcal{F}$; цепь $C_0(T)$ состоит из единственной вершины 0).

При $b_{ij} \equiv 0, (i, j) \in E$, рассматриваемая задача совпадает с задачей построения минимального остовного дерева, а в случае $a_{ij} = \text{const}$ - с задачей построения остовного дерева кратчайших расстояний из выделенной вершины 0 ко всем остальным и может быть решена малотрудоемким алгоритмом [1]. В общем же случае для решения таких задач эффективных алгоритмов к настоящему времени неизвестно.

В работе предлагаются эффективные и псевдоэффективные алгоритмы для построения приближенных решений данной задачи. Даются оценки относительной погрешности.

§ 1. Эффективные алгоритмы

Для решения поставленной задачи исследуется возможность использования приближенных эффективных алгоритмов Прима, Дijkstra и смешанного алгоритма. Даются оценки относительной погрешности получаемого решения.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие обозначения. Положим:

$$a_i = \min_{(i,j) \in E} a_{ij}, \lambda_i = \max_{(i,j) \in E} a_{ij}, b_i = \min_{(i,j) \in E} b_{ij}, B_i = \max_{(i,j) \in E} b_{ij},$$

$$A = \max_{i=1, \dots, n} A_i, \quad a = \min_{i=1, \dots, n} a_i, \quad B = \max_{i=1, \dots, n} B_i, \quad b = \min_{i=1, \dots, n} b_i,$$

$$\Delta_i = A_i - a_i, \quad \delta = \max_{i=1, \dots, n} \Delta_i, \quad \Delta = A - a.$$

Для любого остовного дерева $T \in \mathcal{F}$ определим компоненты его веса:

$$u_1(T) = \sum_{(i,j) \in T} a_{ij}, \quad u_2(T) = \sum_{k=1}^n \sum_{(i,j) \in C_k(T)} b_{ij}. \quad \text{Тогда } W(T) = u_1(T) + u_2(T).$$

Пусть $T^* \in \mathcal{F}$ - оптимальное дерево, $W(T^*) = W^* \neq 0$. Тогда относительная погрешность ε для любого дерева $T \in \mathcal{F}$ определяется как

$$\varepsilon = (W(T) - W^*) / W^*.$$

Пусть деревья $P, D \in \mathcal{F}$ таковы, что $u_1(P) = \min_{T \in \mathcal{F}} u_1(T)$, $u_2(D) = \min_{T \in \mathcal{F}} u_2(T)$. Через ε_P и ε_D обозначим величины относительных погрешностей для деревьев P и D соответственно.

Каждый из рассматриваемых далее алгоритмов при построении искомого остовного дерева одновременно делает проверку графа G на связность. Приводимые ниже оценки верны в тех случаях когда граф G связан.

Для фиксированного дерева $T \in \mathcal{F}$ введем обозначения:

$$R_i(T) = \sum_{(k,e) \in C_i(T)} b_{ke}, \quad S_i(T) = R_i(T) + a_{ij},$$

где $(i,j) \in C_i(T)$, $R_0(T) = S_0(T) = 0$. Кроме того, обозначим $S_i^* = S_i(T^*)$, $C_i^* = C_i(T^*)$, $R_i^* = R_i(T^*)$. Очевидно, что $W(T) = \sum_{i=1}^n S_i(T)$.

Л е м м а 1.1. Для любого дерева $T \in \mathcal{F}$ справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^n R_i(T) \leq \sum_{i=1}^n i B_i, \quad \text{где } B_{i-1} \leq B_i, \quad i = 2, \dots, n.$$

Доказательство проведем индукцией по числу вершин графа ($i = 1, \dots, n$).

1) $i = 1$. Утверждение леммы очевидно, так как граф состоит из единственного ребра.

2) Пусть утверждение леммы верно для любого графа с i вершинами ($i = 1, \dots, n-1$). Докажем справедливость леммы для графа G_{i+1} с $(i+1)$ вершинами, занумерованными по неубыванию величин B_i . Пусть $T_{i+1} \in \mathcal{F}(G_{i+1})$, и вершина $k \neq 0$ является височей в дереве T_{i+1} . Дерево $T_{i+1} \setminus \{k\}$ обозначим через T_i . Очевидно, для любой вершины $j \in T_i$ выполняется $R_j(T_i) = R_j(T_{i+1})$. Кроме того, по индукционному предположению, имеем:

$$u_2(T_i) = \sum_{j \neq K} R_j(T_i) \leq \sum_{j=1}^{K-1} j B_j + \sum_{j=K+1}^{i+1} (j-1) B_j.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u_2(T_{i+1}) &= u_2(T_i) + R_K(T_{i+1}) \leq \sum_{j=1}^{K-1} j B_j + \sum_{j=K+1}^{i+1} (j-1) B_j + \sum_{j=1}^{i+1} B_j \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{K-1} j B_j + \sum_{j=K+1}^{i+1} (j-1) B_j + K B_K + \sum_{j=K+1}^{i+1} B_j = \sum_{j=1}^{i+1} j B_j. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Алгоритм Прима

Теорема 1.1. Если $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) > 0$, то

$$\varepsilon_P \leq \frac{\sum_{i=1}^n (i B_i - b_i)}{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)}, \quad (1)$$

где $B_{i-1} \leq B_i$, $i = 2, \dots, n$.

Доказательство. Из определения дерева P имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_P &\leq \frac{W(P) - W^*}{W^*} = \frac{u_1(P) - u_1(T^*) + u_2(P) - u_2(T^*)}{W^*} \leq \\ &\leq \frac{u_2(P) - u_2(T^*)}{W^*} = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i(P) - R_i^*)}{W^*}, \end{aligned}$$

откуда с учетом леммы 1.1 и тривиальных неравенств $\sum_{i=1}^n R_i^* > \sum_{i=1}^n b_i$

$W^* \geq \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ и вытекает оценка (1). Теорема доказана.

Более точной оказывается следующая апостериорная оценка.

Теорема 1.2. Если $u_1(P) + u_2(D) > 0$, то

$$\varepsilon_P \leq \frac{u_2(P) - u_2(D)}{u_1(P) + u_2(D)}.$$

Доказательство.

$$\varepsilon_P = \frac{W(P)}{W^*} - 1 \leq \frac{W(P)}{u_1(P) + u_2(D)} - 1 = \frac{u_2(P) - u_2(D)}{u_1(P) + u_2(D)}.$$

Алгоритм Дейкстры

Пусть $m(T) = \{i \in V / C_i(T) \neq C_i^*\}$, $m_T = |m(T)|$. Заметим, что

$$\varepsilon_D = \frac{W(D) - W^*}{W^*} = \frac{u_1(D) - u_1(T^*) + u_2(D) - u_2(T^*)}{W^*} \leq$$

$$\leq \frac{u_1(D) - u_1(T^*)}{W^*} \leq \frac{\sum_{i \in m(D)} (A_i - a_i)}{W^*} = \frac{\sum_{i \in m(D)} \Delta_i}{W^*}. \quad (2)$$

Л е м м а 1.2. Для любой вершины $i \in V$ такой, что $C_i(D) \neq C_i^*$, справедливо неравенство $S_i^* \geq a_{ij} + b_i + b$, где $(i, j) \in C_i^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $C_i(D) \neq C_i^*$, то по крайней мере одна из этих цепей состоит из двух или более ребер. В случае, когда таковой является C_i^* , утверждение очевидно. Если же из двух или более ребер состоит цепь $C_i(D)$, то $R_i^* \geq R_i(D) \geq b_i + b$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 1.3. Если $\delta \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) > 0$, то

$$\varepsilon_D \leq \frac{\delta \sum_{i=1}^n \Delta_i}{\delta \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) + b \sum_{i=1}^n \Delta_i}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2) и леммы 1.2 следуют оценки:

$$\varepsilon_D \leq \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) + mb} = f_1(m),$$

$$\varepsilon_D \leq \frac{m\delta}{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) + mb} = f_2(m),$$

где $m = |m(D)|$. Поскольку функция $f_1(m)$ является убывающей, а $f_2(m)$ - возрастающей, то максимум их миноранты достигается, когда $f_1(m) = f_2(m)$,

т.е. при $m = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{\delta}$, откуда имеем

$$\varepsilon_D \leq \frac{\delta \sum_{i=1}^n \Delta_i}{\delta \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) + b \sum_{i=1}^n \Delta_i},$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 1.3 вытекает

С л е д с т в и е 1.1. Если $b \geq cA$, $c > 0$, то $\varepsilon_D \leq 1/2c$.

Т е о р е м а 1.4. Если $b > 0$, то

$$\varepsilon_D \leq \frac{\delta}{\beta} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)}{W^*} \right).$$

Доказательство. Из (2) имеем, что $\varepsilon_D \leq \sum_{i \in m(D)} \Delta_i / W^* \leq \delta m \beta / \beta W^*$. Так как, по лемме 1.2, $W^* \geq \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) + m \beta$, то $m \beta / W^* \leq 1 - \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) / W^*$, откуда вытекает утверждение теоремы.

Из теоремы 1.4 и леммы 1.1 вытекает

С л е д с т в и е 1.2.

$$\varepsilon_D \leq \frac{\delta}{\beta} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n (A_i + i B_i)} \right),$$

где $B_{i-1} \leq B_i$, $i = 2, \dots, n$.

Апостериорную оценку дает следующая

Т е о р е м а 1.5. Если $u_1(P) + u_2(D) > 0$, то

$$\varepsilon_D \leq \frac{u_1(D) - u_1(P)}{u_1(P) + u_2(D)}.$$

Доказательство.

$$\varepsilon_D = \frac{W(D)}{W^*} - 1 \leq \frac{W(D)}{u_1(P) + u_2(D)} - 1 = \frac{u_1(D) - u_1(P)}{u_1(P) + u_2(D)}.$$

Смешанный алгоритм

Алгоритм строит искомое дерево D' за n шагов, где на K -м шаге ($K = 1, \dots, n$) к дереву $T_{K-1} = (V_{K-1}, E_{K-1})$ присоединяются одна вершина и одно ребро. Первоначально полагаем $T_0 = (V_0, E_0)$, где $V_0 = \{0\}$, $E_0 = \emptyset$. Вершине 0 приписывается метка $p_0 = 0$.

Опишем произвольный шаг алгоритма.

Шаг K ($K = 1, \dots, n$). Ищем вершины $i_K \in V \setminus V_{K-1}, j_K \in V_{K-1}$ такие, что

$$a_{i_K j_K} + q(b_{i_K j_K} + p_{j_K}) = \min_{i \notin V_{K-1}, j \in V_{K-1}, (i, j) \in E} (a_{ij} + q(b_{ij} + p_j)). \quad (3)$$

Вершине i_K приписываем постоянную метку $p_{i_K} = b_{i_K j_K} + p_{j_K}$ и определяем

дерево $T_K = (V_K, E_K)$, $V_K = V_{K-1} \cup \{i_K\}$, $E_K = E_{K-1} \cup \{(i_K, j_K)\}$. Обозначим дерево T_n , полученное после шага n , через D' , а через $\varepsilon_{D'}$ - соответствующую ему относительную погрешность.

Л е м м а 1.3. Если $\delta > 0$, то для любого $i = 1, \dots, n$ справедливо неравенство $R_i(D') \leq KR_i^*$, где

$$K = \left(1 + \frac{L}{q} \left(1 - \frac{a}{A}\right)\right), \quad \text{а } L = \max_{(i,j) \in E} \frac{a_{ij}}{b_{ij}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В дальнейшем полагаем, что вершины графа G занумерованы в порядке их присоединения к дереву D' . Проведем доказательство леммы индукцией по i ($i = 0, \dots, n$).

1) $i = 0$. $R_i(D') = KR_i^* = 0$.

2) Пусть утверждение леммы верно для $(i-1)$ -й вершины ($i = 1, \dots, n$).

3) Докажем ее справедливость для вершины i . Пусть вершины $\ell, j \in V_{i-1}$; $k \in V \setminus V_{i-1}$ таковы, что $(i, \ell) \in C_i(D')$, $(k, j) \in C_i^*$ (поскольку $0 \in V_{i-1}$, $i \notin V_{i-1}$, то искомая пара вершин k, j существует). Из (3) имеем

$$a_{i\ell} + q(b_{i\ell} + R_\ell(D')) \leq a_{kj} + q(R_j(D') + b_{kj}). \quad (4)$$

Кроме того, по индукционному предположению,

$$R_j(D') \leq KR_j^*. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получаем

$$\begin{aligned} R_i(D') &= b_{i\ell} + R_\ell(D') \leq R_j(D') + b_{kj} + \frac{a_{kj} - a_{i\ell}}{q} \leq \\ &\leq KR_j^* + b_{kj} \left(1 + \frac{a_{kj} - a_{i\ell}}{qb_{kj}}\right) = KR_j^* + b_{kj} \left(1 + \frac{a_{kj}(a_{kj} - a_{i\ell})}{qb_{kj}a_{kj}}\right) \leq \\ &\leq KR_j^* + b_{kj} \left(1 + \frac{L}{q} \left(1 - \frac{a}{A}\right)\right) = KR_j^* + Kb_{kj} \leq KR_i^*. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Л е м м а 1.4. Если $q \geq 1$, то для $i = 1, \dots, n$ справедлива оценка

$$S_i(D') \leq KS_i^* + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \Delta_i - (K-1)(a_{ik} + b_{ik}), \quad (6)$$

где $(i, k) \in C_i^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вершины $\ell, k \in V$; $j \in V_{i-1}$, $t \notin V_{i-1}$ таковы, что $(i, \ell) \in C_i(D')$; $(i, k), (t, j) \in C_i^*$. Из (3) имеем $a_{i\ell} + q(b_{i\ell} + R_\ell) = a_{tj} + q(b_{tj} + R_j)$, откуда, используя лемму 1.3, получаем

$$\begin{aligned}
 S_i(D') &= a_{ie} + b_{ie} + p_e \leq a_{ie} \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{a_{tj}}{q} + b_{tj} + p_j = \\
 &= (a_{ie} - a_{ik}) \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{a_{tj} - a_{ik}}{q} + b_{tj} + a_{ik} + p_j \leq \\
 &\leq \left(1 - \frac{1}{q}\right) \Delta_i + KR_j^* + a_{ik} + b_{tj} + \frac{a_{tj} - a_{ik}}{q}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Если цепь C_{ij}^* состоит из единственного ребра (i, j) , то $K=j$, $t=i$, $KR_j^* + a_{ij} + b_{ij} = KS_i^* - (K-1)(a_{ij} + b_{ij})$, что с учетом (7) дает искомую оценку (6).

Если же цепь C_{ij}^* состоит более чем из одного ребра, то из (7) имеем:

$$\begin{aligned}
 S_i(D') &\leq \left(1 - \frac{1}{q}\right) \Delta_i + KR_j^* + a_{ik} + b_{tj} \left(1 - \frac{a_{tj}}{qb_{tj}} \left(1 - \frac{a_{ik}}{a_{tj}}\right)\right) \leq \\
 &\leq \left(1 - \frac{1}{q}\right) \Delta_i + (KR_j^* + Ka_{ik} + Kb_{ik} + Kb_{tj}) - (K-1)a_{ik} - Kb_{ik} \leq \\
 &\leq \left(1 - \frac{1}{q}\right) \Delta_i + KS_i^* - (K-1)(a_{ik} + b_{ik}).
 \end{aligned}$$

Лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. Если $C_i(D') \neq C_i^*$, то $S_i^* \geq a_i + b_i + v$.

Доказательство. Так как $C_i(D') \neq C_i^*$, то по крайней мере одна из этих цепей состоит более чем из одного ребра. Если из двух или более ребер состоит цепь C_i^* , то $S_i^* \geq a_i + b_i + v$. Пусть C_i^* состоит из одного ребра $(i, 0) \in T^*$. Тогда из неравенства $a_{ij} + q(b_{ij} + p_j) \leq a_{i0} + q b_{i0}$ следует, что

$$S_i^* = a_{i0} + b_{i0} \geq b_{ij} + p_j + \frac{a_{ij}}{q} + a_{i0} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \geq a_i + b_i + v.$$

Лемма доказана.

Теорема 1.6. Если $v > 0$, $q \geq 1$, то справедливо неравенство

$$\varepsilon_{D'} \leq \frac{L}{q} \left(1 - \frac{a}{A}\right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_{ij} + b_{ij})}{W^*}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{\delta}{b} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)}{W^*}\right),$$

где $(i, j) \in C_i^*$, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Из леммы 1.4 имеем

$$S_i(D') - S_i^* \leq (K-1)(S_i^* - (a_{ij} + b_{ij})) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \Delta_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 W(D') - W^* &= \sum_{i=1}^n [S_i(D') - S_i^*] \leq \\
 &\leq \sum_{i \in \mathcal{M}(D')} \left[\frac{L}{q} \left(1 - \frac{a}{A}\right) (S_i^* - a_{ij} - b_{ij}) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \Delta_i \right] \leq \\
 &\leq \frac{L}{q} \left(1 - \frac{a}{A}\right) \sum_{i=1}^n (S_i^* - a_{ij} - b_{ij}) + m \left(1 - \frac{1}{q}\right) \delta \leq \\
 &\leq \frac{L}{q} \left(1 - \frac{a}{A}\right) \left(\sum_{i=1}^n S_i^* - \sum_{i=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) \right) + m \left(1 - \frac{1}{q}\right) \delta,
 \end{aligned}$$

где $m = |\mathcal{M}(D')|$. Следовательно,

$$\varepsilon_{D'} \leq \frac{L}{q} \left(1 - \frac{a}{A}\right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_{ij} + b_{ij})}{W^*}\right) + m \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{\delta}{W^*}.$$

Из леммы 1.5 имеем $m \leq \frac{(W^* - \sum_{i=1}^n (a_i + b_i))}{b}$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Из теоремы 1.6 и леммы 1.1 следует априорная оценка точности смешанного алгоритма.

С л е д с т в и е 1.3. Если $b > 0$ и $B_{i-1} \leq B_i, i = 2, \dots, n$, то

$$\varepsilon_{D'} \leq \left(\frac{L}{q} \left(1 - \frac{a}{A}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{\delta}{b} \right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n (A_i + i B_i)}\right). \quad (8)$$

З а м е ч а н и е 1.1. Если граф G полный, то $W^* \leq \sum_{i=1}^n (A_i + B_i)$, и тогда

$$\varepsilon_{D'} \leq \left(\frac{L}{q} \left(1 - \frac{a}{A}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{\delta}{b} \right) \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n (A_i + B_i)}\right).$$

С л е д с т в и е 1.4. Если $q = 1$ и $\Delta = 0$, то $W(D') = W^*$.

З а м е ч а н и е 1.2. Теорема 1.6 может быть использована и для получения апостериорной оценки, более точной по сравнению с (8). Пусть на ребрах $(i, j) \in E$ заданы веса $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, и для любого дерева $T \in \mathcal{F}$ определен вес $u_c(T) = \sum_{(i,j) \in T} c_{ij}$. Пусть, далее, дерево $P_c \in \mathcal{F}$ таково, что

$$u_c(P_c) = \min_{T \in \mathcal{F}} u_c(T). \text{ Очевидно, } u_c(P_c) \leq \sum_{(i,j) \in T^*} (a_{ij} + b_{ij}). \text{ В качестве}$$

же верхней апостериорной оценки для W^* может быть использована

$$W^* \leq \min\{W(P), W(D), W(D')\} = F.$$

Отсюда получаем эффективно вычисляемую верхнюю оценку для $\varepsilon_{D'}$:

$$\varepsilon_{D'} \leq \frac{L}{q} \left(1 - \frac{a}{A}\right) \left(1 - \frac{u_c(P_c)}{F}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{\delta}{\delta} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)}{F}\right).$$

Теорема 1.7. Пусть $q=1$, $b_e = H_e z$ для любого ребра $e=(i, j) \in E$, где H_e - натуральные числа, $z > \Delta$. Тогда $W(D') = W^*$.

Доказательство. Предположим, что вершины графа G занумерованы в порядке их присоединения к дереву D' . Обозначим через T_i дерево, построенное на i -м шаге смешанного алгоритма при $q=1$ ($i=1, \dots, n$). Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого $i=0, \dots, n$ найдется такое дерево $T_i^* \in \mathcal{F}$, что $W(T_i^*) = W^*$ и $T_i \subseteq T_i^*$. Последнее докажем индукцией по $i=0, \dots, n$.

1) Пусть $i=0$. В качестве T_0^* берем любое оптимальное дерево $T \in \mathcal{F}$.

2) Пусть дерево T_{i-1}^* построено и $(i, l) \in C_i(D')$. Если $(i, l) \in T_{i-1}^*$, то $T_i \subseteq T_{i-1}^*$, и, значит, в качестве дерева T_i^* может быть взято T_{i-1}^* .

Пусть $(i, l) \notin T_{i-1}^*$, а вершины $t \in T_{i-1}$, $j \notin T_{i-1}$, $k \in V$ таковы, что (j, t) , $(i, k) \in C_{it}^* = C_{it}(T_{i-1}^*)$. Положим

$T_i^* = T_{i-1}^* \cup \{(i, l)\} \setminus \{(i, k)\}$ и докажем что

$$W(T_i^*) = W^*, \quad (9)$$

т.е. дерево T_i^* является искомым. Предположим, что последнее неверно, т.е. $W(T_i^*) > W(T_{i-1}^*)$. Отсюда следует, что

$$a_{ik} + n_i (b_{ik} + R_k^*) < a_{il} + n_i (b_{il} + R_l^*), \quad (10)$$

где

$$n_i = |\{s \in V / C_s^* \subseteq C_s^*\}|, \quad C_s^* = C_s(T_{i-1}^*), \quad R_s^* = R_s(T_{i-1}^*).$$

Из (3) имеем

$$a_{il} + b_{il} + R_l^* \leq a_{jt} + b_{jt} + R_t^*. \quad (11)$$

Далее рассмотрим два случая.

а) Цепь C_{it}^* состоит из единственного ребра, т.е. $k=t$, $j=i$. Из (11) и (10) получаем

$$\begin{aligned} a_{il} + b_{il} + R_l^* + (n_i - 1)(b_{ik} + R_k^*) &\leq a_{ik} + n_i (b_{ik} + R_k^*) < \\ < a_{il} + b_{il} + R_l^* + (n_i - 1)(b_{il} + R_l^*), \end{aligned}$$

откуда $b_{ik} + R_k^* < b_{il} + R_l^*$, и, следовательно,

$$b_{ik} + R_k^* \leq b_{il} + R_l^* - z. \quad (12)$$

Из (11) и (12) получаем

$$b_{ie} + R_e^* \leq a_{ik} - a_{ie} + b_{ik} + R_k^* \leq \Delta - z + b_{ie} + R_e^* < b_{ie} + R_e^*.$$

Противоречие доказывает (9).

б) Цепь C_{it}^* состоит из более чем одного ребра, т.е.

$$b_{jt} + R_t^* \leq R_k^*. \tag{13}$$

Из $b_{ik} \geq z$ и неравенств (10), (11), (13) получаем

$$z + R_k^* \leq b_{ik} + R_k^* < a_{ie} - a + b_{ie} + R_e^* \leq a_{jt} - a + b_{jt} + R_t^* \leq \Delta + R_k^*,$$

что противоречит условию $z > \Delta$.

Теорема доказана полностью.

§ 2. Псевдоэффективный алгоритм локальной оптимизации

Алгоритм начинает работу с некоторого дерева $T_0 \in \mathcal{F}$. На каждом шаге K алгоритма строится новое дерево $T_K \in \mathcal{F}$ с весом $W(T_K) < W(T_{K-1})$, отличающееся от предыдущего дерева $T_{K-1} \in \mathcal{F}$ ровно одним ребром и имеющее наименьший вес среди всех деревьев $T \in \mathcal{F}$, отличающихся от T_{K-1} одним ребром. Алгоритм заканчивает работу, когда на каком-то шаге K вес нового дерева $W(T_K) = W(T_{K-1})$.

Введем следующие обозначения. Пусть $R_i^j(T) = \sum_{(p,q) \in C_{ij}(T)} b_{pq}$, $T \in \mathcal{F}$.

Для любого подмножества вершин $V' \subset V$ определим

$$h_i(V') = \begin{cases} 1 & \text{, если } i \in V' ; \\ 0 & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Для дерева $T \in \mathcal{F}$ определим вектор (Q_i) ($i = 1, \dots, n$), где $Q_i = j$ тогда и только тогда, когда ребро $(i, j) \in C_{i,i}(T)$. Для любого дерева $T' = (V', E')$ определим $R^j(T') = \sum_{i \in V'} R_i^j(T')$. Тогда $u_2(T) = R^0(T)$

для $T \in \mathcal{F}$.

Описанный алгоритм может быть реализован следующим образом.

Шаг 0. В качестве начального дерева $T_0 \in \mathcal{F}$ возьмем такое, что $W(T_0) = \min\{W(P), W(D), W(D')\}$. Найдем вектор (Q_i) . Для каждой пары вершин $i, j \in V$ вычислим $R_i^j(T_0)$.

Шаг K. ($K = 1, \dots, K$). Для всех ребер $(t, \ell) \in T_{K-1}$ применим следующую процедуру.

Удалим ребро $(t, \ell) \in T_{K-1}$. Дерево T_{K-1} распадается на две компоненты связности $T^0 = (V^0, E^0)$, $0 \in V^0$ и $T' = (V', E')$. Найдем $h_i(V')$, и для каждой вершины $i \in V'$ вычислим $R^i(T') = \sum_{p=1}^n R_p^i(T_{K-1}) \cdot h_p(V')$. Для этого необ-

ходимо не более $O(n^2)$ арифметических операций.

Найдем ребро $(i, j) \in E$, $i \in V'$, $j \in V^0$, для которого выражение

$$W_{ij} = a_{ij} + |V'| \cdot (\beta_{ij} + R_j(T_{K-1})) + R^i(T')$$

принимает наименьшее значение. Дерево, получившееся после добавления такого ребра (i, j) , обозначим $T_K(t, \ell)$. Очевидно, что его вес $W(T_K(t, \ell)) = W(T_{K-1}) + W_{ij} - W_{t\ell}$. Так как в любом графе с $(n+1)$ -й вершиной не более n^2 ребер, то трудоемкость вычисления всех W_{ij} , $i \in V'$, $j \in V^0$, не превосходит $O(n^2)$.

Среди деревьев $T_K(t, \ell)$, $(t, \ell) \in T_{K-1}$, выберем дерево T_K наименьшего веса. Пусть V^0 и V' - подмножества, получившиеся после удаления ребра (t, ℓ) , на котором был достигнут минимум величин $W(T_K(t, \ell))$, а $(i, j) \in T_K$, $i \in V'$, $j \in V^0$, - новое ребро. Тогда $R_q^p(T_K) = R_q^p(T_{K-1})$ для всех $p, q \in V^0$ и всех $p, q \in V'$. Величины $R_q^p(T_K)$ для $p \in V^0$, $q \in V'$ вычисляются по следующей формуле:

$$R_q^p(T_K) = R_q^i(T_K) + \beta_{ij} + R_p^j(T_K)$$

с трудоемкостью, не превосходящей $O(n^2)$. За $O(n^2)$ операций пересчитаем вектор (Q_i) для нового дерева T_K .

Если на каком-то шаге K вес нового дерева равен $W(T_K) = W(T_{K-1})$, то алгоритм заканчивает работу.

Т е о р е м а 2.1. Пусть все a_{ij} , β_{ij} - целые неотрицательные, $(i, j) \in E$. Тогда трудоемкость τ описанного алгоритма не превосходит $O(\Delta \cdot n^4)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\tau \leq K \cdot t$, где t - трудоемкость одного шага, K - количество шагов. Так как $W(T_C) \leq W(D)$, то

$K \leq \sum_{i=1}^n (A_i - a_i) \leq \Delta \cdot n$. Покажем, что $t \leq O(n^3)$. В описанном выше алгоритме трудоемкость нахождения дерева $T_K(t, \ell)$, $(t, \ell) \in T_{K-1}$, не превосходит $O(n^2)$. А так как в любом дереве $T \in \mathcal{F}$ ровно n ребер, то $t \leq n^3$.

Теорема доказана.

Поступила в ред.-изд.отдел

29 ноября 1982 г.

Л и т е р а т у р а

1. Кристофидес Н. Теория графов: Алгоритмический подход. - М.: Мир, 1978, 432с.